В.Д. Ногин

Сужение множества Парето на основе информации о предпочтениях ЛПР точечно-множественного типа [1]

Аннотация. В работе рассматривается модель многокритериального выбора, которая включает множество вариантов, числовой векторный критерий и асимметричное отношение предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР). Решением задачи многокритериального выбора является множество выбираемых вариантов. Предполагаются выполненными некоторые «разумные» аксиомы. При частично известном отношении предпочтения ЛПР, нельзя найти множество выбираемых вариантов, однако, можно получить некоторую оценку сверху для этого множества на основе имеющейся информации. Считается, что информация о предпочтениях ЛПР имеет точечно-множественный характер. Это означает, что ЛПР готово пойти на потери по некоторым конечным группам критериев ради получения выигрыша по какой-то другой группе критериев. Используя информацию о предпочтениях ЛПР, можно сформировать новый векторный критерий и построить сужение множества Парето, которое даёт более точную оценку для неизвестного множества выбираемых вариантов, чем исходное множество Парето.

Ключевые слова: множество Парето, многокритериальный выбор, компромисс, сужение множества Парето, аксиоматический подход.

Введение

Задачи выбора, содержащие несколько целевых функций (критериев), принято именовать многокритериальными. Подобные задачи нередко возникают во многих областях техники и экономики. Они образуют обширный класс, который интересен как с теоретической, так и с практической точек зрения. Природа задач многокритериального выбора сложна, поскольку в решении таких задач непосредственно участвует заинтересованное лицо (точнее, лицо, принимающее решение), преследующее свои собственные цели. Это трудно формализуемое обстоятельство не могло не породить огромное число самых различных подходов к решению указанных задач, разработанных к настоящему времени, попытка классификации которых была предпринята в статье [7].

Один из подходов, приспособленный к решению задач с числовыми критериями, активно развиваемый в нашей стране, заключается в постулировании так называемых аксиом «разумного» поведения ЛПР и последующем использовании информации о предпочтениях ЛПР [1-3]. Этот подход наиболее проработан в математическом плане и предполагает выявление информации, характеризующей согласие ЛПР идти на компромисс в процессе принятия решений. Самой простой информацией подобного рода является указание двух критериев и двух чисел, первое из которых отражает величину уступки по одному из критериев, на которую согласно пойти ЛПР, ради выигрыша по другому критерию на величину, равную второму числу (для простоты одну из указанных величин всегда можно считать равной единице). Выявление такой информации обычно не вызывает затруднений у ЛПР, а её учёт на основе специальных правил приводит к сокращению числа возможных вариантов выбора «наилучшего» решения, что облегчает последующий окончательный выбор.

Более общая ситуация возникает тогда, когда вместо двух критериев и двух чисел рассматриваются две группы критериев и два набора соответствующих чисел. В таком случае полученная от ЛПР информация характеризует

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 08-01-00301).

степень его готовности проявлять гибкость (идти на компромисс) при сопоставлении не двух критериев, а уже двух групп критериев. Здесь на данный момент также разработаны правила [3], на основе которых следует учитывать указанную информацию.

Наконец, в самом общем случае может быть несколько пар групп критериев подобного типа. Тем самым возникает потребность учёта набора такой информации о предпочтениях ЛПР. К сожалению, правил учёта произвольного конечного набора указанной информации к настоящему времени не существует (если заранее не предполагать конечность множества исходных вариантов). В [3] сформулирована проблема выпуклого анализа, к решению которой сводится построение правил учёта информации о предпочтениях ЛПР в общем случае, а также найдены такие правила для отдельных частных случаев «простых» конечных наборов информации.

В данной работе предполагается, что задан конечный набор информации о предпочтениях, который характеризует готовность ЛПР идти на компромисс при сопоставлении вариантов, теряя по нескольким группам критериев ради выигрыша по какой-то другой фиксированной группе критериев. Полученные результаты являются дальнейшим продвижением в указанном направлении и представляют собой правила учёта заданного набора информации. Применение этих правил заключается в формировании по определённым формулам нового векторного критерия и последующем удалении из числа исходных вариантов тех, которые лежат за пределами множества Парето относительно нового векторного критерия.

1. Постановка задачи. Аксиомы разумного выбора

Предметом рассмотрения данной статьи является *задача* (*модель*) *многокритериального выбора* $\langle X, f, \succ_X \rangle$, состоящая в следующем. Заданы:

X – множество возможных вариантов (решений), из которого следует осуществлять выбор; это непустое множество произвольной природы;

$f = (f_1, ..., f_m)$, $m \geq 2$ – векторный критерий, определенный на множестве X и принимающий числовые значения в арифметическом векторном пространстве R^m;

$\succ_X$ – асимметричное бинарное отношение строгого предпочтения ЛПР, определённое на множестве X; запись $x_1 \succ_X x_2$ для $x_1, x_2 \in X$ означает, что вариант x_1 для ЛПР предпочтительнее варианта x_2. Напомним, что бинарное отношение $\Re$, заданное на множестве A, называют асимметричным, если для любых $x, y \in A$ из $x \Re y$ следует, что $y \Re x$ является ложным.

Результатом решения задачи многокритериального выбора является подмножество множества возможных вариантов X, которое будем именовать *множеством выбираемых вариантов* и обозначать $C(X)$. В частном случае это множество может состоять из одного элемента. Всякая попытка строгого формального определения множества выбираемых вариантов является малопродуктивной, поскольку у каждого ЛПР это множество – свое собственное, и его формирование, как правило, зависит от большого числа самых различных условий и обстоятельств, которые не удаётся адекватно описать математически. В таких условиях представляется целесообразным лишь получение некоторой оценки сверху для неизвестного множества $C(X)$ при помощи неполных сведений об основных составляющих задачи многокритериального выбора [3,7]. В данной работе такая оценка будет получена на основе набора определённых сведений об отношении предпочтения ЛПР, характеризующих его готовность к некоторому компромиссу.

В дальнейшем будут также использоваться множество возможных векторов (векторных оценок) $Y = f(X) \subset R^m$ и множество выбираемых векторов $C(Y) = f(C(X))$. Будем считать, что на множестве возможных векторов Y задано отношение строгого предпочтения $\succ_Y$, которое согласовано с отношением $\succ_X$ следующим образом:

$$x_1 \succ_X x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \succ_Y f(x_2) \text{ для всех}$$
$$x_1 \in \tilde{x}_1, x_2 \in \tilde{x}_2;\ \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{X},$$

где $\tilde{X}$ – совокупность классов эквивалентности, порожденных отношением эквивалентности $x_1 \sim x_2 \ \Leftrightarrow\ f(x_1) = f(x_2)$ на множестве X.

