

Формирование набора лучших объектов при частичной информации о предпочтениях¹

Аннотация. Дается строгая постановка задачи формирования набора, включающего в свой состав установленное число наиболее предпочтительных элементов заданного конечного множества объектов, на котором определен частичный квазипорядок. Исследуются свойства оптимальных и недоминируемых наборов и входящих в них объектов.

Ключевые слова: выбор подмножества лучших объектов, частичное отношение предпочтения, оптимальные наборы, недоминируемые наборы, l -оптимальные объекты, l -недоминируемые объекты.

Введение

В настоящее время активно развивается и приобретает все большее прикладное значение математическая теория принятия решений. В указанной теории внимание сосредоточено в основном на *задачах единичного выбора*, т.е. задачах выделения из заданного множества объектов (вариантов, планов, стратегий, альтернатив) одного наилучшего, или оптимального объекта (например, [1, 2]). Если предпочтения моделируются несвязным бинарным отношением – строгим частичным порядком, то претендентами на оптимальный объект являются недоминируемые объекты. Это типично, например, для многокритериальных задач, когда предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР), выявлены не полностью [3].

Однако на практике часто встречаются и иные постановки задач принятия решений. К таковым относятся задачи выбора нескольких (указанного числа $l > 1$) лучших объектов из заданного конечного множества. Такие задачи можно разбить на две группы. К одной из групп относятся задачи, в которых вначале нужно выделить несколько лучших объектов, а затем уже из выделенных объектов выбрать один наилучший. Примером служат задачи создания сложных систем: на раннем этапе проектирования: из нескольких аль-

тернативных вариантов системы выделяются два (или три) лучших, а затем после более тщательной проработки из них выбирается один наилучший вариант, который в дальнейшем и проектируется с требуемой степенью полноты. Такого рода задачи можно назвать *задачами двухэтапного единичного выбора*. В них на роль лучших также могут претендовать только недоминируемые объекты.

К другой группе относятся *задачи множественного выбора*, или *задачи выбора подмножества*, в которых предполагается использование всех l отобранных лучших объектов без отсева каких-либо из них. Примерами такого типа задач являются различного рода конкурсы, тендеры, формирование групп представителей и т.п.

Если на множестве всех объектов задано отношение предпочтения, то для решения задачи выбора l лучших из них необходимо расширить это отношение на множество всех наборов, содержащих l объектов. Проблеме расширения отношения предпочтения, заданного на конечном множестве, до отношения на множестве его подмножеств, и построению функции ценности на нем посвящен целый ряд работ [4–6]. Однако в них предполагалось, что расширению должно подвергаться полное упорядочение, и притом на множество всех подмножеств данного множества, а также принимался ряд допол-

¹ Работа выполнена при поддержке Научного фонда ГУ-ВШЭ, грант № 08-01-0032

нительных достаточно сильных допущений, формулируемых в форме аксиом о свойствах искомого связного отношения на множестве подмножеств. Наша цель – расширение частичного упорядочения и только на множество наборов из l объектов, причем без принятия каких-либо дополнительных допущений.

В литературе рассматривались два подхода к выделению кандидатов на лучшие объекты в таких задачах (например, [7]). Согласно первому из них, следует взять все недоминируемые объекты, которые составляют «первый слой». Если таких объектов меньше l , то к ним нужно добавить второй «слой», образуемый недоминируемыми объектами во множестве, оставшемся после удаления из исходного множества объектов первого «слоя». Если всех этих объектов вместе взятых будет меньше l , то к ним нужно добавить объекты третьего «слоя», и т.д. до тех пор, пока впервые число всех выделенных объектов будет не менее l . Второй подход предполагает, что нужно сразу взять все l таких «слоев». Но еще в [8] было показано, что первый подход необоснованно сужает число претендентов на лучшие объекты, а второй, напротив, необоснованно расширяет его. Соответствующий пример будет дан и в этой статье.

В [8] применительно к задачам множественного выбора были введено обобщение понятия недоминируемого объекта: объект называется l -недоминируемым, если существует не более чем $l - 1$ объектов, более предпочтительных, чем он, согласно отношению строгого порядка. Там же было показано, что на роль l лучших могут претендовать лишь l -недоминируемые объекты. В [9] были приведен ряд основных свойств l -недоминируемых объектов, даны формулы для расчета оценок эффективности решающих правил в задачах множественного выбора и оценена эффективность решающего правила Парето. В [10] были получены оценки эффективности решающих правил, использующих информацию о важности однородных критериев [11]. В [12, 13] дана сводка как полученных ранее, так и новых результатов по оценке эффективности ряда решающих правил применительно к различным постановкам задач принятия решений, включая задачи множественного выбора, и в том числе для правила, использующего сведения об относительной важности неоднородных критериев [8, 14]. В [15] было показано, что уровень развития об-

суждаемой теории явно недостаточен для обеспечения запросов практики и определено направление ее дальнейшей разработки.

В данной статье задача выбора нескольких лучших объектов изучается в рамках общей методологии выбора при частичных отношениях предпочтения, формулируется и обосновывается порядок формирования набора l лучших объектов. Основные результаты статьи ранее были представлены в [16].

