

Сужение множества Парето на основе наборов взаимно зависимой информации о нечетком отношении предпочтения¹

Аннотация. Рассматривается задача многокритериального выбора с нечетким отношением предпочтения лица, принимающего решение. Показано, как можно построить более точную оценку для неизвестного множества выбираемых решений, чем множество Парето, используя взаимно зависимую информацию об относительной важности двух групп критериев.

Ключевые слова: многокритериальное принятие решений, множество Парето, сужение множества Парето, взаимно зависимая информация, нечеткое отношение предпочтения.

Введение

Задачи выбора наилучшего решения из множества возможных вариантов возникают в самых различных сферах: экономике, технике, производстве, экологии и т.д. Поэтому изучение проблемы оптимального выбора представляет собой не только теоретический, но и практический интерес.

Нередко имеющиеся альтернативы приходится оценивать сразу по нескольким количественным критериям. В этом случае возникают многокритериальные задачи, в которых, как правило, невозможно достичь наилучших значений по всем критериям одновременно. По этой причине лицо, принимающее решение (ЛПР), вынуждено идти на определенный компромисс. В частности, ради получения выигрыша по одним критериям ЛПР может пойти на потери по другим критериям. Другими словами, в процессе принятия решения происходит выявление некоторой количественной информации об относительной важности (предпочтительности) критериев.

Аксиоматический подход, в основе которого лежит использование информации указанного типа, активно разрабатывается последние три десятилетия [3-5] и заключается в следующем. Если поведение ЛПР подчиняется так называемым аксиомам «разумного» выбора и задан некоторый набор информации об относительной важности критериев, то может быть построено множество, представляющее собой более точную оценку сверху для неизвестного множества выбираемых решений, чем множество Парето. Таким образом, полученная дополнительная информация о предпочтениях ЛПР позволяет сузить область поиска наилучшего решения и, тем самым, облегчить последующий выбор.

Другая сложность в задачах выбора состоит в том, что на практике очень часто информация о предпочтениях ЛПР имеет расплывчатый, нечеткий характер: ЛПР может лишь с определенной степенью уверенности отдать предпочтение одной векторной оценке вариантов по сравнению с другой. В таких случаях удобным оказывается аппарат теории нечетких множеств и отношений.

¹ Работа поддержана проектом РФФИ № 08-01-00301.

Особый интерес представляют задачи, в которых информация об относительной важности, представляет собой набор взаимно зависимой информации (см. [5]). Простейшим примером подобной информации является случай, когда один критерий важнее другого, а тот в свою очередь важнее третьего.

Задачи многокритериального выбора с набором взаимно зависимой информации о четком отношении предпочтения частично были изучены в [2],[5]. В данной статье результаты этих работ распространяются на случай нечеткого отношения предпочтения ЛПР. Последовательно рассматриваются две различные задачи с определенным набором взаимно зависимой информации и указывается, как следует производить учет такой информации с целью сужения множества Парето. Полученные результаты иллюстрируются примером.

1. Основные понятия и предположения

Задача нечеткого многокритериального выбора включает следующие элементы: множество возможных решений X , векторный критерий f и нечеткое отношение предпочтения. Множество X представляет собой набор вариантов, среди которых необходимо осуществить выбор. Векторный критерий $f = (f_1, \dots, f_m) \in R^m$, $m \geq 2$ состоит из числовых функций, с помощью которых осуществляется оценка возможных решений. Нечеткое отношение предпочтения характеризуется своей функцией принадлежности $\mu_X(\cdot, \cdot)$, заданной на декартовом произведении $X \times X$ и принимающей значения из отрезка $[0, 1]$. Запись $\mu_X(x', x'') = \mu^*$ для произвольных $x', x'' \in X$ означает, что для ЛПР x' предпочтительнее x'' со степенью уверенности $\mu^* \in [0, 1]$. Если $\mu_X(x', x'') = 1$, то нечеткое отношение превращается в четкое. Решением задачи нечеткого многокритериального выбора является нечеткое множество выбираемых решений $C(X)$ с функцией принадлежности $\lambda_X^C(\cdot)$.