Модель многокритериального выбора $\langle Y, \succ_Y \rangle$ в терминах векторных оценок включает множество возможных векторов Y и отношение строгого предпочтения $\succ_Y$, заданное на множестве Y, а решением задачи многокритериального выбора в таком случае является множество выбираемых векторов $C(Y)$. Между задачами выбора в терминах вариантов и в терминах их оценок имеется очевидная связь, которая даёт возможность любое высказывание, сформулированное в одних терминах, переформулировать в другие термины.

Перечислим в терминах векторов «разумные» требования к отношению предпочтения и множеству выбираемых векторов, которые при желании можно легко переформулировать и в терминах вариантов [4-6].

Аксиома 1 (аксиома исключения доминируемых векторов). *Для любой пары векторов* $y', y'' \in Y$, *удовлетворяющих соотношению* $y' \succ_Y y''$, *выполнено* $y'' \notin C(Y)$.

Смысл аксиомы 1 состоит в том, что всякий не выбираемый в паре вектор не должен выбираться и из всего множества векторов.

Напомним определения и обозначения множества парето-оптимальных векторов

$$P(Y) = \{y^* \quad Y | \text{не существует такого } y \quad Y, \text{ что } y \quad y^*\}$$

и парето-оптимальных вариантов

$$P_f(X) \quad \{x^* \quad X | \text{не существует такого } x \quad X, \text{ что } f(x) \quad f(x^*)\}.$$

Здесь запись $y' \geq y''$ означает, что каждая компонента первого вектора больше либо равна соответствующей компоненты второго вектора, причем $y' \neq y''$, т.е. по крайней мере одна компонента первого вектора строго больше соответствующей компоненты второго вектора.

Аксиома 2 (аксиома существования транзитивного продолжения). *Для отношения* $\succ_Y$ *существует иррефлексивное и транзитивное продолжение на декартово произведение* $\hat{Y} = f_1(X) \times \ldots \times f_m(X) \subset R^m$, *обозначаемое далее как* $\succ$.

В соответствии с аксиомой 2, отношение $\succ_Y$ является сужением отношения $\succ$ на множество Y и обладает свойствами иррефлексивности и транзитивности (а значит, и асимметричности). Смысл этой аксиомы заключается в том, что ЛПР в принципе может сравнивать любые (а не только возможные) векторные оценки, причём в ходе сравнения ЛПР должно вести себя «разумным» (т.е. транзитивным) образом.

Напомним, что критерий f_i называют согласованным с отношением предпочтения $\succ$, если для любых двух векторов $y', y'' \in \hat{Y}$, таких, что

$$y' = (y'_1, \ldots, y'_{i-1}, y'_i, y'_{i+1}, \ldots, y'_m),$$

$$y'' = (y'_1, \ldots, y'_{i-1}, y''_i, y'_{i+1}, \ldots, y'_m), \qquad y'_i > y''_i,$$

верно $y' \succ y''$. Иначе говоря, ЛПР заинтересовано в увеличении значения критерия, если этот критерий согласован с отношением предпочтения.

Аксиома 3 (аксиома согласования). *Каждый из критериев* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *согласован с отношением предпочтения* $\succ$.

Принцип Эджворта-Парето. *Пусть выполнены аксиомы* 1 – 3. *Тогда для любого множества выбираемых векторов* $C(Y)$ *имеет место включение* $C(Y) \subset P(Y)$.

Согласно этому принципу, ЛПР, осуществляющее свой выбор в соответствии с аксиомами 1-3, должно производить выбор «наилучших» вариантов только в пределах множества Парето. Иначе говоря, множество Парето является оценкой сверху для неизвестного множества выбираемых векторов. Установлено, что эта оценка точная и отказ от хотя бы одной из указанных выше аксиом может привести к тому, что выбираемый («лучший») вектор может оказаться за пределами множества Парето [5].

Если для пары векторов $y', y'' \in R^m$, не связанных друг с другом отношением $\geq$ (не сравнимых по данному отношению), один из указанных векторов оказывается предпочтительнее другого (имеет место $y' \succ y''$, либо $y'' \succ y'$), то тем самым задана определённая информация, которая может быть использована для указания более точной оценки сверху для множества выбираемых векторов $C(Y)$, чем множество Парето $P(Y)$. Тем самым множество Парето может быть сужено за счёт отбрасывания тех парето-оптимальных векторов, которые не соответствуют имеющейся информации об отношении предпочтения.

При решении прикладных задач нередко имеется набор информации подобного типа. А именно, заданы векторы $u^i, v^i \in R^m$ (обычно они выявляются в ходе непосредственного опроса ЛПР о его предпочтениях), не связанные друг с другом отношением $\geq$, но удовлетворяющие условию $u^i \succ v^i$, i=1,…, k. При наличии такого рода информации возникают два вопроса: является ли эта информация непротиворечивой и, если она непротиворечива, то каким образом, учитывая её, можно сузить множество Парето?

Что касается вопроса о непротиворечивости, то он полностью решён в [3]. Дано строгое определение непротиворечивого набора, а также получены критерии непротиворечивости, которые можно использовать при решении конкретных задач. Второй вопрос ещё не получил окончательного ответа. В общем случае выявлены лишь определённые простейшие наборы векторов, для которых выписаны соответствующие оценки сверху для неизвестного множества $C(Y)$ в виде некоторого множества Парето с новым векторным критерием [3].

Ниже формулируются утверждения, представляющие собой дальнейшие продвижения в указанном направлении. Чтобы получить более или менее существенное сокращение множества Парето за счёт учёта соотношения $u^i \succ v^i$ добавим ещё одну аксиому дополнительно к сформулированным выше.

Аксиома 4 (аксиома инвариантности). *Отношение предпочтения $\succ$ является инвариантным относительно линейного положительного преобразования, обладающего свойствами:*

однородности – из выполнения $u^i \succ v^i$ всегда следует $\lambda u^i \succ \lambda v^i$ для любого положительного числа λ;

аддитивности – из выполнения $u^i \succ v^i$ всегда следует $u^i + c \succ v^i + c$ для любого вектора $c \in R^m$.

