

Проблема сужения множества Парето: подходы к решению¹

Аннотация. Рассматривается модель многокритериального выбора, которая включает множество возможных вариантов, числовой векторный критерий и отношение предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР). Главная задача многокритериального выбора – выбрать один или несколько парето-оптимальных вариантов из всего множества Парето, иными словами, сузить это множество. В работе рассматриваются и анализируются различные подходы к решению проблемы сужения множества Парето, в том числе основанные на обобщённых критериях, использующие «искусственные» отношения предпочтения, интерактивные процедуры, свойства отношения предпочтения ЛПР.

Ключевые слова: многокритериальный выбор, Парето-оптимальные решения, относительная важность критериев

Введение

Задачи многокритериального выбора, которые содержат не один, а сразу несколько критериев, представляют как теоретический, так и практический интерес, поскольку огромное число прикладных задач из области техники и экономики формализуются именно в многокритериальном виде. Согласно известному принципу Эджворта-Парето, всякий выбираемый вариант должен быть парето-оптимальным. К сожалению, в подавляющем числе многокритериальных задач множество Парето оказывается довольно широким, и конкретный выбор в его пределах не является очевидным. По этой причине и возникает проблема сужения множества Парето, связанная с выбором того или иного конкретного парето-оптимального варианта в качестве «наилучшего». Положительное решение этой проблемы представляет большой интерес для практики, поскольку в конкретных прикладных задачах выбора, как правило, следует ограничиться одним или же сравнительно узким количеством выбранных вариантов.

К настоящему времени для решения указанной проблемы предложено множество самых

различных подходов – от эвристических до аксиоматических. В данной статье все подходы условно разделены на несколько классов и проанализированы идейные основы каждого из них.

1. Принцип Эджворта-Парето и проблема сужения множества Парето

Абстрактная задача выбора состоит в указании одного или нескольких вариантов из имеющегося исходного множества возможных (допустимых) вариантов (решений) X , которые называют выбираемыми. Будем обозначать множество всех выбираемых вариантов через $C(X)$. Очевидно, $C(X) \subset X$. Таким образом, в задаче выбора дано множество X , содержащее по крайней мере два элемента, а требуется найти некоторое его непустое подмножество $C(X)$. Предполагается, что выбор производится неким лицом, принимающим решение (ЛПР), в роли которого может выступать как отдельный человек, так и целый коллектив, подчинённый достижению определённой цели. Для того, чтобы совершаемый выбор в наибольшей степени со-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 08-01-00301)

ответствовал достижению имеющейся цели (т.е. был «наилучшим» или «оптимальным» для данного ЛПР), необходимо в процессе выбора учитывать «вкусы» и «предпочтения» ЛПР, которые в той или иной мере раскрывали бы смысл «наилучшего» решения.

Иногда «предпочтения» ЛПР удаётся выразить каким-либо простым образом, например, так: вариант x' предпочтительнее x'' тогда и только тогда, когда оценка $f(x')$ первого варианта строго больше (меньше) оценки $f(x'')$ второго варианта, где f – заданная числовая функция, определённая на множестве X и называемая целевой функцией или критерием оптимальности. В таком случае множество $C(X)$ будет состоять из элементов, доставляющих максимальное (минимальное) значение функции f на множестве X . При этом сама задача выбора превращается в обычную экстремальную (оптимизационную) задачу, которая хорошо изучена и для решения которой разработан широкий арсенал методов решения.

Значительно более обширный и интересный с точки зрения практики класс задач выбора составляют те, в которых не удаётся выразить предпочтения ЛПР указанным выше простым способом. В этих задачах задаётся некоторый набор числовых целевых функций $f_1, \dots, f_m$, определённых на множестве X и образующих векторный критерий $f = (f_1, \dots, f_m)$ со значениями в критериальном пространстве $\mathcal{R}^m$. При этом обычно добавляют, что для ЛПР каждый из этих критериев желательно максимизировать (или минимизировать). Последнее требование можно выразить более точно в форме так называемой аксиомы Парето, которую сформулируем применительно к рассматриваемой далее задаче максимизации.

Аксиома Парето. Если оценка одного из двух вариантов не хуже оценки второго варианта по всем компонентам, причём по крайней мере по одной из них – строго лучше, то первый вариант предпочтительнее второго, т.е.

$$x', x'' \in X, f_i(x') \geq f_i(x''), i = 1, \dots, m; \\ \exists k \in \{1, 2, \dots, m\}: f_k(x') > f_k(x'') = x' \succ_X x''. (1)$$

Здесь символом $\succ_X$ обозначено бинарное отношение предпочтения ЛПР, определённое на X , а запись $x' \succ_X x''$ означает, что из данной пары вариантов ЛПР выберет первый вари-

ант и не выберет второй. К паре исходных объектов задачи многокритериального выбора X, f , как видим, добавилось ещё бинарное отношение предпочтения ЛПР $\succ_X$. Сразу отметим, что при решении конкретных задач выбора отношение $\succ_X$ обычно полностью не известно (в отличие от X и f), поэтому принятие ЛПР аксиомы Парето означает наличие некоторой информации об этом отношении. Такая информация даёт возможность из пары вариантов x', x'' , подчиняющихся условию в левой части импликации (1), исключить второй вариант как «заведомо негодный».

В общем случае вариант, не выбираемый в некоторой паре, может оказаться выбранным из всего множества X . Однако при решении достаточно широкого класса задач можно считать выполненным следующее предположение.

Аксиома исключения [22, 26, 31]. Вариант, не выбираемый в какой-либо паре, не должен оказаться среди выбранных и из исходного множества возможных вариантов, т.е.

$$x', x'' \in X, x' \succ_X x'' = x'' \notin C(X).$$

Эта аксиома близка к обратному условию Кондорсе [1], но в общем случае не совпадает с ним.

Принятие сформулированных выше двух аксиом даёт возможность установить фундаментальный принцип многокритериального выбора.

Принцип Эджворта-Парето [22, 23, 26-30]. При выполнении аксиомы Парето и аксиомы исключения для любого множества выбираемых вариантов $C(X)$ имеет место включение $C(X) \subset P_f(X)$.

Здесь через $P_f(X)$ обозначено множество парето-оптимальных вариантов [39], определяемое следующим образом

$$P_f(X) = \{x^* \in X \mid \text{не существует } x \in X \text{ такого, что } f_i(x) \geq f_i(x^*), i = 1, \dots, m, f(x) \neq f(x^*)\}.$$

В случае принятия аксиомы Парето и аксиомы исключения выбираемые варианты не могут оказаться за пределами множества Парето, и при этом выбранным может оказаться любой парето-оптимальный вариант. Заметим, что при нарушении хотя бы одной из указанных выше аксиом выбираемое (т.е. «наилучшее») решение не обязано быть парето-оптимальным [22, 28, 29, 58]; иными словами, эти две аксиомы представляют собой минимальный набор

требований, необходимых для выполнения принципа Эджворта-Парето. Первоначально [22] принцип Эджворта-Парето был установлен в предположении справедливости трёх аксиом, в число которых входило требование транзитивности отношения предпочтения. Позже выяснилось, что от транзитивности можно отказаться; тем самым, существенно расширился класс задач выбора, в которых данный принцип «работает». Своё развитие (для нечётких отношений и в терминах функций выбора) принцип Эджворта-Парето получил в работах [7, 26-30, 58].

Поскольку на практике множество X и векторный критерий f обычно известны, то в принципе может быть построено и множество Парето $P_f(X)$, хотя при этом могут возникнуть серьёзные трудности вычислительного характера. Таким образом, при выполнении принципа Эджворта-Парето задача многокритериального выбора может быть сформулирована как задача сужения множества Парето до множества выбираемых вариантов $C(X)$. Эта задача оказалась настолько сложной, что её нередко именуют проблемой сужения множества Парето.