1. Оптимальные и недоминируемые наборы объектов

Рассматриваем задачу выбора (окончательного отбора) $l > 1$ лучших объектов из конечного множества объектов X . Будем считать, что $|X| = n$, т.е. всего объектов n , причем $n > l$. На множестве X задано отношение нестрогого предпочтения ЛПП R : xRy означает, что объект x не менее предпочтителен, чем y . Отношение R порождает отношения строгого предпочтения P , безразличия I и несравнимости N : xIy верно, когда справедливо xRy и yRx ; xPy выполняется тогда, когда xRy верно, но yRx неверно; xNy имеет место, когда неверно ни xRy , ни yRx .

Отношение R есть квазипорядок, оно рефлексивно и транзитивно; при этом отношение предпочтения P оказывается строгим частичным порядком (оно иррефлексивно и транзитивно), а отношение безразличия I – эквивалентностью (оно рефлексивно, симметрично и транзитивно). Кроме того, P транзитивно по I : из xPy и yIz , а также из xIy и yPz следует xPz [17].

Введем в рассмотрение множество L наборов (комплектов), состоящих из l объектов. Это множество также конечно: таких наборов всего $C_n^l = n! / l!(n-l)!$. Для наборов из множества L будем использовать обозначения типа $A = \{a^1, \dots, a^l\}$ и $B = \{b^1, \dots, b^l\}$. Пусть Π – множество перестановок множества $\{1, \dots, l\}$. Под перестановкой набора (множества) $A = \{a^1, \dots, a^l\}$, соответствующей перестановке $\pi \in \Pi$, понимается кортеж (упорядоченное множество) $\pi(A) = \langle a^{\pi(1)}, \dots, a^{\pi(l)} \rangle$. Например, если $l = 3$ и $\pi = (2, 1, 3)$, то $\pi(A) = \langle a^2, a^1, a^3 \rangle$.

Поскольку, согласно смыслу рассматриваемой задачи выбора l лучших объектов, порядок объектов в выделенном наборе никакой роли не играет, то зададим на множестве L отношение нестрогого предпочтения R^l следующим образом.

Определение 1. Соотношение AR^lB выполнено тогда и только тогда, когда существуют такие перестановки $\pi, \rho \in \Pi$, что справедливо

$$a^{\pi(i)}Rb^{\rho(i)}, \quad i = 1, \dots, l. \quad (1)$$

Легко понять, что определение 1 равносильно каждому из следующих двух определений:

$$\begin{aligned} AR^lB &\Leftrightarrow \exists \rho \in \Pi: a^iRb^{\rho(i)}, \quad i = 1, \dots, l; \\ AR^lB &\Leftrightarrow \exists \pi \in \Pi: a^{\pi(i)}Rb^i, \quad i = 1, \dots, l. \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим, что по своей идее определение 1 родственно определению отношения нестрогого предпочтения в многокритериальных задачах с однородными равноважными критериями [18].

Отношение R^l , как нетрудно убедиться, является квазипорядком. Оно порождает на L отношение строгого предпочтения – строгий частичный порядок P^l и отношение безразличия – эквивалентность I^l . Понятно, что AI^lB выполняется, когда в (1) или в (2) для каждого i вместо R можно подставить I , и AP^lB верно, когда в (1) или в (2) хотя бы для одного i вместо R можно подставить P .

Определение 2. Набор объектов A из множества L называется *строго оптимальным* (соответственно *оптимальным, недоминируемым*), если для любого набора $B \in L$, отличного от A , верно AP^lB (соответственно, если для любого набора $B \in L$ верно AR^lB , неверно BP^lA).

Набор, не являющийся оптимальным (недоминируемым), называют *неоптимальным* (соответственно, *доминируемым*).

Пусть $P^l(L)$, $R^l(L)$, $\bar{P}^l(L)$ – множества строго оптимальных, оптимальных и недоминируемых наборов соответственно. Согласно определениям 1 и 2, справедливы соотношения:

$$P^l(L) \subseteq R^l(L) \subseteq \bar{P}^l(L). \quad (3)$$

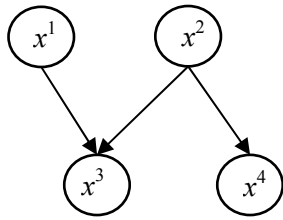
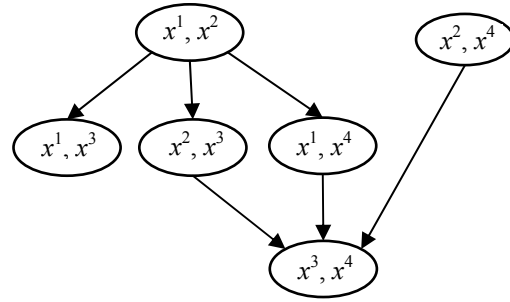
Если строго оптимальный набор существует, то он, очевидно, исчерпывает множество $P^l(L)$ [причем $R^l(L) = P^l(L)$] и искомые l лучших объектов определяются однозначно – это все объекты из такого набора. При этом в (3) оба включения $\subseteq$ выполняются как равенства $=$. Пусть такого набора нет, но существует оптимальный набор. Даже если он не единствен, то все оптимальные наборы эквивалентны по отношению I^l . Поэтому любой из них может с «равным правом» претендовать быть наилуч-