Заметим, что соотношение $u^i \succ v^i$ в условиях аксиомы 4 равносильно $u^i - v^i \succ 0_m$, где 0_m обозначает m-мерный нулевой вектор (0,0,…,0). Тогда и вектор v^i в соотношении $u^i \succ v^i$ можно считать нулевым, что и принято далее. Укажем также, что при сравнениях иногда удобнее считать, что вектор v^i состоит из одних единиц. При желании, в силу инвариантности, и такое предположение всегда можно считать выполненным. Подобные замечания могут относиться и к вектору u^i.

Так как векторы u^i и 0_m не сравнимы по отношению $\geq$, то у вектора u^i обязательно найдётся хотя бы одна строго положительная и хотя бы одна строго отрицательная компоненты. При этом вектор u^i может иметь и нулевые компоненты. Тем самым выполнение соотношения $u^i \succ 0_m$ означает, что вектор u^i по некоторым компонентам «лучше» (т.е. больше) нулевого вектора 0_m, тогда как по другим компоненты он будет обязательно «хуже» (т.е. меньше) нулевого вектора. Выполнение соотношения $u^i \succ 0_m$ можно истолковать как способность ЛПР идти на определённый компромисс, т.е. готовность жертвовать по одним критериям ради получения добавок по каким-то другим критериям (при сохранении значений по всем остальным критериям).

2. Учет набора информации точечно-множественного типа

Рассмотрим ситуацию, когда имеется информация о предпочтениях ЛПР, согласно которой ради увеличения значений критериев группы A ЛПР готово пожертвовать значениями в двух других группах критериев B и C. Как показывает следующая теорема, подобного рода информация всегда непротиворечива, а её учёт сводится к формированию векторного критерия путём замены в «старом» векторном критерии всех компонент из групп B и C на «новые», вычисляемые по определённым формулам. При этом общее число компонент в образовавшемся «новом» векторном критерии может разве что увеличиться по сравнению с размерностью «старого» векторного критерия. Множество Парето, построенное относительно сформированного векторного критерия, даёт искомую оценку сверху для неизвестного множества выбираемых векторов. Все векторы за пределами этого множества Парето не должны оказаться выбранными, поскольку их выбор не согласуется с имеющейся информацией о предпочтениях ЛПР.

Теорема 1 (в терминах векторов). *Пусть выполнены аксиомы* 1–4, *заданы три попарно непересекающихся подмножества номеров критериев* $A, B, C \subset I = \{1,2,\ldots, m\}$ *и от ЛПР получена информация о том, что* $y' \succ 0_m$ *и* $y'' \succ 0_m$, *где векторы* y' *и* y'' *имеют следующие компоненты*

$y'_i = w'_i$ *для всех* $i \in A$; $y'_j = -w'_j$ *для всех* $j \in B$; $y'_s = 0$ *и всех* $s \in I \setminus (A \cup B)$,

$y''_i = w''_i$ *для всех* $i \in A$; $y''_k = -w''_k$ *для всех* $j \in C$; $y''_s = 0$ *и всех* $s \in I \setminus (A \cup C)$,

причём все w'_i, w'_j, w''_i, w''_j *– фиксированные положительные числа.*

Тогда указанная информация непротиворечива, и для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ *справедливы включения*

$$C(Y) \subset \hat{P}(Y) \subset P(Y), \qquad (1)$$

где $\hat{P}(Y) = f(P_g(X))$ *– подмножество возможных векторов, соответствующих множеству парето-оптимальных вариантов в многокритериальной задаче с множеством возможных вариантов* X *и новым* p*-мерным векторным критерием* g, *где* $p = m - |B| - |C| + |A| \cdot |B| + |A| \cdot |C| + |A| \cdot |B| \cdot |C|$, *имеющим компоненты*

$$\begin{aligned} &g'_{ij} = w'_j f_i + w'_i f_j \quad \text{для всех } i \in A, j \in B \\ &g''_{ik} = w''_k f_i + w''_i f_k \quad \text{для всех } i \in A, k \in C \\ &g_{ijk} = w'_j w''_k f_i + w'_i w''_k f_j + w'_j w''_i f_k \\ &\text{для всех } i \in A, j \in B, k \in C \\ &g_s = f_s \quad \text{для всех } s \in I \setminus (B \cup C). \end{aligned} \qquad (2)$$

В соответствии с теоремой 1, для того чтобы учесть набор информации о предпочтениях ЛПР, полученный в виде двух соотношений $y' \succ 0_m$ и $y'' \succ 0_m$ и сузить множество Парето, нужно сформировать новый векторный критерий g по формулам, приведенным в условиях теоремы, после чего построить множество Парето $P_g(X)$ относительно сформированного критерия. Множество векторов, отвечающих новому множеству Парето, т.е. $\hat{P}(Y) = f(P_g(X))$, и составит искомую оценку сверху для множества выбираемых векторов. Заметим, что теорема 1 носит универсальный характер: она верна для любых критериев f и произвольных множеств возможных решений X без каких-либо ограничений, поскольку на указанные объекты в формулировке этой теоремы никакие требования не накладываются.

Полученный результат можно переформулировать несколько иначе при помощи следующего вспомогательного утверждения.

Лемма. Пусть M – *совокупность всех линейных неотрицательных комбинаций набора векторов* $e^1, \ldots, e^m$, y', y'', *где* $e^1, \ldots, e^m$ *– единичные орты пространства* R^m, *а векторы* y', y'' *имеют тот же вид, что и в теореме 1. Включение* $y \in M$ *выполняется тогда и только тогда, когда имеют место неравенства:*

$$\min_{i \in A}\left[y_i + w'_i \min_{j \in B} \frac{y_j}{w'_j} + w''_i \min_{j \in C} \frac{y_k}{w''_k} \right] \geqq 0 \qquad (3)$$

$$\min_{i \in A} \frac{y_i}{w'_i} + \min_{j \in B} \frac{y_j}{w'_j} \geqq 0, \qquad (4)$$

$$\min_{i \in A} \frac{y_j}{w''_i} + \min_{k \in C} \frac{y_k}{w''_k} \geqq 0, \qquad (5)$$