В терминах векторных оценок задача нечеткого многокритериального выбора включает множество возможных векторов $Y = f(X) \subset R^m$ и нечеткое отношение предпочтения с функцией принадлежности $\mu_Y(\cdot, \cdot)$, заданной на декартовом произведении $Y \times Y$ и принимающей значения в пределах отрезка $[0, 1]$. Функция принадлежности $\mu_Y(\cdot, \cdot)$ индуцируется функцией принадлежности $\mu_X(\cdot, \cdot)$ следующим образом:

$$\mu_Y(y', y'') = \mu_X(x', x''), \text{ если } y' = f(x'), y'' = f(x''), x', x'' \in X.$$

И наоборот, функция принадлежности $\mu_Y(\cdot, \cdot)$ индуцирует функцию принадлежности $\mu_X(\cdot, \cdot)$. Решением задачи нечеткого многокритериального выбора (в терминах векторов) является нечеткое множество выбираемых векторов с функцией принадлежности

$$\lambda_Y^C(y) = \begin{cases} \lambda_X^C(x), & \text{если } y = f(x) \text{ при } x \in X, \\ 0, & \text{если } y \in R^m \setminus Y \end{cases}.$$

Будем предполагать, что поведение ЛПР в ходе принятия решения «разумно». С математической точки зрения, «разумность» заключается в выполнении следующих аксиом [1], [4].

Аксиома 1. Для любой пары решений $x', x'' \in X$, удовлетворяющих соотношению $\mu_X(x', x'') = \mu^* \in [0, 1]$, справедливо неравенство $\lambda_X^C(x'') \leq 1 - \mu^*$.

Смысл аксиомы 1 заключается в следующем. Если ЛПР, выбирая между вариантами x' и x'' , отдает предпочтение решению x' со степенью уверенности μ^* , то степень принадлежности варианта x'' множеству выбираемых решений не превосходит значения $1 - \mu^*$.

Аксиома 2. Нечеткое отношение предпочтения с функцией принадлежности $\mu(\cdot, \cdot)$, сужение которого на множестве Y совпадает с отношением $\mu_Y(\cdot, \cdot)$, является иррефлексивным и транзитивным.

Аксиома 3. Каждый из критериев $f_1, f_2, \dots, f_m$ согласован с отношением предпочтения $\succ$.

Согласованность означает заинтересованность ЛПР в получении максимальных значений по каждому из критериев.

Выполнение аксиом 1-3 гарантирует справедливость включения $C(X) \subset P_f(X)$, которое выражает нечеткий принцип Эджворта-Парето [4]. На языке функций принадлежности данное включение может быть записано в виде неравенства $\lambda_X^C(\cdot) \leq \lambda_X^P(\cdot)$.

Аксиома 4. Нечеткое отношение предпочтения с функцией принадлежности $\mu(\cdot, \cdot)$ задано на критериальном пространстве R^m и является инвариантным относительно положительного линейного преобразования.

Отметим, что выполнение аксиомы 1 гарантирует справедливость $\lambda_X^C(x) \leq \lambda_X^N(x)$ для всех $x \in X$ [4], где $\lambda_X^N(x)$ – функция принадлежности нечеткого множества недоминируемых решений, определяемая равенством

$$\lambda_X^N(x) = 1 - \sup_{z \in X} \mu_X(z, x) \quad \forall x \in X.$$

Приведем определение относительной важности двух групп критериев для случая нечеткого отношения предпочтения [4].

Определение 1. Пусть $A, B \subset I$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$. Говорят, что группа критериев A важнее группы B с двумя заданными наборами положительных параметров w_i^* для всех $i \in A$ и w_j^* для всех $j \in B$ и степенью уверенности $\mu^* \in (0, 1]$, если для любой пары векторов $y', y'' \in R^m$, для которых верно

$$y'_i - y''_i = w_i^* \quad \forall i \in A; \quad y''_j - y'_j = w_j^* \quad \forall j \in B; \quad y'_s = y''_s \quad \forall s \in I \setminus \{A \cup B\},$$

имеет место равенство $\mu(y', y'') = \mu^*$.