шим, а образующие его объекты – считаться l лучшими. При этом второе (правое) $\subseteq$ в (3) выполняется как $=$. Наконец, если и оптимальных наборов нет, то в силу конечности множества L обязательно будут существовать недоминируемые наборы. Более того, множество всех таких наборов будет внешне устойчивым: для любого набора $B \in L \setminus \bar{P}^l(L)$ найдется набор $A \in \bar{P}^l(L)$ такой, что верно AP^lB (см. приведенную ниже теорему 2). Следовательно, претендентами на оптимальный набор могут быть лишь недоминируемые наборы, а на роль l лучших могут претендовать лишь объекты из таких наборов.

К сожалению, в последнем случае множество $\bar{P}^l(L)$ будет содержать не сравнимые по R^l наборы. Именно такие случаи чаще всего могут встретиться на практике, если информация о предпочтениях ЛПР и/или неопределенных факторах неполна, так что отношение R лишь частичное и существует «много» объектов, не сравнимых по R для осмысленного и обоснованного выбора одного набора из множества всех недоминируемых необходимо расширить отношение R^l . А это можно осуществить лишь за счет расширения отношения R , для чего необходимо привлечь дополнительную информацию о предпочтениях ЛПР (если это, конечно, возможно) и/или принять дополнительные допущения о свойствах его предпочтений и проверить их выполнение.

Пример 1. Пусть на множестве X , состоящем из четырех объектов, определено отношение предпочтения P – строгий частичный порядок, граф которого представлен на Рис. 1. Отношением безразличия I является отношение равенства. Всего пар объектов $C_4^2 = 6$. Их частичное упорядочение согласно отношению P^2 представлено на Рис. 2. Здесь оптимального (и, тем более, строго оптимального) набора нет. Недоминируемых наборов два – это $\{x^1, x^2\}$ и $\{x^2, x^4\}$. Отметим, что первый верхний слой $X^1 = \{x^1, x^2\}$ и в нем отсутствует объект x^4 . А второй верхний слой $X^2 = \{x^3, x^4\}$, так что объединение этих двух слоев $X^1 \cup X^2 = X$ содержит «лишний» объект x^3 .

Говорят [17, 19], что квазипорядок $\hat{R}$ *непротиворечиво продолжает* квазипорядок R , или что R является *подотношением* отношения $\hat{R}$, и пишут $\hat{R} \supset R$, если верны соотношения

Рис. 1. Граф отношения предпочтения P на множестве объектовРис. 2. Граф (транзитивный остов) отношения предпочтения P^2 на множестве наборов из двух объектов

$$\hat{R} \supset R, \hat{I} \supseteq I, \hat{P} \supseteq P$$

(второе из них есть следствие первого). Из этих соотношений следует, что

$$\begin{aligned} P^l(L) \subseteq \hat{P}^l(L), R^l(L) \subseteq \hat{R}^l(L), \\ \bar{P}^l(L) \subseteq \bar{P}^l(L). \end{aligned} \quad (4)$$

Соотношения (4) показывают, что при непротиворечивом расширении отношения нестрогого предпочтения R множества $P^l(L)$ и $R^l(L)$, вообще говоря, расширяются, а множество $\bar{P}^l(L)$ сужается. Если $\hat{R}$ будет связным квазипорядком (т.е. несравнимых объектов не будет), то множество $\hat{R}^l(L)$ будет не пусто. Следовательно, при «достаточно связном» отношении нестрогого предпочтения $\hat{R}$ окажется выполненным равенство $\hat{R}^l(L) = \bar{P}^l(L)$, и любой набор из $\hat{R}^l(L)$ можно будет считать решением рассматриваемой задачи выбора l лучших объектов (пример 4 ниже).

2. Строго l -оптимальные, l -оптимальные и l -недоминируемые объекты

Поскольку выделять наилучшие и недоминируемые наборы непосредственно на основании их определения 1, используя (1) или (2), весьма обременительно даже при «не очень широком» множестве объектов X , то встает вопрос о поиске конструктивных способов решения возникающей проблемы. Для этого оказываются полезными следующие понятия.

Определение 3. Объект x называется *строго l -оптимальным* (соответственно *l -оптимальным*, *l -недоминируемым*), если xRy верно для всех объектов y , отличных от x , кроме, быть может, некоторого их числа, меньшего, чем l (соответственно, если xRy верно для всех объектов y , кроме, некоторого их числа, меньшего, чем l ; если число объектов y , для которых верно yPx , меньше, чем l).

Объект, не являющийся l -недоминируемым, называется *l -доминируемым*.

Отметим, что если эквивалентность I есть отношение равенства, то понятия строго l -оптимального и l -оптимального объектов совпадают. А при $l = 1$ определения l -оптимального и l -недоминируемого объектов оказываются соответственно определениями оптимального и недоминируемого объектов, широко используемыми в задачах оптимизации (выбора одного наилучшего объекта).