$$y_s \geqq 0 \text{ для всех } s \in I \setminus (B \cup C). \qquad (6)$$

Из доказательства теоремы 1 и леммы вытекает

Следствие 1. *Пусть выполнены аксиомы* 1–4 *и имеется информация об отношении предпочтения из условий теоремы* 1. *Тогда для любого множества выбираемых векторов* $C(Y)$ *справедливо включение* $C(Y) \subset \widetilde{P}(Y) \cap P(Y)$, *в котором* $\widetilde{P}(Y) = f(P_h(X))$ *– подмножество возможных векторов, отвечающих множеству парето-оптимальных вариантов в многокритериальной задаче с множеством возможных вариантов* X *и новым* q*-мерным векторным критерием* h, *где* $q = (m - |B| - |C| + 3)$, *имеющим компоненты*

$$h' = \min_{i \in A}\left[f_i + w'_i \min_{j \in B} \frac{f_j}{w'_j} + w''_i \min_{j \in C} \frac{f_k}{w''_k} \right]$$

$$h'' = \min_{i \in A} \frac{f_i}{w'_i} + \min_{j \in B} \frac{f_j}{w'_j},$$

$$h''' = \min_{i \in A} \frac{f_i}{w''_i} + \min_{k \in C} \frac{f_k}{w''_k},$$

$$h_s = f_s \quad \text{для всех } s \in I \setminus (B \cup C).$$

Следует заметить, что в общем случае включение $\widetilde{P}(Y) \subset P(Y)$ места не имеет, поэтому в формулировке следствия 1 вместо (1) фигурирует включение $C(Y) \subset \widetilde{P}(Y) \cap P(Y)$. Правило использования результатов теоремы 1 и следствия 1 практически одно и то же. Отличие состоит в конкретном виде нового векторного критерия g (или h), с помощью которого должна формироваться оценка сверху $\hat{P}(Y)$ для множества выбираемых вариантов. В общем случае второй критерий h имеет меньшую размерность, чем g. Это, безусловно, несколько упрощает построение множества $\hat{P}(Y)$ на основе следствия 1, по сравнению с теоремой 1. Однако, как нетрудно проверить, из-за нелинейного вида функций h', h'', h''' следствие 1 можно применять лишь для критериев, значения которых измеряются в шкале отношений, тогда как теорему 1 можно использовать для более широкого класса – шкалы интервалов. Кроме того, линейная зависимость всех компонент нового векторного критерия g от компонент исходного критерия сохраняет, например, такие свойства, как линейность и дифференцируемость, чего нельзя сказать о компонентах h', h'', h'''.

Используя схему доказательства теоремы 1, при помощи аналогичных рассуждений можно установить её более общий вариант, когда ради увеличения значений по критериям группы А ЛПР готово пойти на уменьшение критериев уже не трёх, а целого набора групп $B_1, B_2, ..., B_k$. А именно, имеет место

Теорема 2 (в терминах векторов). *Пусть выполнены аксиомы 1–4, задан конечный набор* $k+1$ *попарно непересекающихся подмножеств номеров критериев* $A, B_1, B_2, ..., B_k \subset I = \{1,2,..., m\}$ *и от ЛПР получена информация о том, что* $y^s \succ 0_m$, $s = 1,...,k$, *где векторы* y^s (*для* $s = 1,...,k$) *имеют компоненты*

$$y_i^s = w_i^s \text{ для всех } i \in A;$$

$$y_j^s = -w_j^s \text{ для всех } j \in B_s;$$

$$y_j^s = 0 \quad \text{для всех } j \in I \setminus (A \cup B_s),$$

причём все w_i^s, w_j^s *– фиксированные положительные числа.*

Тогда указанная информация непротиворечива, и для любого множества выбираемых векторов C(Y) справедливы включения (1), в которых $\hat{P}(Y) = f(P_g(X))$ *– подмножество возможных векторов, соответствующих множеству парето-оптимальных вариантов в многокритериальной задаче с множеством возможных вариантов* X *и новым r-мерным векторным критерием* g, *где* $r = (m - \sum_{s=1}^{k}|B_s| + |A| \cdot \sum_{s=1}^{k}|B_s| + |A| \cdot \prod_{s=1}^{k}|B_s|)$, *имеющим компоненты*

$$g_{ij}^s = w_j^s f_i + w_i^s f_j$$

для всех $i \in A,\ j \in B_s$, s = 1,…,k

$$g_{ij_1\ldots j_k}^s = w_{j_1}^s \cdot \ldots \cdot w_{j_k}^s f_i +$$
$$+ w_i^s \cdot w_{j_2}^s \cdot \ldots \cdot w_{j_k}^s f_{j_1} + \ldots + w_i^s \cdot w_{j_1}^s \cdot \ldots \cdot w_{j_{k-1}}^s f_{j_k}$$

для всех $i \in A,\ j_s \in B_s$, s = 1,…,k

$$g_s = f_s \quad \text{для всех } s \in I \setminus \bigcup_{s=1}^{k} B_s .$$

В частном случае $|A| = |B_s| = 1,\ s = 1,2;\ k = 2$, теорема 2 превращается в теорему 4.2 из [3].

Аналогично теореме 1 может быть получен следующий результат, обобщающий следствие 1.

Следствие 2. *Пусть выполнены аксиомы 1–4 и имеется информация об отношении предпочтения из условий теоремы 2. Тогда для любого множества выбираемых векторов C(Y) справедливо включение* $C(Y) \subset \widetilde{P}(Y) \cap P(Y)$, *в котором* $\widetilde{P}(Y) = f(P_h(X))$ *– подмножество возможных векторов, отвечающих множеству парето-оптимальных вариантов в многокритериальной задаче с множеством возможных вариантов* X *и новым t-мерным векторным критерием* h, *где* $t = (m - \sum_{s=1}^{k}|B_s| + k + 1)$, *имеющим компоненты*

$$h' = \min_{i \in A}\left[f_i + w_i^1 \min_{j_1 \in B_1} \frac{f_{j_1}}{w_{j_1}^1} + \ldots + w_i^k \min_{j_k \in B_k} \frac{f_{j_k}}{w_{j_k}^k} \right],$$

$$h_1' = \min_{i \in A} \frac{f_i}{w_i^1} + \min_{j_1 \in B_1} \frac{f_{j_1}}{w_{j_1}^1},$$

…………………………..

$$h'_k = \min_{i \in A} \frac{f_i}{w_i^k} + \min_{j_k \in B_k} \frac{f_{j_k}}{w_{j_k}^k} ,$$

$$h_s = f_s \quad \text{для всех } s \in I \setminus \bigcup_{s=1}^{k} B_s .$$

Заключение

В работе представлено дальнейшее развитие аксиоматического подхода к решению проблемы сужения множества Парето на основе набора информации об отношении предпочтения ЛПР, развиваемого автором на протяжении последних 30 лет [7]. Отличительной особенностью этого подхода является принятие набора «разумных» аксиом, регламентирующих поведение ЛПР в процессе выбора и позволяющих использовать хорошо разработанный аппарат выпуклого анализа. При этом на множество возможных вариантов, из которого осуществляется выбор, а также на векторный критерий никаких ограничений не накладывается. В этом заключается универсальность данного подхода.