Ясно, что сужение множества Парето может быть осуществлено только при наличии той или иной дополнительной информации о решаемой многокритериальной задаче. Нередко подобную информацию авторы заменяют какими-либо эвристическими соображениями или определёнными «правдоподобными» предположениями, позволяющими сузить область поиска «наилучших» вариантов. Характерным признаком эвристических методов является невозможность чёткого описания того класса задач многокритериального выбора, при решении которых данный эвристический метод будет гарантированно приводить к желаемому результату. С этой точки зрения аксиоматические подходы можно считать более обоснованными.

Отдельные авторы считают, что окончательный выбор должно осуществлять само ЛПР после непосредственного анализа всего представленного ему множества Парето или какой-то его существенной части. Действительно, когда имеется лишь небольшое число парето-оптимальных вариантов (лучше всего два), выбор из них в принципе может быть произведён после сравнительного сопоставления этих вариантов и анализа достоинств и недостатков

каждого из них. Правда, даже в случае двух вариантов ЛПР может оказаться в затруднительном положении, когда, например, число критериев велико. Если же множество Парето достаточно широкое, а тем более бесконечное, непосредственный анализ парето-оптимальных вариантов становится затруднительным. И для успешного решения задачи выбора следует иметь в распоряжении какую-либо формализованную процедуру. Краткое описание и критический анализ подобных процедур различного типа, разработанных к настоящему времени, приводится ниже.

2. Выбор на основе обобщённого критерия

Существуют такие комбинации критериев, с помощью которых удаётся описать всё множество Парето. Тогда выбор в множестве Парето может быть сведён к выбору какой-то конкретной комбинации. Наиболее простой и общепотребительной среди таких комбинаций является линейная свёртка критериев $\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$,

где все $\lambda_i \geq 0$, причём нередко присутствует ещё и условие нормировки $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$.

Нетрудно проверить, что всякая точка максимума на множестве X линейной свёртки критериев при $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, m$ является парето-оптимальной. Из этого следует, что, выбирая (или назначая) в указанных пределах коэффициенты линейной свёртки и максимизируя её значение на множестве X , в итоге будут получены какие-то парето-оптимальные варианты. Тем самым выбор вариантов (даже без предварительного построения самого множества Парето) сводится к выбору коэффициентов линейной свёртки, которые нередко трактуют как некие «веса» (или «коэффициенты важности») соответствующих критериев.

Такой способ решения задач многокритериального выбора существовал ещё до появления самого понятия оптимальности по Парето. Его автором является французский учёный XVII века Ж.-Ш. Борда, предложивший способ голосования, согласно которому побеждает тот кандидат, который набирает максимальную сумму

мест в ранжировках кандидатов, представленных участниками голосования. Напомним, что в задаче голосования имеется конечное множество вариантов $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, именуемых в этой задаче кандидатами, и m участников голосования, каждый из которых способен ранжировать исходное множество вариантов, т.е. расположить их в порядке убывания предпочтительности [1]. Ранжирование равносильно приписыванию каждому кандидату номера, считая с самого последнего n -го (т.е. наименее предпочтительного). Другими словами, на множестве X заданы числовые функции $f_1, \dots, f_m$, такие, что $f_k(x_j) = n_{kj}$, где n_{kj} – порядковый номер (считая с конца) кандидата x_j , который кандидат занимает с точки зрения k -го участника голосования в ряду вариантов, расположенных в порядке убывания их предпочтительности. Согласно правилу Борда, выигрывает в голосовании тот кандидат i , чья сумма мест $\sum_{k=1}^m f_k(x_i)$ окажется максимальной. Как видим,

в этом правиле как раз участвует линейная свёртка критериев (с одинаковыми «весами», равными единице). В России ещё в начале XX века линейной свёрткой при оценке качества продукции и услуг пользовался, например, замечательный русский инженер-корабел А.Н. Крылов [43].

Указанный способ решения задачи многокритериального выбора крайне прост в идейном отношении, но, к сожалению, не выдерживает критики с позиций современного уровня развития теории принятия многокритериальных решений. Прежде всего, следует отметить, что точного определения «весов» критериев не существует. Исследователи, использующие линейную свёртку, нередко говорят об этих коэффициентах, как о «весовых коэффициентах», задающих степень влияния отдельных критериев на окончательный выбор (окончательную или сводную оценку): чем больше коэффициент, тем больший вклад вносит соответствующий ему критерий. Эксперт или ЛПР, выбирая конкретные значения указанных коэффициентов, будет исходить из своего собственного представления об этих коэффициентах, поскольку нет строгого определения соответствующего понятия. Однако ни один из них, как правило, не в состоянии оценить и численно

выразить в форме коэффициентов ту самую степень влияния отдельных критериев на окончательную оценку, о которой говорилось выше, так как исследование характера изменения точки максимума линейной свёртки в зависимости от её коэффициентов составляет предмет теории параметрической оптимизации, и чаще всего является достаточно сложной вычислительной задачей. Кроме того, на разных множествах возможных вариантов X точки максимума одной и той же линейной свёртки, вообще говоря, различны, что свидетельствует о несостоятельности попытки оценить влияние коэффициентов для одного и того же ЛПР, использующего один и тот же набор критериев, но различные множества X .

Ещё один недостаток метода линейной свёртки связан с тем, что не всякое парето-оптимальное решение может быть получено в результате максимизации линейной свёртки с положительными (и даже неотрицательными) коэффициентами. В середине прошлого века М. Слейтер установил (позднее это же проделал С. Карлин) следующее необходимое условие парето-оптимальности, которое нередко в отечественной литературе именуют леммой Карлина.

Лемма Карлина. Пусть множество вариантов $X \subset \mathbf{R}^n$ выпукло, а функции $f_1, \dots, f_m$ вогнуты на нём. Если $x^* \in P_f(X)$, то существует набор чисел $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, такой, что

линейная свёртка $\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$ с указанными коэффициентами достигает максимума в точке x^* на множестве X .

Условия неотрицательности коэффициентов, выпуклости множества и вогнутости критериев являются существенными в приведённом утверждении (отметим, что существуют некоторые варианты незначительных ослаблений данных условий [39]). Оно может служить некоторым теоретическим оправданием применения линейной свёртки критериев в выпукловогнутом случае, но только в этом случае. Например, известный метод анализа иерархий [40,61], реализованный в программном продукте EXPERT CHOICE, основан на использовании линейной свёртки для конечного (а значит,

невыпуклого) множества X , что в принципе недопустимо, поскольку не для всякого парето-оптимального решения при дискретном множестве X существует соответствующий набор весовых коэффициентов. На практике это означает, что в таких задачах некоторые парето-оптимальные варианты никогда не будут выбраны, какие бы неотрицательные коэффициенты эксперт не назначал (простой пример подобного рода в [25]). В то же время, согласно принципу Эджворта-Парето, выбранным может оказаться любой элемент из $P_f(X)$.

Сказанное выше даёт основание заключить, что метод линейной свёртки относится к разряду не имеющих строгого обоснования эвристических подходов, которые могут приводить к далеко не лучшим окончательным вариантам выбора. Последнее подтверждается и тем, что до сих пор никому не удалось доказать, что в том или ином классе задач многокритериального выбора применение именно метода линейной свёртки гарантированно приводит к «наилучшему» (в том или ином смысле) результату.