Пусть $P_l(X)$, $R_l(X)$, $\bar{P}_l(X)$ – множества строго l -оптимальных, l -оптимальных и l -недоминируемых объектов соответственно. Непосредственно из определения 3 вытекает, что верны утверждения:

$$P_l(X) \subseteq R_l(X) \subseteq \bar{P}_l(X); \quad (5)$$

$$\text{Если } k < l \text{ то } P_k(X) \subseteq P_l(X),$$

$$R_k(X) \subseteq R_l(X), \bar{P}_k(X) \subseteq \bar{P}_l(X). \quad (6)$$

Теорема 1. Справедливы следующие утверждения:

1.1. Множества $P_l(X)$, $R_l(X)$ и $\bar{P}_l(X)$ замкнуты сверху по R : если $x \in P_l(X)$ (соответственно $x \in R_l(X)$, $x \in \bar{P}_l(X)$) и yRx , то $y \in P_l(X)$ (соответственно $y \in R_l(X)$, $y \in \bar{P}_l(X)$).

1.2. Число строго l -оптимальных объектов не может превосходить l ; условия $|\bar{P}_l(X)| = l$, $|P_l(X)| = l$ и $\bar{P}_l(X) = P_l(X)$ равносильны.

1.3. Множество l -недоминируемых объектов непусто и внешне l -устойчиво:

– если $x \notin \bar{P}_l(X)$, то в $\bar{P}_l(X)$ найдется не менее l объектов y , таких, что yPx ;

– если $x^1, \dots, x^s \notin \bar{P}_l(X)$, $x^{s+1}, \dots, x^l \in \bar{P}_l(X)$, где $s \leq l$, то в $\bar{P}_l(X)$ найдется s объектов $x^{01}, \dots, x^{0s}$, отличных от $x^{s+1}, \dots, x^l$ и таких, что $x^{01}Px^1, \dots, x^{0s}Px^s$.

1.4. Пусть эквивалентность I есть отношение равенства; если $|R_l(X)| = l$, то верно равенство

$$R_l(X) = \bar{P}_l(X), \quad (7)$$

1.5. Если квазипорядок R связный, то верно равенство (7).

Заметим, что если эквивалентность I не является отношением равенства, то выполнение условия $|R_l(X)| \geq l$ не гарантирует справедливости равенства (7).

Доказательство теоремы 1. Утверждения, касающиеся множеств $R_l(X)$ и $\bar{P}_l(X)$, имеются в [9]. Докажем утверждения, касающиеся множества $P_l(X)$.

1.1. Если $x \in P_l(X)$, то, согласно определению 3, число объектов z таких, что xPz верно, больше, чем $n - l$. Но из yRx и xPz следует yPz . Таким образом, оказывается, что существует более чем $n - l$ объектов y таких, что верно yPz . Поэтому $y \in P_l(X)$.

1.2. Допустим, что $|P_l(X)| = s > l$. Тогда, согласно определению 3, для произвольного фиксированного объекта x^1 из множества $P_l(X)$ в этом же множестве найдется объект $x^2 \neq x^1$ такой, что x^1Px^2 . Для объекта x^2 , в свою очередь, в $P_l(X)$ найдется объект $x^3 \neq x^2$ такой, что x^2Px^3 . Более того, x^1Px^3 и $x^3 \neq x^1$ в силу транзитивности и иррефлексивности P . Аналогично рассуждая, убедимся в том, что для каждого $x^i \in P_l(X)$, $i = 3, \dots, s - 1$ найдется объект $x^{i+1} \in P_l(X)$ такой, что x^iPx^{i+1} , причем все объекты $x^1, \dots, x^s$ попарно различны. Но тогда будет выполнено x^iPx^1 , $i = 2, \dots, s$, что противоречит допущению $x^1 \in P_l(X)$.

Пусть $|\bar{P}_l(X)| = l$. Для $x \notin \bar{P}_l(X)$ и каждого $y \in \bar{P}_l(X)$, согласно 1.1, верно yPx . Это означает, что yPz может быть не выполнено не более чем для $l - 1$ объектов z (все они из множества $P_l(X)$), отличных от y . Следовательно, согласно определению 3, $y \in P_l(X)$, так что $\bar{P}_l(X) \subseteq P_l(X)$. С учетом (5) получаем равенство $\bar{P}_l(X) = P_l(X)$.

Пусть теперь $|P_l(X)| = l$, $x \in P_l(X)$ и $y \in X \setminus P_l(X)$. Предположим вначале, что x – минимальный по P объект в $P_l(X)$, т.е. не существует объекта $v \in P_l(X)$ такого, что xPv . Поскольку в составе $P_l(X)$ всего l объектов, то, согласно определению 3, должно выполняться xPy . Предположим теперь, что x не является минимальным по P объектом. Тогда во множестве $P_l(X)$ найдется минимальный по P объект $v \in P_l(X)$ такой, что xPv . Как только что было выяснено, для этого объекта верно vPy . В силу транзитивности отношения P оказывается выполненным и xPy . Таким образом, для каждого из l объектов $x \in P_l(X)$ и любого объекта $y \in X \setminus P_l(X)$ верно xPy . Следовательно, $y \notin \bar{P}_l(X)$.

Поэтому $\bar{P}_l(X) = P_l(X)$.