Основной результат – теорема 1 и её более общий вариант теорема 2, в которых указывается, каким образом после получения от ЛПР информации о его предпочтениях точечно-множественного типа следует «перестраивать» исходный векторный критерий для того, чтобы множество Парето относительно нового критерия служило оценкой сверху для любого неизвестного множества выбираемых оценок. Это новое множество Парето является частью «старого»; разницу между ними составляют те парето-оптимальные оценки, которые удаётся удалить из рассмотрения на основе указанной информации.

В дальнейшем предполагается рассмотреть в некотором смысле двойственный вариант, когда информация о предпочтениях ЛПР имеет множественно-точечный характер, т.е. когда ЛПР готово жертвовать оценками по какой-то одной фиксированной группе критериев ради увеличения значений сразу по некоторому конечному набору других групп критериев.

Приложение

Доказательство теоремы 1 разбито на пять этапов.

1^0. Сначала убедимся в непротиворечивости имеющейся информации. В соответствии с теоремой 4.7 из [3] данная информация непротиворечива тогда и только тогда, когда система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e^i + \lambda_{m+1} y' + \lambda_{m+2} y'' = 0_m \qquad (7)$$

относительно $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+2}$ не имеет ненулевых неотрицательных решений. Здесь e^i означает *m*-мерный вектор, у которого *i*-я компонента равна единице, а все остальные равны нулю. В развёрнутом виде система (7) принимает вид

$\lambda_i e^i + \lambda_{m+1} w'_i + \lambda_{m+2} w''_i = 0$ для всех $i \in A$,

$\lambda_j e^j - \lambda_{m+1} w'_j = 0$ для всех $j \in B$,

$\lambda_k e^k - \lambda_{m+2} w''_k = 0$ для всех $k \in C$,

$\lambda_l e^l = 0$ для всех $l \in I \setminus (A \cup B \cup C)$.

Из уравнений, записанных в первой строке, следуют равенства $\lambda_i = \lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} = 0$ для всех $i \in A$. В таком случае остальные уравнения влекут равенства $\lambda_j = 0$ для всех остальных номеров $j \in I \setminus A$. Следовательно, система (7) в качестве неотрицательного имеет только нулевое решение. Тем самым, непротиворечивость имеющейся информации $y' \succ 0_m$, $y'' \succ 0_m$ установлена.

2^0. Символом K обозначим острый выпуклый конус (без нуля) конусного отношения $\succ$. Тот факт, что K действительно является острым и выпуклым конусом, вытекает из аксиом 2 – 4 и следствия 2.1 [3].

Через M обозначим острый выпуклый конус (без нуля), порожденный векторами $e^1, \ldots, e^m, y', y''$. Конус M – острый в силу теоремы 4.6 [3] и установленной выше непротиворечивости заданной информации.

Возможны два случая: $|A|>1$ и $|A|=1$. В первом случае образующими конуса M являются все векторы $e^1,e^2,...,e^m,y',y''$, поскольку ни один из этих векторов нельзя представить в виде линейной неотрицательной комбинации остальных векторов этого набора (так как порождаемый ими конус M является острым). Во втором случае (т.е. тогда, когда $A=\{i\}$) вектор e^i, очевидно, можно представить в виде линейной положительной комбинации вектора y' и всех векторов e^s при $s\in B$. Значит, во втором случае образующими конуса M являются векторы $e^1,e^2,...,e^m,y',y''$ без вектора e^i. Далее сначала рассматривается первый случай $|A|>1$, затем - второй.

Введем двойственный конус (без нуля) по отношению к многогранному конусу M

$$C=\{y\in R^m \mid \langle u,y\rangle \geqq 0$$
$$\text{для всех } u\in M\}\setminus\{0_m\}.$$

На основании теории двойственности выпуклого анализа ([9], с.175) образующими многогранного конуса C являются внутренние нормали к $(m-1)$-мерным граням конуса M, и обратно: образующими конуса M служат внутренние нормали к $(m-1)$-мерным граням конуса C.

Так как образующими конуса M являются векторы $e^1,e^2,...,e^m,y',y''$, то множество ненулевых решений системы линейных неравенств

$$\langle e^i,y\rangle \geqq 0 \text{ для всех } i\in I,$$
$$\langle y',y\rangle \geqq 0, \qquad (8)$$
$$\langle y'',y\rangle \geqq 0$$

совпадает с двойственным конусом C.

3^0. Найдем фундаментальную совокупность решений системы линейных неравенств (8). Это должна быть такая система векторов, множество линейных неотрицательных комбинаций которой в точности совпадает с множеством решений системы (8). При этом ни один вектор фундаментальной совокупности невозможно представить в виде линейной неотрицательной комбинации остальных векторов этой совокупности.

Укажем некоторый набор решений системы линейных неравенств (8). Прежде всего, заметим, что каждый единичный орт e^s пространства R^m при $s\in I\setminus(B\cup C)$ является решением (8). Далее, введем векторы

$$e^{ij}=w'_j e^i + w'_i e^j \text{ для всех } i\in A \text{ и всех } j\in B.$$

Компоненты этих векторов неотрицательны, и потому все они удовлетворяют неравенствам (8), записанных в первой строке. Они удовлетворяют и неравенству $\langle y',y\rangle \geqq 0$ из второй строки системы (8), так как

$$\langle y',e^{ij}\rangle = y'_i w'_j + y'_j w'_i = 0$$
$$\text{для всех } i\in A \text{ и всех } j\in B.$$

Наконец, очевидно, данные векторы удовлетворяют и неравенству, записанному в третьей строке (8).