В общем случае вместо линейной свёртки критериев используют обобщенный критерий $\Phi_\mu(f_1(x), \dots, f_m(x))$, где может присутствовать вектор параметров μ определённой размерности, не обязательно совпадающей с m . Точку максимума обобщённого критерия на множестве X объявляют выбранным («наилучшим») вариантом. Иногда часть критериев (или все) используют в качестве дополнительных ограничений, задающих множество возможных вариантов [13, 15, 39, 44, 50, 53, 62].

По сути дела, на базе каждого необходимого и достаточного условия оптимальности по Парето (а их к настоящему времени насчитывается несколько десятков) можно предложить метод обобщённого критерия того или иного вида. К методам, основанным на применении обобщённого критерия, можно отнести и процедуры многокритериальной теории полезности Multi-Attribute Utility Theory [10, 13, 50], согласно которой обобщённый критерий строится главным образом в аддитивно-мультипликативной форме, а также методы, примыкающие к целевому программированию [26, 31, 41, 44, 48, 50, 53, 62] и использующие ту или иную метрику.

Все принципиальные критические замечания, сделанные выше в адрес линейной свёртки,

а также окончательный вывод остаются в той или иной мере справедливыми и по отношению к любому методу выбора на основе обобщённого критерия. Попытки установить границы применимости различных методов, использующих обобщённые критерии, были предприняты в [24, 25].

3. Выбор с помощью «искусственного» отношения предпочтения

Имеется обширная группа методов, согласно которым ЛПП предлагается выбрать то или иное бинарное отношение $\succ$ в качестве своего «личного» из уже имеющегося в распоряжении исследователей набора. Здесь имеется в виду строгое (т.е. асимметричное отношение), хотя в литературе встречаются и конструкции, основанные на нестрогом (т.е. рефлексивном и, как правило, транзитивном) отношении. Разница между этими подходами с точки зрения последующего рассмотрения несущественна. Последнего рассмотрения предпочтения $\succ$ окончательный выбор может быть осуществлён в множестве недоминируемых вариантов

$$N(X) = \{x^* \in X \mid \text{не существует } x \in X, \text{ тако-} \\ \text{го, что } x \succ_x x^*\}, \quad (2)$$

или в множестве доминирующих вариантов

$$D(X) = \{x^* \in X \mid \text{для всех } x \in X, x \neq x^* \text{ вы-} \\ \text{полнено } x^* \succ_x x\}. \quad (3)$$

Наиболее ранним образцом подобного рода методов является правило голосования Кондорсе [1], которое опирается на мажоритарное отношение $\succ_M$, определяемое так: соотношение $x_i \succ_M x_j$ имеет место тогда и только тогда, когда найдётся не менее половины участников голосования, которые вариант x_i считают предпочтительнее x_j . Наилучшим в соответствии с правилом Кондорсе объявляется вариант x_i , который доминирует любой другой вариант по мажоритарному отношению, т.е. $x_i \succ_M x_j$ для всех $j \neq i$. Примеры иных отношений, связанных с задачей голосования, можно найти в [1].

Некоторые ЛПП иногда используют лексикографическое отношение. Реализация этого

отношения приводит к точке максимума последнего критерия f_m на множестве X_{m-1} точек максимума предпоследнего критерия f_{m-1} , который максимизируется на множестве X_{m-2} точек максимума предыдущего критерия f_{m-2} и т.д. до первого критерия f_1 , максимизация которого осуществляется на исходном множестве X .

Широко используемые на Западе методы типа ELECTRE, MACBETH и др. также можно причислить к рассматриваемому типу [13, 50]. В рамках этих методов для построения соответствующего отношения предпочтения разработаны довольно громоздкие конструкции.

К числу несомненных достоинств использования уже готового («искусственного») отношения предпочтения относится хорошее знание свойств этого отношения. Некоторые из отношений, применяемые для решения задач голосования, имеют и аксиоматическое обоснование. Однако недостатков оказывается значительно больше. Главный из них заключается в том, что, несмотря на многообразие и детальную изученность этих «искусственных» отношений, крайне редко какое-либо из этих отношений можно считать удовлетворяющим конкретное ЛПР в полной мере. Упомянем хотя бы ту же задачу голосования, для решения которой разработано чрезвычайно большое число подходов, однако пока не слышно о том, чтобы какая-то процедура голосования полностью удовлетворяла избирателей.

Следует также отметить, что по мере развития теории принятия решений число этих «искусственных» отношений росло вместе со сложностью их задания. По этой причине не искушенное в теории принятия решений ЛПР не в состоянии до конца разобраться не только со всеми этими отношениями, чтобы обоснованно остановить свой выбор на наиболее подходящем для него отношении, но даже с некоторыми из них. А не поняв смысла самого отношения, как ЛПР может принять или отвергнуть это отношение для последующего использования? Ему остаётся лишь полагаться на мнения экспертов или исследователей, которые никогда полностью не знают «вкусы» ЛПР.

Ещё один недостаток рассматриваемых методов связан со способом окончательного выбора «наилучшего» варианта на основе «искусственного» отношения, т.е. с формулами (2) и (3). Дело в том, что множество недоминируе-

мых вариантов (2), как правило, является слишком широким в том смысле, что оно «по своим размерам» незначительно отличается от исходного множества возможных вариантов, тогда как множество доминирующих вариантов (3) нередко оказывается пустым. В этом случае метод просто «не работает». Указанные обстоятельства вносят дополнительные трудности в реализацию методов разбираемого типа.

Добавим, что в литературе имеются также попытки «навязывания» ЛПР не только того или иного отношения предпочтения, но и целого подмножества множества Парето, из которого предлагается осуществлять выбор. Например, в [17] вводится понятие r -оптимального варианта, который является парето-оптимальным относительно любой вектор-функции размерности $r \in \{1, \dots, m\}$, составленной из компонент исходного векторного критерия $f = (f_1, \dots, f_m)$. Тем самым 1-оптимальный вариант – это элемент, реализующий максимум одновременно по всем компонентам векторного критерия (т.е. в определённом смысле «идеальный» вариант решения многокритериальной задачи), а m -оптимальный вариант является просто парето-оптимальным. В качестве «наилучшего» предлагается выбирать r -оптимальный вариант с минимальным возможным $r \in \{1, \dots, m\}$, при котором множество r -оптимальных вариантов не пусто. В основу такого предложения положено эвристическое соображение, согласно которому чем меньше величина r , тем «ближе» r -оптимальный вариант к «идеальному» решению многокритериальной задачи. К сожалению, никаких других аргументов в пользу указанного подхода, кроме отмеченного эвристического соображения, автором не предложено.

4. Человеко-машинные процедуры выбора

Работы этого направления берут своё начало со статьи [49], где впервые была предложена некоторая итеративная процедура поиска «наилучшего» решения с использованием на каждом шаге вычислений определённой информации, полученной от ЛПР. Согласно предположениям авторов указанной статьи, существует обобщённый числовой критерий

$\Phi(f_1(x), \dots, f_m(x))$, максимизация которого на множестве X приводит к «наилучшему» решению, однако точный вид этого критерия не известен. Если поставленную задачу оптимизации числовой функции $\Phi(y_1, \dots, y_m)$ при $y_i = f_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, решать численно, например, с помощью какого-либо варианта градиентного метода, то полностью знать вид функции $\Phi(y_1, \dots, y_m)$ не обязательно. На каждом шаге необходимо использовать информацию о градиенте этой функции

$$\begin{aligned} \nabla_x \Phi(f_1(x^k), \dots, f_m(x^k)) = \\ = \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \cdot \nabla f_1(x^k) + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial y_m} \cdot \nabla f_m(x^k), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}$ – частная производная функции Φ по её i -й переменной, вычисленная в точке $(f_1(x^k), \dots, f_m(x^k))$, а $\nabla f_j(x^k)$ – градиент функции f_j в точке x^k .