Предположим, наконец, что справедливо равенство $\bar{P}_l(X) = P_l(X)$. Как уже было установлено, $|P_l(X)| \leq l$. Для любого $x \notin \bar{P}_l(X)$, в силу 1.3, в $\bar{P}_l(X)$ найдется не менее l объектов y , таких, что yPx , так что $|\bar{P}_l(X)| \geq l$. Следовательно, $|\bar{P}_l(X)| = |P_l(X)| = l$.

1.3. Утверждение было доказано в [9].

1.4. Это утверждение – простое следствие утверждения 1.2, так как в данном случае понятия строго l -оптимального и l -оптимального объектов совпадают.

1.5. С учетом (5) достаточно показать, что верно $R_l(X) \supseteq \bar{P}_l(X)$. Пусть $x \in \bar{P}_l(X)$. Тогда, согласно определению 3, число объектов y , для которых неверно yPx , больше, чем $n - l$. А это означает, в силу связности R , что число объектов y , для которых верно xRy , больше, чем $n - l$. Поэтому, согласно определению 3, $x \in R_l(X)$.

Доказательство теоремы 1 завершено.

Пример 2. В условиях примера 1 имеем $P_2(X) = R_2(X) = \{x^2\} \subset \bar{P}_2(X) = \{x^1, x^2, x^4\} \subset X$.

3. Использование l -оптимальных и l -недоминируемых объектов для формирования оптимальных и недоминируемых наборов

Сформулируем условия, определяющие существование и характеризующие свойства оптимальных и недоминируемых объектов.

Теорема 2. Справедливы следующие утверждения:

2.1. Существование и свойства строго оптимального набора:

- строго оптимальный набор может состоять только из строго l -оптимальных объектов;
- строго оптимальный набор существует тогда и только тогда, когда $|P_l(X)| = l$, причем $P^l(L) = \{P_l(X)\}$ (т.е. строго оптимальный набор единствен).

2.2. Существование и свойства оптимальных наборов:

- в оптимальный набор могут входить только l -оптимальные объекты; оптимальный набор включает все строго l -оптимальные объекты;
- если $|R_l(X)| = l$, то оптимальный набор существует, причем $R^l(L) = \{R_l(X)\} = P^l(L)$, тогда и только тогда, когда выполнено равенство (7); если $|R_l(X)| > l$, то оптимальный набор существует тогда и только тогда, когда выполнено равенство (7) и в $R_l(X)$ существует наименьший по R объект;
- если $k < l$, $R_k(X) \subset R_l(X)$ и объект $x \in R_k(X)$ не включен в набор $A \in L$, то этот набор не является оптимальным.

2.3. Существование и свойства недоминируемых наборов:

- каждый недоминируемый набор состоит только из l -недоминируемых объектов и включает все строго l -оптимальные объекты;
- множество недоминируемых наборов не пусто и внешне устойчиво при любых n , l и R ;
- если $x \notin A$, $y \in A$ и верно xPy , то набор A является доминируемым.

Доказательство теоремы 2.

Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть набор B получен из набора A заменой a^j на $x \notin A$. Тогда:

$$\begin{aligned} xRa^j &\Leftrightarrow AR^lB, & xPa^j &\Leftrightarrow AP^lB, & xIa^j &\Leftrightarrow AI^lB, \\ xNa^j &\Leftrightarrow AN^lB. \end{aligned}$$

Лемма почти очевидна. Однако доказательство ее относительно громоздко, и мы его опускаем.

2.1. Пусть набор $A \in P^l(L)$ и объект $x \in A$. Согласно определению 1, для набора B , полученного в результате замены объекта x любым объектом $y \notin A$, верно AP^lB , откуда следует, что верно xPy . Таким образом, xPy может быть не выполнено только для $y \in A$, т.е. не более чем для $l - 1$ объектов, отличных от x . Поэтому, согласно определению 2, $x \in P_l(X)$.

Согласно 1.2, $|P_l(X)| \leq l$. Если это неравенство строгое, то строго оптимального набора не существует. Пусть $|P_l(X)| = l$. Покажем, что набор $A = P_l(X)$ строго оптимален. Несложно убедиться в том, что для любых $x \in P_l(X)$ и $y \notin P_l(X)$ верно xPy . Поэтому для любого $B \neq A$ справедливо AP^lB .

2.2. Пусть набор $A \in L$. Согласно определению 1, для набора B , полученного в результате замены объекта $x \in A$ объектом $y \notin A$, верно AR^lB , откуда следует, что верно xRy . Таким образом, xRy может быть не выполнено только для $y \in A$, т.е. не более чем для $l - 1$ объектов. Поэтому $x \in R^l(X)$. Так как оптимальный набор является и недоминируемым, то он включает все строго l -оптимальные объекты согласно утверждению из 2.3, которое будет доказано ниже (и его доказательство не опирается на 2.2).

Пусть $|R_l(X)| = l$. Предположим, что (7) выполняется. Тогда, согласно 1.2, $R_l(X) = P_l(X)$ и $R_l(X)$ – строго оптимальный набор (см. 2.1.). Предположим теперь, что существует оптимальный набор A . Согласно (5), $R_l(X) \subseteq \bar{P}_l(X)$. Остается доказать, что верно и $R_l(X) \supseteq \bar{P}_l(X)$.