Аналогично можно убедиться, что векторы

$$\hat{e}^{ij}=w''_k e^i + w''_i e^k \text{ для всех } i\in A \text{ и всех } k\in C$$

удовлетворяют системе (8).

Кроме того, векторы $e^{ijk}=w'_j w''_k e^i + w'_i w''_k e^j + w'_j w''_i e^k$ для всех $i\in A, j\in B, k\in C$ также удовлетворяют системе (8), причём неравенства из второй и третьей строк выполняются как равенства.

Таким образом, набор (обозначим его (*)), состоящий из векторов e^s для всех $s\in I\setminus(B\cup C)$, векторов e^{ij} для всех $i\in A$ и $j\in B$, векторов $\hat{e}^{ik}$ для всех $i\in A$ и $k\in C$, а также векторов e^{ijk} для всех $i\in A, j\in B, k\in C$, принадлежит двойственному конусу C. При этом, как нетрудно видеть, ни один из векторов этой совокупности невозможно представить в виде линейной неотрицательной комбинации остальных векторов. Общее число p всех векторов указанного набора равно $p=m-|B|-|C|+|A|\cdot|B|+|A|\cdot|C|+|A|\cdot|B|\cdot|C|$.

Для того чтобы проверить, что указанный набор векторов образует фундаментальную совокупность решений системы (8), остается убедиться в том, что система линейных неравенств (8) не имеет никаких других (с точностью до положительного множителя) решений, кроме всевозможных линейных неотрицательных комбинаций векторов указанного выше набора

(*). С этой целью наряду с системой (8) рассмотрим соответствующую ей систему из $m+2$ линейных уравнений

$$\begin{aligned} &\langle e^i, y\rangle = 0 \text{ для всех } i \in I, \\ &\langle y', y\rangle = 0, \\ &\langle y'', y\rangle = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Вычисляя ранги соответствующих матриц, можно проверить, что любая подсистема из $m-1$ векторов системы $e^1, e^2, ..., e^m, y', y''$ является линейно независимой. Следовательно, искомая фундаментальная совокупность решений системы линейных неравенств (8) содержится среди (одномерных) ненулевых решений подсистем из $m-1$ уравнений системы линейных уравнений (9).

Будем удалять из системы (9) по три уравнения и выписывать решения получающихся в результате такого удаления подсистем, удовлетворяющие, кроме того, системе неравенств (8). Найденные таким образом векторы и составят требуемую фундаментальную совокупность решений системы неравенств (8).

Если в число удаляемых входят последние два уравнения системы (9), то ненулевыми решениями получающихся подсистем будут служить (с точностью до положительного множителя), единичные орты $e^1, e^2, ..., e^m$. Однако, как легко видеть, из этого набора лишь те векторы e^s, для которых $s \in I \setminus (B \cup C)$, удовлетворяют системе неравенств (8).

Если последнее уравнение системы линейных уравнений (9) не удаляется, а предпоследнее удаляется, то ненулевыми решениями получающихся подсистем будут являться (с точностью до положительного множителя) векторы $\hat{e}^{ik}$ для всех $i \in A$ и всех $k \in C$. Все эти векторы, как было установлено ранее, удовлетворяют системе неравенств (8).

Аналогично, если остаётся предпоследнее уравнение из (9), а последнее исключается, то в качестве решений получающихся подсистем можно взять векторы e^{ij} для всех $i \in A$ и всех $j \in B$, которые удовлетворяют системе неравенств (8).

В случае, когда оба последних уравнения остаются в подсистеме, приходим к решениям вида e^{ijk} для всех $i \in A, j \in B, k \in C$.

Поскольку все возможные варианты удаления троек уравнений из системы линейных уравнений (9) рассмотрены, никаких других (с точностью до положительного множителя) решений подсистем из $m-2$ уравнений системы (9), удовлетворяющих (8), не существует. Это означает, что система векторов (*) образует фундаментальную совокупность решений системы линейных неравенств (8). Следовательно, любое решение системы неравенств (8) может быть представлено в виде неотрицательной линейной комбинации этой совокупности векторов. Далее для удобства о будем означать эту совокупность следующим образом $a^1, a^2, ..., a^p$.

В случае $|A| = 1$ (т.е. $A = \{i\}$), рассуждения аналогичны, но несколько проще приведенных выше. В этом случае следует рассмотреть систему из m+1 уравнений, которая отличается от (9) отсутствием уравнения $\langle e^i, y\rangle = 0$. Здесь следует удалять лишь два уравнения, чтобы получить ту же самую фундаментальную совокупность решений системы линейных неравенств (8).

4^0. Итак, в силу доказанного выше, множество решений системы линейных неравенств (8), т.е. конус C (вместе с нулем), совпадает с множеством всех неотрицательных линейных комбинаций векторов $a^1, a^2, ..., a^p$. Поэтому включение $u \in C$ для вектора u имеет место тогда и только тогда, когда этот вектор можно представить в виде некоторой ненулевой линейной неотрицательной комбинации векторов указанного набора.

Благодаря последнему обстоятельству, неравенство

$$\langle u, y\rangle \geqq 0 \text{ для всех } u \in C \tag{10}$$

для произвольного фиксированного вектора $y \neq 0_m$ оказывается эквивалентным неравенству

$$\langle a^i, y\rangle \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., p, \tag{11}$$

где, знак $\geq$ указывает, что хотя бы для одного $i \in \{1, 2, ..., p\}$ неравенство строгое. В самом деле, если вектор y удовлетворяет неравенствам (11), то поскольку всякий вектор $u \in C$ можно представить в виде некоторой ненулевой линейной неотрицательной комбинации векторов $a^1, a^2, ..., a^p$, например,

$z=\lambda_1 a^1+\lambda_2 a^2+\ldots+\lambda_p a^p$, то, умножая неравенства (11) на соответствующие одновременно не равные нулю неотрицательные числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$ и, почленно складывая полученные таким образом неравенства, придем к неравенству

$$\left\langle \sum_{i=1}^{p}\lambda_i a^i , y\right\rangle=\langle u,y\rangle \geqq 0$$

из (10). Обратно, из (10) вытекает (11), так как $a^i \in C$ для всех $i=1,2,\ldots,p$. При этом одновременно все неравенства (11) как равенства выполняться не могут. В самом деле, если для ненулевого вектора y неравенства (11) выполняются как равенства, то эти же неравенства будут иметь место и для противоположного вектора $-y$. Отсюда следует, что конус, двойственный по отношению к C , не является острым. Но этот двойственный конус есть

$$M \quad \{y \quad R^m \mid u,y \geqq 0 \text{ для всех } u\in C\}\setminus\{0_m\},$$

так как C является двойственным по отношению к конусу M . Тем самым приходим к противоречию – конус M не является острым. Полученное противоречие означает, что для ненулевого вектора y одновременно все неравенства (11) действительно выполняться как равенства не могут. Заметим, что в случае многогранного конуса M двойственным по отношению к двойственному конусу C является исходный конус M [8].