Поскольку критерии f_j известны, то можно считать известными и их градиенты $\nabla f_j(x^k)$ ($i=1, \dots, m$) в соответствующих точках. Поэтому для вычисления направления перемещения на очередном шаге следует лишь задать коэффициенты $\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}$ в правой части равенства (4).

Авторы статьи [49] трактуют их как «коэффициенты относительной важности» критериев и предлагают на каждом шаге информацию об их величине получать от ЛПР. Таким образом, начиная с какой-то начальной точки и перемещаясь на каждом шаге в направлении градиента $\nabla_x \Phi$ с заданной величиной перемещения, будет получена последовательность точек x^k , $k = 1, 2, \dots$. Если эта последовательность при $k \rightarrow \infty$ сходится в том или ином смысле к некоторой парето-оптимальной точке, то эта точка и считается «наилучшим» решением исходной задачи многокритериального выбора.

Перейдём к критическому анализу метода. Во-первых, класс многокритериальных задач, в которых для используемого отношения предпочтения ЛПР существует дифференцируемая функция ценности (полезности) и ее максимизация ведёт к «наилучшему» решению, слишком узок [42], и

многие прикладные задачи оказываются за его пределами. Далее, даже при наличии строгого определения «коэффициентов относительной важности» в виде частных производных $\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}$

реализация данного подхода на практике представляет собой не более чем эвристическую процедуру, поскольку в соответствии с этим подходом ЛПР на каждом шаге должно сообщать величины этих частных производных, не зная саму функцию Φ . Ясно, что такого рода информация от ЛПР крайне ненадёжна из-за чрезмерной сложности вопросов, адресуемых ЛПР с целью её выявления. Кроме того, накапливаемые с каждым шагом неточности в указанных коэффициентах при выполнении достаточно большого числа шагов могут существенно повлиять на окончательный вариант и привести к далеко не лучшему решению.

К настоящему времени насчитываются десятки подобного рода человеко-машинных (интерактивных) процедур, согласно которым на основе определённой информации, выявляемой у ЛПР на каждом шаге, строится последовательность точек, предел которой предлагается считать «наилучшим» решением [44, 50, 53]. При этом существование функции ценности Φ может и не предполагаться (оно может быть заменено на какое-нибудь сходное условие). К числу таких методов относится ряд интерактивных методов (диалоговых карт решений, достижимых целей, разумных целей, Pareto Step), основанных на визуализации множества Парето и использующих те или иные варианты приближения к идеальному вектору [52].

Все методы рассматриваемого типа предполагают многократное использование (на каждом шаге) весьма специфической информации, получить которую от ЛПР не просто, а иногда даже и невозможно. Поэтому большинство критических замечаний, приведённых выше, вполне можно отнести ко всем человеко-машинным процедурам выбора решений.

5. Использование свойств отношения предпочтения ЛПР

Если в основе выбора, который осуществляет ЛПР, лежит отношение строгого предпочтения, то оно должно быть асимметричным. Асимметричность – это минимальное требова-

ние к такого рода отношениям. Ниже, как правило, имеются в виду отношения предпочтения, заданные не на множестве вариантов X , а на соответствующем множестве векторных оценок $Y = f(X)$ или же на всём критериальном пространстве $\mathcal{X}^m$.

Кроме асимметричности, нередко имеется какая-либо дополнительная информация о свойствах отношения предпочтения ЛПР. Например, когда ЛПР ведёт себя достаточно «разумно», отношение предпочтения предполагают транзитивным. Существует целый ряд типов инвариантности:

1. инвариантность относительно перестановок компонент векторных оценок;
2. независимость по предпочтению;
3. инвариантность относительно сдвига на произвольный вектор (так называемые разностные отношения [3, 4, 15]);
4. инвариантность относительно умножения векторных оценок на произвольные положительные числа;
5. инвариантность относительно положительного линейного преобразования (т.е. комбинация типов 3) и 4)); иногда такие отношения называют линейными.

Любое дополнительное требование, накладываемое на отношение предпочтения ЛПР, с одной стороны, ограничивает класс рассматриваемых задач выбора, но с другой, как правило, даёт возможность в большей степени сузить область поиска «наилучших» решений.

В [33, 36, 38] используется понятие двух равноважных критериев, перестановка компонент которых в произвольной векторной оценке даёт пару оценок одинаковой предпочтительности. Такое понятие равноважности критериев напоминает инвариантность отношения предпочтения относительно перестановок компонент векторного критерия, однако они принципиально различны. Равноважность критериев понимается как инвариантность отношения одинаковой предпочтительности (отношения безразличия), которым необходимо располагать в качестве ещё одной компоненты задачи многокритериального выбора. Если в качестве базового используется строгое (или нестрогое) отношение предпочтения, то на его основе в принципе можно «сконструировать» некое отношение одинаковой предпочтительности или безразличия. Вопрос в том, насколько это от-

ношение будет понятно ЛПР, чтобы оно могло с ним успешно оперировать. Дело в том, что отношение строгого предпочтения имеет простой и ясный смысл для ЛПР – из пары векторных оценок, находящихся в таком отношении оно выбирает одну оценку и не выбирает другую. Что касается отношения одинаковой предпочтительности, то для него не удаётся отыскать подобного «простого» истолкования.

Но самое главное – следует иметь в виду, что сокращение числа возможных векторных оценок на основе инвариантности относительно перестановок критериев возможно лишь тогда, когда в соотношении $y' \succsim y''$, с помощью которого согласно аксиоме исключения и происходит удаление y'' из числа претендентов на «наилучшую» оценку, не всегда допустимо первую и/или вторую оценку заменять на другую, которая ей одинаково предпочтительна. Для того чтобы подобная замена была правомерной, необходима специальная согласованность отношений предпочтения и одинаковой предпочтительности и, кроме того, следует предполагать наличие определённых дополнительных свойств у этих отношений [42]. К сожалению, в работах [33, 36, 38] эти обстоятельства в должной мере не учитываются.

Сужение множества Парето на основе свойства инвариантности относительно перестановок компонент векторных оценок асимметричного и транзитивного отношения строгого предпочтения может быть произведено, например, с помощью теоремы 7.9 [19], которая представляет собой уточнённую версию подхода, представленного в [33].

Независимость по предпочтению означает сохранение соотношения предпочтительности одной векторной оценки над другой при изменении величин одинаковых компонент векторных оценок. Например, в случае трёхкритериальной задачи, если при некоторых фиксированных величинах a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 векторная оценка (a_1, a_2, a_3) предпочтительнее оценки (b_1, b_2, a_3) , то в соответствии со свойством независимости по предпочтению данное отношение предпочтения будет связывать и любые две оценки вида (a_1, a_2, c) и (b_1, b_2, c) , где c – произвольное допустимое значение третьего критерия. Предполагая выполненным свойство независимости по предпочтению, можно несколько сократить число вариантов,

из которых следует осуществлять выбор. Подобный подход может оказаться полезным в случае, когда значения критериев измеряются не в количественных, а лишь в качественных шкалах. Такой подход был предложен в [12, 13, 51] и позднее развит в [2, 45].