Допустим, что последнее неверно, так что существует $x \in \bar{P}_l(X) \setminus R_l(X)$. Как показывает утверждение 1.1, для любого $y \in R_l(X)$ соотношение xRy выполняться не может. Пусть B – набор, полученный из A заменой произвольного объекта y на x . Поскольку A оптимален, то, согласно лемме, верно AR^lB , откуда следует, что должно выполняться xRy . Получено противоречие, так что (7) необходимо должно выполняться.

Для случая $|R_l(X)| > l$ доказательство соответствующего утверждения довольно громоздко, и поэтому мы его опускаем. Отметим лишь, что оно использует следующее вспомогательное утверждение. Пусть $|R_l(X)| = m$, где m – число классов эквивалентности l минимальных

по R объектов в $R_l(X)$, q – число объектов в наименьшем по численности таком классе; тогда $q \geq m - l + 1$.

Пусть $k < l$, $R_k(X) \subset R_l(X)$ и объект $x \in R_k(X)$ не включен в набор $A \in L$. Так как $|A| = l$ и $|R_k(X)| \leq l - 1$, то в наборе A найдется объект $a \notin R_k(X)$. Пусть B – набор, полученный из A заменой объекта a на объект x . Поскольку верно xNa или xPa , так что aRx неверно, то, согласно лемме, AR^lB неверно. Поэтому набор A не оптимален.

2.3. Пусть A – недоминируемый набор, так что для набора B , полученного в результате замены объекта $x \in A$ на объект $y \notin A$, неверно BP^lA , откуда следует, согласно лемме, что yPx неверно. Таким образом, yPx может быть выполнено только для объекта $y \in A$, т.е. не более чем для $l - 1$ объектов. Поэтому объект x является l -недоминируемым.

Предположим, что недоминируемый набор A не содержит объект $x \in P_l(X)$, так что в наборе A найдется объект y такой, что верно xPy . Но тогда для набора B , полученного из A заменой объекта y на объект x , должно выполняться BP^lA , что невозможно.

Утверждение о внешней устойчивости следует из общего результата о внешней устойчивости множества максимальных элементов для конечного множества, на котором задан строгий частичный порядок [17].

Пусть объекты $x \notin A$, $y \in A$ и верно xPy . Для набора B , полученного из набора A заменой y на x , верно BP^lA . Следовательно, набор A доминируемый.

Доказательство теоремы 2 закончено.

Пример 3. В условиях примера 1 имеется всего два недоминируемых набора – это $\{x^1, x^2\}$ и $\{x^2, x^4\}$. Каждый из указанных наборов состоит из 2-недоминируемых объектов и содержит единственный строго 2-оптимальный объект x^2 .

При формировании оптимальных или же недоминируемых наборов следует опираться на теорему 2 и учитывать свойства l -оптимальных и l -недоминируемых объектов. Прежде всего, согласно 2.3, из претендентов на роль l лучших объектов должны быть исключены все l -доминируемые объекты.

Если строго l -оптимальных объектов ровно l , то именно они составляют строго оптимальный набор, и только они должны считаться l лучшими объектами (утверждение 2.1). Условия существования строго оптимального набора

указывает также соответствующее утверждение из 2.2.

Если объектов в $R_l(X)$ больше, чем l и выполнены условия, указанные в утверждении 2.2 (справедливо равенство (7) и в множестве $R_l(X)$ существует наименьший по R объект), то оптимальный набор следует составить так. Вначале нужно взять из множества $R_l(X)$ все объекты, не являющиеся наименьшими (их не более $l-1$), а затем добавить недостающее до l число любых наименьших объектов (все наименьшие объекты безразличны между собой). Если же условия, указанные в утверждении 2.2, не выполнены, то оптимальный набор не существует.

Если оптимального набора нет, то из множества всех l -недоминируемых объектов можно выделить объекты, которые заведомо должны быть отнесены к числу l лучших, т.е. включены в состав строго оптимального или оптимального набора. Это – все объекты из множества $P_l(X) \cup R_k(X)$, где k – наибольшее число $k < l$ такое, что $R_k(X) \subset R_l(X)$. Таких объектов не более $l - 1$. Оставшиеся l -недоминируемые объекты являются лишь претендентами на роль l лучших.

Для обоснованного формирования (строго) оптимального набора необходимо, как уже указывалось выше, непротиворечиво расширить отношение R , получив дополнительную информацию и проверив ее непротиворечивость, и/или приняв дополнительные допущения о предпочтениях ЛПР и убедившись в их выполнении.

Пример 4. Пусть в условиях примера 1 получена дополнительная информация о соотношении по предпочтению объектов x^1 и x^4 . Если выяснилось, что x^1Px^4 , то объект x^1 становится строго 2-оптимальным, и единственным строго оптимальным набором будет $\{x^1, x^2\}$ (Рис. 3а). Если же оказалось, что, наоборот, x^4Px^1 , то объект x^4 становится строго 2-оптимальным, и единственным строго оптимальным набором будет $\{x^2, x^4\}$ (Рис. 3б). Наконец, если стало известно, что x^1Ix^4 , то оба объекта x^1 и x^4 становятся 2-оптимальными, оба набора $\{x^1, x^2\}$ и $\{x^2, x^4\}$ будут оптимальными, и в качестве решения задачи выбора двух лучших объектов можно взять любой из этих наборов (Рис. 3в).