На основании установленной эквивалентности неравенств (8) и (11) заключаем, что включение $y\in M$ имеют место тогда и только тогда, когда справедливы неравенства (11), и поэтому

$$y\in M \Leftrightarrow \langle a^i,y\rangle \geq 0\ ,\ i=1,2,\ldots,p\ .$$

Завершающий пятый этап доказательства теоремы проводится точно так же, как в доказательстве теоремы 3.5 [3]; поэтому здесь он не приводится.

Доказательство леммы 1. По определению конуса M включение $y\in M$ имеет место тогда и только тогда, когда существует такой вектор $(\lambda_1,\ldots,\lambda_m,\lambda_{m+1},\lambda_{m+2})$ с неотрицательными компонентами, что $y=\sum_{i=1}^{m}e^i\lambda_i+\lambda_{m+1}y'+\lambda_{m+2}y''$, или в подробной записи

$$\begin{aligned}
&y_i=\lambda_i+w_i'\lambda_{m+1}+w_i''\lambda_{m+2} \text{ для всех } i\in A,\\
&y_j=\lambda_j-w_j'\lambda_{m+1} \text{ для всех } j\in B,\\
&y_k=\lambda_k-w_k''\lambda_{m+2} \text{ для всех } k\in C,\\
&y_s=\lambda_s \text{ для всех } s\in I\setminus(A\cup B\cup C).
\end{aligned}$$

Необходимость. Пусть $y\in M$, а значит при некоторых неотрицательных $\lambda_1,\ldots,\lambda_{m+2}$ верны равенства (12). Следует установить, что имеют место неравенства (3)–(6).

Если $\lambda_{m+1}=\lambda_{m+2}=0$, то благодаря неотрицательности чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ вектор y также состоит из неотрицательных компонент. Для такого вектора y неравенства (3)–(6) выполняются очевидным образом.

Пусть $\lambda_{m+1}>0,\lambda_{m+2}>0$. В этом случае неравенство (6) сразу следует из первого и последнего равенств системы (12). Поэтому для завершения доказательства необходимости остаётся проверить справедливость неравенств (3)–(5).

Систему (12) перепишем в эквивалентном виде

$$\begin{aligned}
&\frac{y_i}{w_i'}=\frac{\lambda_i}{w_i'}+\lambda_{m+1}+\lambda_{m+2}\frac{w_i''}{w_i'} \text{ для всех } i\in A,\\
&\frac{y_j}{w_j'}=\frac{\lambda_j}{w_j'}-\lambda_{m+1} \text{ для всех } j\in B,\\
&\frac{y_k}{w_k''}=\frac{\lambda_k}{w_k''}-\lambda_{m+2} \text{ для всех } k\in C,\\
&y_s=\lambda_s \text{ для всех } s\in I\setminus(A\cup B\cup C).
\end{aligned} \qquad (12^/)$$

При подстановке чисел λ_{m+1} и λ_{m+2}, выраженных из второго и третьего равенств системы ($12^/$), в первое с учетом неотрицательности всех $\lambda_i,\lambda_j,\lambda_k$, получаем неравенство

$$\frac{y_i}{w_i'}\geqq-\frac{y_j}{w_j''}-\frac{w_i''}{w_i'}\frac{y_k}{w_k''}$$

$$\text{для всех } i\in A,\ j\in B,\ k\in C.$$

Следовательно, можно написать

$$\frac{y_i}{w_i'}\geqq\max_{j\in B}\left(-\frac{y_j}{w_j'}\right)+\frac{w_i''}{w_i'}\max_{k\in C}\left(-\frac{y_k}{w_k''}\right)=$$

$$=-\min_{j\in B}\frac{y_j}{w_j'}-\frac{w_i''}{w_i'}\min_{k\in C}\frac{y_k}{w_k''}.$$

Так как полученное неравенство верно для любых номеров $i \in A$, то из него немедленно вытекает неравенство (3).

Подстановка числа λ_{m+1}, выраженного из второго равенства системы (10), в первое вместе с условием неотрицательности $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_{m+2}$ ведёт к неравенству

$$\frac{y_i}{w'_i} = \frac{\lambda_i}{w'_i} + \frac{\lambda_j}{w'_j} - \frac{y_j}{w''_j} + \lambda_{m+2}\frac{w''_i}{w'_i} \geqq -\frac{y_j}{w'_j}$$

для всех $i \in A$, $j \in B$.

Отсюда, благодаря произвольности номеров i и j, нетрудно вывести неравенство (4).

При аналогичной подстановке числа λ_{m+2}, выраженного из третьего равенства (12), в первое равенство (10) получается неравенство (5).

Пусть теперь $\lambda_{m+1} > 0$ и $\lambda_{m+2} = 0$. Из первого и последнего равенств (12) благодаря неотрицательности чисел λ_i, λ_s получаем (6). Подстановка числа λ_{m+1}, выраженного из второго равенства (12) (или $12^{/}$) в первое равенство этой системы с учётом неотрицательности чисел λ_i, λ_j приводит к неравенству (4). Подстановка нулевой разности $\dfrac{\lambda_k}{w''_k} - \dfrac{y_k}{w''_k}$ (т.е. третьего равенства ($12^{/}$)) в первое равенство ($12^{/}$) даёт

$$\frac{y_i}{w'_i} = \frac{\lambda_i}{w'_i} + \lambda_{m+1}\frac{w_i}{w'_i}\frac{\lambda_k}{w''_k} - \frac{w''_i}{w'_i}\frac{y_k}{w''_k}.$$

Как и ранее, учитывая здесь неотрицательность чисел $\lambda_i, \lambda_k, \lambda_{m+1}$ и переходя к максимуму по k, а затем к минимуму по i, получим неравенство (5). Аналогично, подстановка этой же нулевой разности и величины λ_{m+1}, выраженной из второго равенства ($10^{/}$), в первое равенство ($12^{/}$) с учётом неотрицательности $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k$ ведёт к неравенству (3).