Пусть все критерии $f_1, \dots, f_m$ принимают числовые значения и имеются две произвольные векторные оценки $y' = (y'_1, \dots, y'_m)$ и $y'' = (y''_1, \dots, y''_m)$ из критериального пространства, которые отличаются лишь i -й и j -й компонентами, причём $y'_i > y''_i$, $y''_j = y'_j$, $y''_i = y'_i$. Если в такой ситуации ЛПР первую оценку всегда предпочитает второй, то это будет определённая информация об используемом ЛПР отношении строгого предпочтения, которую можно использовать для сужения множества Парето. В таком случае предложено говорить, что i -й критерий важнее j -го, а саму информацию именовать информацией о качественной важности критериев [34-38, 59-60]. К сожалению, на основе указанной информации чаще всего происходит незначительное сужение множества Парето.

Теперь рассмотрим произвольные оценки $y' = (y'_1, \dots, y'_m)$ и $y'' = (y''_1, \dots, y''_m)$, принадлежащие множеству парето-оптимальных векторов $f(P_f(X))$. По определению множества Парето должны найтись такие два непустых подмножества номеров критериев $A, B \subset I = \{1, 2, \dots, m\}$, что

$$\begin{aligned} y'_i > y''_i, \quad y'_i - y''_i = w_i > 0 \quad \forall i \in A \\ y''_j > y'_j, \quad y''_j - y'_j = w_j > 0 \quad \forall j \in B \\ y'_s = y''_s, \quad \forall s \in I \setminus (A \cup B). \end{aligned} \quad (5)$$

Согласно условиям (5), первый вектор превосходит второй по компонентам группы критериев A , тогда как второй превосходит первый по компонентам группы критериев B . По остальным компонентам (если таковые имеются) два указанных вектора совпадают.

Сужение множества Парето, т.е. удаление некоторых парето-оптимальных векторов, обычно происходит на основе сравнения. Человеку проще всего сравнивать пары. Если при сравнении фиксированной пары парето-оптимальных векторов y' и y'' вида (5) ЛПР «выбраковывает» один из этих векторов (например, второй), то это означает, что для него

первый вектор предпочтительнее второго, т.е. $y' \succ y''$, где $\succ$ – отношение предпочтения, определённое на всём критериальном пространстве $\mathcal{R}^m$ и совпадающее на множестве Y с отношением $\succ_Y$. Соотношение $y' \succ y''$ задаёт некий «квант информации» об отношении строгого предпочтения, который свидетельствует о готовности ЛПР к компромиссу – оно согласно пойти на потери по всем критериям группы B в размере w_j ради того, чтобы получить прибавки в размере w_i по критериям группы A , сохранив при этом значения всех остальных критериев.

Наличие указанного «кванта информации» позволяет сократить множество Парето на один вектор y'' . Для того чтобы добиться большего сокращения, можно принять, что $y' \succ y''$ имеет место не только для данной пары векторов, но и для всех тех векторов, которые удовлетворяют условиям (5) при неизменных значениях w_i и w_j . В этом случае предложено говорить, что группа критериев A важнее группы B [35].

При указанном расширении действия «кванта информации» можно рассчитывать на более заметное сужение множества Парето, хотя нередко и оно оказывается недостаточным для окончательного выбора. В таких случаях имеет смысл наложить дополнительные требования на отношение предпочтения так, чтобы действие «кванта информации» в сужении множества Парето оказалось более эффективным. Эти требования (без аксиомы исключения) сформулированы в [18, 19, 54-57]. Позднее было установлено, что они представляют собой дальнейшее усиление системы двух упоминавшихся ранее аксиом, гарантирующих выполнение принципа Эджворта-Парето.

Аксиома 1 (аксиома исключения).

Аксиома 2. Отношение $\succ$ определено на всём критериальном пространстве $\mathcal{R}^m$ и является транзитивным на нём.

Аксиома 3 (аксиома согласования). Из двух векторов, отличающихся один от другого единственной компонентой, для ЛПР предпочтительнее вектор, имеющий большую компоненту.

Аксиома 4 (аксиома инвариантности). Отношение предпочтения $\succ$ инвариантно относительно линейного положительного преобразования (т.е. является линейным).

Сходная аксиоматика, содержащая аксиомы 2–4 и некоторые две другие, рассматривалась в [5].

Аксиомы 1–4 накладывают определённые требования на стиль поведения ЛПР в процессе выбора, который в целом (хотя и с некоторыми оговорками) можно охарактеризовать как «разумный». Наиболее «обременительной» и трудно проверяемой на практике представляется последняя аксиома. Она носит явно выраженный «математический» характер и, безусловно, можно привести примеры реальных задач, в которых её принятие может встретить серьёзные возражения.

Тем не менее можно указать и достаточно широкий класс задач многокритериального выбора, при решении которых эту аксиому в той или иной мере можно считать выполненной. Кроме того, существуют приёмы модификации исходной задачи многокритериального выбора таким образом, что для решения модифицированной задачи принятие аксиомы 4 вполне допустимо (здесь имеется в виду какое-нибудь предварительное монотонное преобразования критерия, например, $\sqrt{f_i(x)}$ или $f_i^2(x)$ с целью «линеаризации» изначально нелинейного характера предпочтений данного критерия). И, наконец, забегая вперёд, следует добавить, что в основном благодаря принятию аксиомы инвариантности удаётся построить содержательную математическую теорию использования произвольного конечного набора «квантов информации» об отношении предпочтения для сужения множества Парето.

Выше уже говорилось о сравнительной важности критериев. С различными вариантами этого понятия можно ознакомиться в работе [38], где приведена обширная литература по этому вопросу. Простой анализ показывает, что «объективного», единого для всех ЛПР понятия важности критериев не существует, поскольку каждый субъект вправе вкладывать в этот термин свой собственный смысл, причём этот смысл даже у одного и того же субъекта может меняться со временем или же в зависимости от решаемой задачи выбора и существующих обстоятельств. Поэтому всякая попытка введения определения важности критериев является ни чем иным, как «навязыванием» автором этого определения лицу, принимающему решение, своих «личных» представлений о важности. Как известно, в математике новое определение

появляется не по прихоти автора, а по необходимости, в силу внутренней закономерности развития предмета, только тогда, когда без этого понятия трудно обойтись. Есть ли насущная необходимость введения понятия важности критериев? Для чего оно нужно и можно ли без него обойтись?

Для того чтобы ответить на поставленные вопросы, напомним, что всякое определение важности представляет собой конструкцию следующего вида: будем говорить, что один критерий (или группа критериев) важнее (с заданными параметрами или во столько-то раз) другого критерия (другой группы критериев), если имеет место некоторое условие Ξ , которое содержит определённую информацию об отношении предпочтения ЛПР. Отсюда ясно, что без определения важности критериев всегда можно обойтись, оперируя в процессе принятия решений непосредственно с условием Ξ .

Чтобы воспользоваться определением важности, основанном на «кванте информации» и использующем в качестве условия Ξ соотношения (5), сначала следует объяснить ЛПР это определение важности, убедиться, что оно его «усвоило», после чего для выявления предпочтений ЛПР задать ему вопрос на «языке важности»: является ли группа критериев A важнее группы B с параметрами w_i и w_j (для $i \in A$ и $j \in B$). Возможно, в некоторых задачах такой путь является приемлемым, однако нельзя не признать, что он «длиннее» непосредственного оперирования с соотношениями (5).

Когда условие Ξ имеет для восприятия ЛПР более сложный, чем условие (5), вид [38], использование определений важности критериев, основанных на этом условии, может вызвать затруднения, как на стадии объяснения ЛПР смысла этих определений, так и при непосредственном выявлении у него информации об отношении предпочтения на «языке важности». В некоторых случаях суммарная «ошибка», вызванная указанными затруднениями и содержащаяся в выявленной информации, может оказаться недопустимой для последующего использования этой информации.