Пусть теперь дополнительная информация касается объектов x^1 и x^2 . Если x^1Px^2 , то объект x^1 становится строго 2-оптимальным, и единственным строго оптимальным набором будет $\{x^1, x^2\}$ (Рис. 4а). Если же x^2Px^1 , то неопреде-

ленность выбора не уменьшается: оба набора $\{x^1, x^2\}$ и $\{x^2, x^4\}$ остаются недоминируемыми и несравнимыми (Рис. 4б). Наконец, если стало известно, что $x^1 I x^2$, то объект x^1 становится строго 2-оптимальным, и единственным строго оптимальным набором будет $\{x^1, x^2\}$ (Рис. 4в).

Пусть дополнительная информация касается 2-недоминируемого объекта x^3 и 2-доминируемого объекта x^4 . Если $x^3 P x^4$, то объект x^1

становится строго 2-оптимальным, и единственным строго оптимальным набором будет $\{x^1, x^2\}$ (Рис. 5а). Если же $x^4 P x^3$, то неопределенность выбора не уменьшается: оба набора $\{x^1, x^2\}$ и $\{x^2, x^4\}$ остаются недоминируемыми и несравнимыми (Рис. 4б). Наконец, если $x^3 I x^4$, то объект x^1 становится строго 2-оптимальным, и единственным строго оптимальным набором будет $\{x^1, x^2\}$ (Рис. 5в),

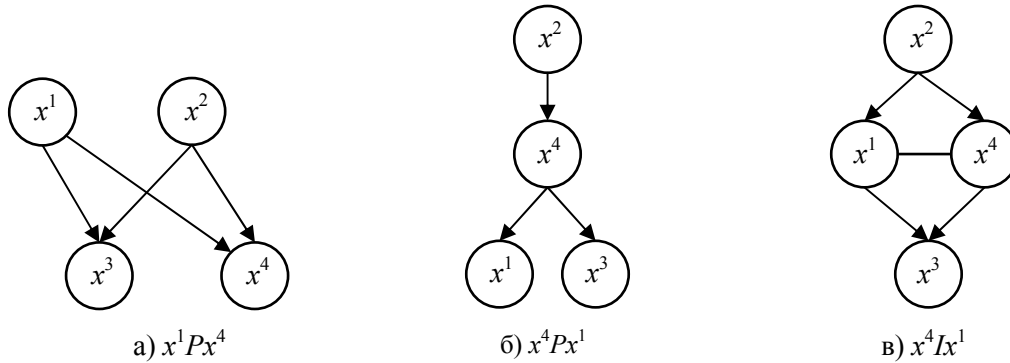


Рис. 3. Графы (транзитивные основы без петель) квазипорядков, полученных путем непротиворечивого расширения исходного отношения R за счет дополнительной информации – результатов сравнения по предпочтению пары объектов x^1 и x^4 .

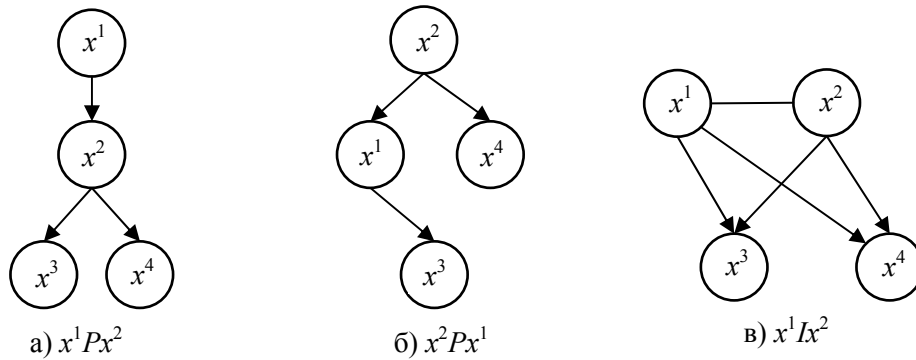


Рис. 4. Графы (транзитивные основы без петель) квазипорядков, полученных путем непротиворечивого расширения исходного отношения R за счет дополнительной информации – результатов сравнения по предпочтению пары объектов x^1 и x^2 .

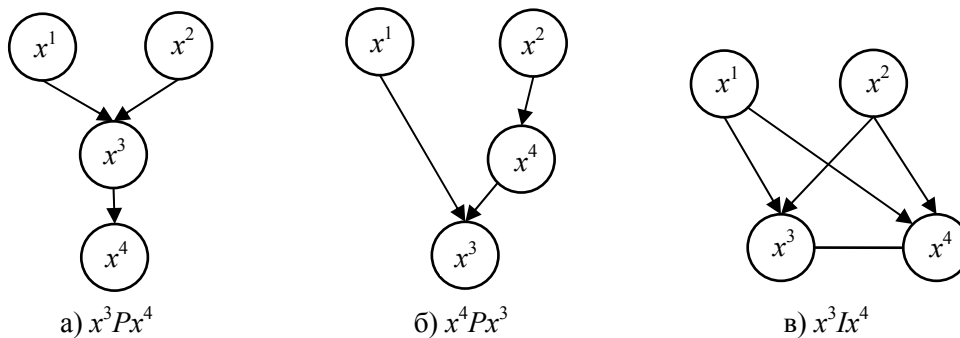


Рис. 5. Графы (транзитивные основы без петель) квазипорядков, полученных путем непротиворечивого расширения исходного отношения R за счет дополнительной информации – результатов сравнения по предпочтению пары объектов x^3 и x^4 .