Проводя точно такие же рассуждения для случая $\lambda_{m+1} = 0$, $\lambda_{m+2} > 0$, нетрудно убедится в справедливости неравенств (3) – (6). Действительно, из первого и последнего равенств (12) в силу неотрицательности чисел λ_i, λ_s получаем неравенство (6). Подстановка нулевой разности $\dfrac{\lambda_j}{w'_j} - \dfrac{y_j}{w'_j}$ (т. е. второго равенства ($12^{/}$)) в первое равенство системы ($12^{/}$) приводит к неравенству (4). При подстановке числа λ_{m+2}, выраженного из третьего равенства ($12^{/}$), в первое равенство этой системы, получаем неравенство (5). Наконец, подстановка в первое равенство ($12^{/}$) той же нулевой разности и λ_{m+2} (соответственно из второго и третьего равенств ($12^{/}$)) вместе с условием неотрицательности всех чисел $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k$ доказывает справедливость неравенства (3).

Достаточность. Пусть произвольный вектор y удовлетворяет неравенствам (3) – (6). Нужно установить справедливость для него равенств ($12^{/}$). Сразу заметим, что благодаря (6) для любого $i \in A$ выполнено $y_i \geqq 0$.

Зафиксируем произвольный номер $i \in A$. Индексы $j \in B$ и $k \in C$ выберем так, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{y_s}{w'_s} \geqq \frac{y_j}{w'_j} \text{ для всех } s \in B,$$

$$\frac{y_s}{w''_s} \geqq \frac{y_k}{w''_k} \text{ для всех } s \in C.$$

Из неравенств (3) – (5) следует существование таких неотрицательных чисел $\lambda_{ijk}, \lambda'_j, \lambda'_k$, что имеют место равенства

$$y_i = \lambda_i + w'_i\frac{y_j}{w'_j} + w_i\frac{y_k}{w''_k} = \lambda_{ijk}, \qquad (3^{/})$$

$$y_i + w'_i\frac{y_j}{w'_j} = \lambda'_j, \qquad (4^{/})$$

$$y_i + w''_i\frac{y_k}{w'_k} = \lambda'_k. \qquad (5^{/})$$

Далее доказательство проводится в зависимости от знаков величин y_j, y_k. Если $y_j, y_k \geqq 0$, то из (13) следует $y_s \geqq 0$ для всех $s \in B$ и всех $s \in C$, поэтому равенства ($10^{/}$) тривиально выполняются при $\lambda_i = y_i$, $\lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} = 0$, а также при неотрицательных $\lambda_s = y_s$ для всех $s \in B$ и всех $s \in C$.

Пусть $y_j < 0$, $y_k \geqq 0$. Тогда, благодаря второй группе неравенств (13), имеем $y_s \geqq 0$ для всех $s \in C$. Далее, как легко проверить, первое из равенств ($12^{/}$) вытекает из ($4^{/}$) с учётом того, что $\lambda_i = \lambda'_j$, $\lambda_{m+1} = -{y_j}/{w'_j}$, $\lambda_{m+2} = 0$. При этом второе и третье из равенств ($12^{/}$) также выполняются при указанных выше коэффициентах $\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}$ вместе с неотрицательными числами $\lambda_s = w'_s\left({y_s}/{w'_s} - {y_j}/{w'_j}\right)$ для всех $s \in B$ и $\lambda_s = y_s$ для всех $s \in C$.

Совершенно аналогично разбирается случай $y_k < 0$, $y_j \geqq 0$.

Остаётся рассмотреть вариант, когда верно $y_j < 0, y_k < 0$. Первое из равенств ($12^{/}$) вытекает из ($3^{/}$) при неотрицательных коэффициентах $\lambda_i = \lambda_{ijk}$, $\lambda_{m+1} = -{y_j}/{w'_j}$, $\lambda_{m+2} = -{y_k}/{w''_k}$, а остальные также очевидным образом выполняются при неотрицательных $\lambda_s = w'_s\left({y_s}/{w'_s} - {y_j}/{w'_j}\right)$ для всех $s \in B$ и неотрицательных $\lambda_s = w''_s\left({y_s}/{w''_s} - {y_k}/{w''_k}\right)$ для всех $s \in C$.

В силу произвольности выбора номера i доказательство леммы завершено.

Литература

1. Ногин В.Д. Логическое обоснование принципа Эджворта-Парето// Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2002, т. 42, № 7, С. 950-956.
2. Ногин В.Д. Принцип Эджворта-Парето и относительная важность критериев в случае нечёткого отношения предпочтения// Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2003, т. 43, № 11, С. 1676-1686.
3. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход (2-е изд., испр. и доп.). М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005, 176 с.
4. Ногин В.Д. Обобщённый принцип Эджворта-Парето и границы его применимости// Экономика и математические методы. – 2005, т. 41, № 3, С. 128-134.
5. Ногин В.Д. Принцип Эджворта-Парето в терминах нечёткой функции выбора// Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006, т. 46, № 4, С. 582-591.
6. Ногин В.Д., Волкова Н.А. Эволюция принципа Эджворта-Парето// Таврический вестник информатики и математики. – 2006, № 1, С. 21-33.
7. Ногин В.Д. Проблемы сужения множества Парето: подходы к решению// Искусственный интеллект и принятие решений. – 2008, № 1, С. 98-112.
8. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М: Мир, 1973, 471 с.
9. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. Т. 1. М.: Мир, 1991, 360 с.

Ногин Владимир Дмитриевич. Профессор кафедры теории управления факультета прикладной математики-процессов управления (ПМ-ПУ) Санкт-Петербургского государственного университета. Окончил Ленинградский государственный университет в 1971 году. Доктор физико-математических наук, профессор. Действительный член Международной академии наук высшей школы. Автор около 120 печатных трудов, среди которых 2 монографии и ряд учебных пособий. Область научных интересов – принятие решений при многих критериях, многокритериальная оптимизация.