Существует ещё один аргумент (хотя и косвенный) против тех определений важности, которые основаны не на соотношениях (5), а на каких-то других условиях. Как будет показано

ниже, при помощи конечного числа «квантов информации» можно с любой степенью точности аппроксимировать неизвестное отношение ЛПР, а также неизвестное множество недоминируемых векторов. Это означает, что при решении задач многокритериального выбора нужно лишь научиться выявлять и умело использовать эти «кванты информации», не прибегая к информации ни какого другого типа. При этом можно рассчитывать на максимальное возможное сужение множества Парето на основе отношения предпочтения ЛПР, которое полностью не известно.

6. Сужение множества Парето при помощи «квантов информации»

Геометрический смысл аксиом 2–4 раскрывается в следующем утверждении. Предварительно напомним, что бинарное отношение $\succ$, заданное на векторном пространстве $\mathfrak{R}^m$, называют конусным, если существует такой конус $K \subset \mathfrak{R}^m$, что соотношение $y' \succ y''$ имеет место тогда и только тогда, когда $y' - y'' \in K$.

Теорема 1 [26, 56]. Любое бинарное отношение $\succ$, заданное на векторном пространстве $\mathfrak{R}^m$ и удовлетворяющее аксиомам 2–4, является конусным с острым выпуклым конусом (без начала координат), который содержит все векторы с неотрицательными компонентами. Обратно, всякое конусное отношение $\succ$ с указанным конусом удовлетворяет аксиомам 2–4.

Теорема 1 открывает возможность использования аппарата выпуклого анализа и построения содержательной математической теории для учёта различного набора «квантов информации». Наиболее простой случай одного «кванта» рассматривается в следующем утверждении, доказательство которого опирается на факты из теории двойственности выпуклого анализа.

Теорема 2 [26, 56, 57]. Пусть выполнены аксиомы 2–4 и имеется «квант информации» об отношении предпочтения $\succ$. Тогда для любого множества выбираемых вариантов $C(X)$, удовлетворяющего аксиоме 1, справедливы включения $C(X) \subset P_g(X) \subset P_f(X)$, причём «новый» векторный критерий g может быть образован из функций

$$f_i \text{ для всех } i \in I \setminus B; \\ g_{ij} = w_j f_i + w_i f_j \text{ для всех } i \in A, j \in B; \quad (6)$$

либо из функций

$$f_i \text{ для всех } i \in I \setminus B; \\ f_0 = \min_{i \in A} \frac{f_i}{w_i} + \min_{j \in B} \frac{f_j}{w_j}. \quad (7)$$

Важная особенность теоремы 2 заключается в отсутствии каких-либо требований к множеству X и векторному критерию f : эти объекты могут быть какими угодно. Ограничения накладываются лишь на поведение ЛПР в процессе принятия решений и выражаются они в форме аксиом 1–4.

Этой теоремой указывается оценка сверху $P_g(X)$ для неизвестного множества выбираемых вариантов $C(X)$, более точная, чем множество Парето $P_f(X)$. Сама оценка представляет собой множество парето-оптимальных вариантов, но относительно «нового» векторного критерия g . Для того, чтобы сформировать g , из «старого» векторного критерия f следует удалить все компоненты группы критериев B и добавить один нелинейный критерий f_0 вида (7), либо $|A| \cdot |B|$ «новых» линейных критериев вида (6), где $|Z|$ обозначает число элементов конечного множества Z . Вариант с нелинейной функцией f_0 вида (7) был получен автором данной статьи сравнительно недавно как следствие варианта (6). Его можно применять для количественных критериев, значения которых измеряются в шкале отношений, тогда как вариант (6) допускает использование ещё и в шкале интервалов.

Нелинейная функция f_0 вида (7) впервые введена в [35] для изучения случая, когда одна группа критериев важнее другой, где в отличие от приведённой выше аксиоматики используется операция транзитивного замыкания бинарного отношения и некоторые другие предположения. Однако, судя по всему, если попытаться аккуратно формализовать все требования, которые необходимы для получения указанного выше результата из [35] в терминах нелинейной функции f_0 вида (7), то это неизбежно приведёт к выписанной выше системе аксиом 1–4. Добавим ещё, что в [35] нет таких понятий, как

«множество выбираемых вариантов» и «оценка сверху» для множества выбираемых вариантов, а вместо включений $C(X) \subset P_g(X) \subset P_f(X)$ установлено лишь условие $P_g(X) \subset P_f(X)$.

Учёт нескольких «квантов информации» в принципе должен в ещё большей степени способствовать сужению множества Парето. Вместе с тем выяснилось, что некоторые наборы «квантов информации» являются противоречивыми в том смысле, что их использование невозможно. Определение непротиворечивого набора информации в терминах важности критериев введено в [35]. Непротиворечивым назван такой набор, который «порождает» иррефлексивное отношение, а в [16, 37] сформулирован критерий непротиворечивости, который сводится к существованию положительных решений у определённой системы линейных неравенств.

Позднее автором данной статьи было предложено понятие непротиворечивого набора k «квантов информации» в терминах существования отношения предпочтения ЛПП $\succ$, удовлетворяющего аксиомам 2–4, для которого $u^i \succ v^i$ для всех $i = 1, \dots, k$, где u^i и v^i – пары парето-оптимальных векторов, удовлетворяющих условиям, аналогичным (5) для векторов y' и y'' (но в общем случае с различными группами критериев A и B и различными наборами чисел w_i, w_j) [26, 54]. Там же приведены три условия непротиворечивости: в геометрической, алгебраической и алгоритмической форме, удобной для реализации на компьютере. Следует заметить, что алгебраическая форма непротиворечивости из [26] согласно теореме Моцкина [39] двойственна по отношению к критерию непротиворечивости набора информации о важности критериев из [16].

Построение оценки сверху для неизвестного множества выбираемых векторов $C(Y) = f(C(X))$ в виде множества $\hat{P}(Y) = f(P_g(X))$ при наличии произвольного непротиворечивого конечного набора «квантов информации» в случае конечного множества Y сводится к последовательной проверке соотношения $y' \succ_m y''$ для всех пар допустимых векторных оценок $y', y'' \in Y$, где $\succ_m$ – бинарное отношение, которое строится на основе имеющегося непроти-

воречивого набора «квантов информации». Критерий выполнения условия $y' \succ_m y''$ в терминах существования решений определённой системы неравенств дан в [16]. Позже критерий истинности $y' \succ_m y''$ в двойственной алгебраической, а также в алгоритмической форме был приведён в [54]. Тем самым, для конечного множества допустимых векторов Y вопрос построения оценки сверху для неизвестного множества выбираемых векторов можно считать полностью решённым.

Этого нельзя сказать о случае бесконечного множества Y . Заметим, что в этом случае в [16, 35] вопрос учёта набора информации о важности вообще не рассматривался. Если в наборе «квантов информации» все участвующие в них группы критериев попарно не пересекаются, то такой набор предложено именовать взаимно независимым [26]. Учёт подобного рода наборов можно производить, многократно используя теорему 2. В случае набора взаимно зависимой информации дело обстоит сложнее. К настоящему времени получен ряд результатов [7, 11, 21, 26], на основе которых можно учитывать взаимно зависимые наборы «квантов информации» определённого вида, но в общем случае этот вопрос не решён. Выяснилось [26], что учёт произвольного конечного набора «квантов информации» сводится к пока не решённой задаче выпуклого анализа, заключающейся в построении образующих двойственного конуса на основе образующих произвольного многогранного телесного конуса критериального пространства.