Заключение

В статье дано развитие теории множественного выбора для задач, в которых требуется сформировать набор из заданного числа лучших объектов, причем не требуется упорядочивать их по предпочтительности, а отношение предпочтения на множестве всех объектов является частичным квазипорядком. Полученные результаты необходимо учитывать и при создании компьютерных систем поддержки принятия решений о выборе нескольких лучших объектов.

Актуальным направлением дальнейшего развития теории представляется исследование *задач множественного выбора и упорядочения* при неполной информации о предпочтениях, когда требуется сформировать набор из заданного числа лучших объектов и все эти объекты (или же только установленное число наилучших из них) ранжировать по предпочтительности.

Литература

- Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / Пер. с англ. – М.: Радио и связь. 1981.
- Штойер Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения / Пер. с англ. – М.: Радио и связь. 1992.
- Ларичев О.И. Вербальный анализ решений / Отв. ред. А.Б. Петровский – М.: Наука, 2006.
- Heiner R.A., Packard D.J. A uniqueness result for extending orders; with application to collective choice as inconsistency resolution // *Journal of economic theory*. 1984. V. 32. P. 180 – 184.
- Bossert W. On the extension of preferences over a set to the power set; an axiomatic characterization of a quasi-ordering // *Journal of economic theory*. 1989. V. 49. P. 84 – 92.
- Fishburn P.C., LaValle I.H. Binary interaction and subset choice // *European journal of operational research*. 1996. V. 92. P. 182 – 192.
- Юрлов Ф.Ф., Лапаев Д.Н., Плеханова А.Ф. Многокритериальная оценка и выбор решений в экономике: Учебное пособие. – Н. Новгород, НГТУ, 2006.
- Подinovский В.В. Об относительной важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений // *Многокритериальные задачи принятия решений* / Под ред. Д.М. Гвишиани и С.В. Емельянова. – М.: Машиностроение, 1978. С. 48 – 82.
- Подinovский В.В. Об оценке эффективности решающих правил в многокритериальных задачах // *Известия АН СССР. Техническая кибернетика*. 1987. № 1. С. 3 – 9.
- Барышников Ю.А., Подinovский В.В., Поляшук М.В. Эффективность решающих правил в многокритериальных задачах выбора нескольких объектов // *Автоматика и телемеханика*. 1990. № 12. С. 136 – 142.
- Подinovский В.В. Аксиоматическое решение проблемы оценки важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений // *Современное состояние теории исследования операций* / Под ред. Н.Н. Моисеева. – М.: Наука, 1979. – С.117 – 145.
- Подinovский В.В. Оценка эффективности решающих правил в дискретных многокритериальных задачах // *Методы оптимизации в экономико-математическом моделировании* / Под ред. Е.Г. Гольштейна. – М.: Наука, 1991. С. 324 – 336.
- Podinovski V.V. Efficiency estimation of decision rules in discrete multiobjective problems // *Modern mathematical methods of optimization* / К.-Н. Elster (Ed.). – Berlin: Akademie, 1993. P. 267 – 277.
- Меньшикова О.Р., Подinovский В.В. Построение отношения предпочтения и ядра в многокритериальных задачах с упорядоченными по важности неоднородными критериями // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1988. № 5. С. 647 – 659.
- Подinovский В.В. О задаче выбора нескольких лучших объектов при неполной информации о предпочтениях // *Информационные технологии моделирования и управления*. 2008. № 1 (44). С. 61 – 66.
- Подinovский В.В. Развитие теории и разработка методов множественного выбора при неполной информации о предпочтениях // *Материалы XXXV Международной конференции “Информационные технологии в науке, образовании, телекоммуникации и бизнесе”* (1 – 9 октября 2008 г., Гурзуф, Украина). Приложение к журналу “Открытое образование”. 2008. С. 37 – 39.
- Sen A.K. Collective choice and social welfare. – San Francisco: Holden Day, 1970.
- Подinovский В.В. Многокритериальные задачи с однородными равноценными критериями // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1975. № 2. С. 330 – 344.
- Озерной В.М., Гафт М.Г. Методология решения дискретных многокритериальных задач // *Многокритериальные задачи принятия решений* / Под ред. Д.М. Гвишиани и С.В. Емельянова. – М.: Машиностроение. 1978. С. 14 – 47.

Подinovский Владислав Владимирович. Профессор кафедры высшей математики на факультете экономики Высшей школы экономики (ГУ-ВШЭ), доктор технических наук. Печатных работ более 150, в том числе 7 монографий. Область научных интересов: теория принятия решений и ее приложения.