Интересным и теоретически важным представляется вопрос о принципиальных «границах» использования конечного набора «квантов информации» при сужении множества Парето: какова максимальная степень сужения множества Парето на основе произвольного конечного набора «квантов информации»?

Если этот вопрос перевести на математический язык, то он примет вид задачи аппроксимации неизвестного отношения предпочтения ЛПП (или неизвестного множества недоминируемых векторов). Как известно, задачи аппроксимации с давних пор являются традиционными в математике. Некоторые общие принципы построения аппроксимирующего отношения можно найти в работах [8, 9, 32]. Следует однако заметить, что в указанных работах

речь идёт об отношении, которое конструируется, т.е. является приближением. Само неизвестное отношение ЛПР, равно как и вопросы точности приближения к нему в этих работах не рассматривались.

Заметное продвижение в направлении аппроксимации бинарных отношений было осуществлено в [3, 4]. На основе этих результатов автор данной статьи установил [20, 26], что конус произвольного бинарного отношения, удовлетворяющего аксиомам 2–4, может быть аппроксимирован с любой степенью точности с использованием «модифицированной метрики Хаусдорфа» при помощи некоторого конечного набора «квантов информации» с рациональными компонентами векторов, участвующих в этом наборе. Рациональность компонент указанных векторов означает, что подобного рода информация является машинно-реализуемой, т.е. «понимаемой» компьютером.

Оказывается, приближение в пространстве конусов отношений не всегда влечёт приближение в пространстве недоминируемых вариантов. Однако в достаточно широком классе задач многокритериального выбора (с открытым конусом) существует такая последовательность «квантов информации», что на её основе можно построить последовательность множеств недоминируемых векторов, сходящуюся (в смысле поточечной сходимости) к неизвестному множеству недоминируемых векторов [3, 4, 20, 26]. Если же множество Y содержит лишь конечное число элементов, то вместо бесконечной последовательности существует конечный набор «квантов информации», на основе которых неизвестное множество недоминируемых векторов может быть построено полностью и точно [20, 26].

Указанные результаты убедительно показывают, что для построения неизвестного отношения предпочтения (а значит, и множества недоминируемых векторов) не нужно обладать никакими другими сведениями, кроме наборов «квантов информации», вводимых при помощи соотношений (5). Научившись выявлять у ЛПР подобную информацию и умело использовать её для сужения множества Парето, можно за счёт этой информации извлечь максимум того, что вообще можно получить на основе бинарного отношения предпочтения.

В последнее время внимание авторов привлекают задачи многокритериального выбора с нечётким отношением предпочтения ЛПР. Подобные задачи, с одной стороны, формально являются более общими, чем задачи с обычным отношением, а с другой – они более реалистичны с точки зрения практики, поскольку в обычной жизни требование от человека «однозначной» предпочтительности одного варианта по сравнению с другим является слишком «жёстким». Чаще всего у ЛПР имеются аргументы «за» какой-variant по сравнению с другим, но есть и определённые возражения, т.е. аргументы «против». В таких случаях удобно говорить, что у ЛПР есть некоторая степень уверенности (оцениваемая, например, в процентах или, что то же самое, числом от 0 до 1) в том, что один вариант из двух предпочтительнее другого. Именно с такого рода информацией и оперирует теория нечетких множеств и отношений.

Выяснилось [7, 21, 23, 55], что все принципиальные положения, а также результаты, связанные с учётом «квантов информации» об отношении строгого предпочтения ЛПР для сужения множества Парето, в той или иной мере можно успешно перенести со случая обычного отношения на случай нечёткого отношения. Это открывает возможности использования более гибких инструментов для сужения множества Парето при решении широкого класса практических задач многокритериального выбора.

Заключение

В статье рассмотрена модель многокритериального выбора, включающая множество возможных вариантов, векторный критерий и бинарное отношение предпочтения. Сформулирована основная проблема многокритериального выбора, заключающаяся в сужении множества Парето с целью выявления «наилучшего» варианта. Предложенные различными авторами подходы к решению этой проблемы условно разделены на несколько групп, и дан критический анализ идейных основ каждой такой группы.

Особое внимание в статье уделено аксиоматическому подходу к решению проблемы сужения множества Парето, основанному на

использовании своеобразных «квантов информации» об отношении предпочтения ЛПР.

Автор выражает признательность А.Б. Петровскому за детальное обсуждение данной статьи и целый ряд полезных замечаний.

Литература

1. Айзерман М.А., Алескерев Ф.Т. Выбор вариантов. Основы теории. – М.: Наука, 1990, 236 с.
2. Ашихмин И.В. Анализ предпочтений ЛПР на частичных описаниях многокритериальных объектов. // Методы поддержки принятия решений. Тр. Института системного анализа РАН. Т. 12. / Под ред. С.В.Емельянова, А.Б.Петровского. – М.: Эдиториал УРСС, 2005. С. 7-15.
3. Березовский Б.А., Борзенко В.И., Кемпнер Л.М. Бинарные отношения в многокритериальной оптимизации. М.: Наука, 1981, 150 с.
4. Березовский Б.А., Барышников Ю.М., Борзенко В.И., Кемпнер Л.М. Многокритериальная оптимизация. Математические аспекты. – М.: Наука, 1989, 128 с.
5. Берман В.П., Наумов Г.Е. Отношение предпочтения с интервальным коэффициентом замещения// Автоматика и телемеханика, 1989, № 3, С. 139-153.
6. Гафт М.Г. Принятие решений при многих критериях. М.: Знание, 1979.
7. Богданова А.В., Ногин В.Д. Сужение множества Парето на основе простейших наборов нечёткой информации об относительной важности критериев// Вестник СПбГУ. Сер. 10: «Прикладная математика. Информатика. Процессы управления». 2007, С. 3-17.
8. Гафт М.Г. Построение решающих правил в многокритериальных задачах // Проблемы принятия решений. – М.: Институт проблем управления, 1974, С. 30-44.
9. Гафт М.Г., Подиновский В.В. О построении решающих правил в задачах принятия решений // Автоматика и телемеханика. 1981. № 6. С. 128 – 138.
10. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь, 1981.
11. Климова О.Н., Ногин В.Д. Учет взаимно зависимой информации об относительной важности критериев в процессе принятия решений// Журнал вычислительной математики и математической физики, 2006, т. 46, № 7, С. 2179-2191.
12. Ларичев О.И., Зуев Ю.А., Гнеденко Л.С. Метод ЗАПРОС (Замкнутые ПРОцедуры у Опорных Ситуаций) анализа вариантов сложных решений. Многокритериальный выбор при решении слабоструктурированных проблем. Под ред. С. В. Емельянова: Сб. тр. ВНИИСИ. М., 1978, С. 83-95.
13. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений. М.: Логос, 2000.
14. Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л. Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.: Наука, 1997, 239 с.
15. Макаров И.М., Виноградская Т.М., Рубчинский А.А., Соколов В.Б. Теория выбора и принятия решений. М.: Наука, 1982, 328 с.
16. Меньшикова О.Р., Подиновский В.В. Построение отношения предпочтения и ядра в многокритериальных задачах с упорядоченными по важности неоднородными критериями// Журнал вычислительной математики и математической физики, 1988, т. 28, № 5, С. 647-659.
17. Ногин В.Д. Новый способ сужения области компромиссов// Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1976, № 5, С. 10-14.
18. Ногин В.Д. Оценки для множества оптимальных решений в условиях отношения предпочтения, инвариантного относительно линейного положительного преобразования, - Тез. докл. на IV Всесоюз. семинаре по исследованию операций и системному анализу «Принятие решений в условиях многокритериальности и неопределённости», М.- Батуми, 1983, С. 37.
19. Ногин В.Д. и др. Основы теории оптимизации. М.: Высшая школа, 1986, 384 с.
20. Ногин В.Д. Теоремы о полноте в теории относительной важности критериев// Вестник СПбГУ, сер.: мат., мех., астрономия., 2000, 40 (25), 13-18.
21. Ногин В.Д., Толстых И.В. Использование набора количественной информации об относительной важности критериев в процессе принятия решений// Журнал вычислительной математики и математической физики, 2000, т. 40, № 11, С. 1593-1601.
22. Ногин В.Д. Логическое обоснование принципа Эджворта-Парето// Журнал вычислительной математики и математической физики, 2002, т. 42, № 7, С. 950-956.
23. Ногин В.Д. Принцип Эджворта-Парето и относительная важность критериев в случае нечеткого отношения предпочтения// Журнал вычислительной математики и математической физики, 2003, т. 43, № 11, С. 1676-1686.
24. Ногин В.Д. Границы применимости распространенных методов скаляризации при решении задач многокритериального выбора. // Межвуз. сб. научн. тр. «Методы возмущений в гомологической алгебре и динамика систем». – Саранск: Изд-во Мордовского ун-та, 2004, С. 59-68.
25. Ногин В.Д. Упрощенный вариант метода анализа иерархий на основе нелинейной свертки критериев// Журнал вычислительной математики и математической физики, 2004, т. 44, № 7, С. 1259-1268.
26. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход (2-е изд., испр. и доп.). М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
27. Ногин В.Д. Обобщенный принцип Эджворта-Парето в терминах функций выбора// Методы поддержки принятия решений. Тр. Института системного анализа РАН/ Под ред. С. В. Емельянова, А. Б. Петровского. – М.: Эдиториал УРСС, 2005, С. 43–53.
28. Ногин В.Д. Обобщенный принцип Эджворта-Парето и границы его применимости // Экономика и математические методы, 2005, т.41, № 3, С.128-134.
29. Ногин В.Д. Принцип Эджворта-Парето в терминах нечеткой функции выбора// Журнал вычислительной математики и математической физики, 2006, т. 46, № 4, С. 582-591.
30. Ногин В.Д., Волкова Н.А. Эволюция принципа Эджворта-Парето// Таврический вестник информатики и математики, 2006, № 1, С. 21-33.
31. Ногин В.Д. Принятие решений при многих критериях. СПб: Изд-во Ютас, 2007, 104 с.

32. Озерной В.М., Гафт М.Г. Методология решения дискретных многокритериальных задач // Многокритериальные задачи принятия решений. М.: Машиностроение. 1978. С. 14 – 47.
33. Подиновский В.В. Многокритериальные задачи с однородными и равноценными критериями // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1975, 15 (2), 330-334.
34. Подиновский В.В. Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности критериями // Автоматика и телемеханика, 1976, 2, 118-127.
35. Подиновский В.В. Об относительной важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений // Многокритериальные задачи принятия решений. М.: Машиностроение. 1978. С. 48 – 82.
36. Подиновский В.В. Аксиоматическое решение проблемы оценки важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений // Современное состояние теории исследования операций. М.: Наука, 1979. С. 117 – 149.
37. Подиновский В.В. Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности критериями. // Методы оптимизации в экономико-математическом моделировании. – М.: Наука, 1991, С. 308-323.
38. Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007, 64 с.
39. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982, 2007 (2-е изд., испр. и доп.), 255 с.
40. Саати Т. Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети. – М.: Издательство ЛКИ, 2008, 360 с.
41. Салуквадзе М.Е. О задаче линейного программирования с векторным критерием качества // Автоматика и телемеханика, 1972, 5, С. 99-105.
42. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978, 352 с.
43. Хованов Н.В. Анализ и синтез показателей при информационном дефиците. СПб: Изд-во СПбГУ, 1996, 196 с.
44. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация: теория, расчет и приложения. Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1992.
45. Ashikhmin, I., Furems, E. UniComBOS - Intelligent Decision Support System for Multicriteria Comparison and Choice. // Journal of multi-criteria decision analysis, 2005, 13, P. 147-152.
46. Berman V.P., Naumov G. E. Podinovski V.V. Interval value tradeoffs: theory, method, software, and application // Multiple criteria decision making. – Berlin: Springer, 1992, P. 81-91.
47. Berman V.P., Naumov G. E. Podinovski V.V. Interval value tradeoffs methodology and techniques of multicriteria decision analysis. // User-oriented methodology and techniques of decision analysis and support. – Springer-Verlag, Berlin, 1993, P. 144-149.
48. Charns A., Cooper W.W., Ferguson R.O. Optimal estimation of execute compensation by linear programming // Management Science, 1955, 1 (2).
49. Geoffrion A.M., Dyer J.S., Fienberg A. An interactive approach for multi-criterion optimization, with an application to the operation of an academic department // Management Science, 1972, v. 19, No. 4, Part 1. (Имеется русский перевод в сб. «Вопросы анализа и процедуры принятия решений», М.: Мир, 1976, С. 126-145)
50. Figueira J., Greco S., Ehrgott M. Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys. Springer, 2005.
51. [Larichev et al., 1995] Larichev O. I., Moshkovich H. M.: ZAPROS-LM-A method and system for rank-ordering of multiattribute alternatives // European J. of Operational Research, 1995, v. 82, P. 503-521.
52. Lotov A. V. Bushenkov V. A., Kamenev G. K. Interactive decision maps, Approximation and visualization of Pareto frontier. – Boston, Kluwer, 2004.
53. Miettinen K. Nonlinear multiobjective optimization. Kluwer, 1999.
54. Noghin V.D. Estimation of the set of nondominated solutions // Numerical Functional Analysis and Applications, 1991, v. 12, No 5&6, P. 507-515.
55. Noghin V.D. Upper estimate for a fuzzy set of nondominated solutions // Fuzzy Sets and Systems, 1994, 67, P. 303-315.
56. Noghin V.D. Relative importance of criteria: a quantitative approach // J. Multi-Criteria Decision Analysis, 1997, 6, P. 355-363.
57. Noghin V.D. What is the relative importance of criteria and how to use it in MCDM. // Multiple Criteria Decision Making in the New Millenium, Proceedings of the XV International Conference on MCDM (ed. by M Köksalan, S. Zionts) in Ankara, Turkey (July, 2000). – Springer, 2001, P. 59-68.
58. Noghin V.D. An Axiomatization of the Generalized Edgeworth-Pareto Principle in Terms of Choice Function // Mathematical Social Sciences, 2006, v. 52, No 2, P. 210-216.
59. Podinovski V.V. Multicriteria optimization problems involving importance-ordered criteria // Modern mathematical methods of optimization (ed. by K.H.Elster). – Berlin, Akademie Verlag, 1993, P. 254-267.
60. Podinovski V.V. Criteria importance theory // Mathematical social sciences, 1994, vol. 27, No 3, P. 237-252.
61. Saaty T.L. Multicriteria decision making. The analytic hierarchy process. – Pittsburgh: RWS Publications, 1990, 287 pp.
62. Yu P.L. Multiple-criteria decision making: concepts, techniques, and extensions. – New-York – London: Plenum Press, 1985, 388 pp.

Ногин Владимир Дмитриевич. Профессор кафедры теории управления факультета прикладной математики-процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. Окончил Ленинградский государственный университет в 1971 г. Доктор физико-математических наук, профессор. Действительный член Международной академии наук высшей школы. Автор 116 печатных трудов, среди которых 2 монографии и ряд учебных пособий. Область научных интересов – принятие решений при многих критериях, многокритериальная оптимизация.