В силу инвариантности нечеткого отношения предпочтения, векторы y' , y'' из определения 1 могут быть фиксированными [4], в частности, иметь вид

$$y'_i = w_i^* \quad \forall i \in A; \quad y'_j = -w_j^* \quad \forall j \in B; \quad y'_s = 0 \quad \forall s \in I \setminus \{A \cup B\}, \quad y'' = 0_m.$$

Смысл определения 1 состоит в следующем: ЛПР со степенью уверенности μ^* готово пожертвовать w_j^* по каждому j -му критерию группы B , ради получения прибавки w_i^* по каждому i -му критерию группы A .

В общем случае может быть задано k соотношений, описанных в определении 1, что равносильно заданию набора из k пар векторов

$$y^1 \text{ и } 0_m, \dots, y^k \text{ и } 0_m. \quad (1)$$

и набору чисел $\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_k^* \in (0, 1]$.

Определение 2. Набор векторов (1) вместе с набором чисел $\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_k^* \in (0, 1]$ будем называть *непротиворечивым*, если существует хотя бы одно нечеткое отношение предпочтения с функцией принадлежности $\mu(\cdot, \cdot)$, для которого выполняются аксиомы 2-4 и соотношения $\mu(y^i, 0_m) = \mu_i^* \in (0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, k$.

В дальнейшем, говоря о непротиворечивости набора векторов (1) вместе с набором чисел $\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_k^* \in (0, 1]$, будем подразумевать непротиворечивость набора информации, выраженного данными векторами.

2. Учет различных наборов нечеткой взаимно зависимой информации

Рассмотрим две задачи с набором взаимно зависимой информации о нечетком отношении предпочтения.

Задача А. Пусть $m = 3$, $f = (f_1, f_2, f_3)$. Известно, что группа критериев $A = \{f_1, f_2\}$ важнее группы критериев $B = \{f_3\}$ с двумя заданными наборами положительных параметров $\{w_1, w_2\}$, $\{w_3\}$ и степенью уверенности μ_1 ; а группа критериев $B = \{f_3\}$ важнее группы критериев $A = \{f_1, f_2\}$ с наборами положительных параметров $\{\gamma_3\}$, $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ и степенью уверенности μ_2 . Для определенности предположим, что $\mu_1 \geq \mu_2$. Обозначим набор нечеткой информации, состоящий из двух указанных сообщений, символом (Н1). Необходимо указать способ учета данной информации, который приводил бы к сужению исходного множества Парето.

Введем следующие векторы: $t^1 = (w_3, 0, w_1)$, $t^2 = (0, w_3, w_2)$, $t^3 = (\gamma_3, 0, \gamma_1)$, $t^4 = (0, \gamma_3, \gamma_2)$, $t^5 = (\gamma_2 w_3 - w_2 \gamma_3, w_1 \gamma_3 - w_3 \gamma_1, \gamma_2 w_1 - \gamma_1 w_2)$, $e^3 = (0, 0, 1)$.

Введем следующие нечеткие отношения:

$$\zeta_1(z, y) = \begin{cases} 1, \text{ если } z - y \in R_+^3, \\ \mu_1, \text{ если } \bar{z} - \bar{y} \in R_+^3, z - y \notin R_+^3, \\ \mu_2, \text{ если } \hat{y} - \hat{z} \in R_+^3, \bar{z} - \bar{y} \notin R_+^3, z - y \notin R_+^3, \\ 0, \text{ в остальных случаях,} \end{cases} \quad \forall y, z \in Y \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{y} &= (t^3 y, t^4 y, e^3 y), \quad \bar{z} = (t^3 z, t^4 z, e^3 z), \\ \hat{y} &= (t^1 y, t^2 y, t^3 y, t^4 y), \quad \hat{z} = (t^1 z, t^2 z, t^3 z, t^4 z), \end{aligned} \quad (3)$$

и

$$\zeta_2(z, y) = \begin{cases} 1, \text{ если } z - y \in R_+^3, \\ \mu_1, \text{ если } \bar{z} - \bar{y} \in R_+^3, z - y \notin R_+^3, \\ \mu_2, \text{ если } \hat{y} - \hat{z} \in R_+^3, \bar{z} - \bar{y} \notin R_+^3, z - y \notin R_+^3, \\ 0, \text{ в остальных случаях,} \end{cases} \quad (4)$$

где $\bar{y}$, $\bar{z}$ векторы вида (3), а $\hat{y}$, $\hat{z}$ имеют вид

$$\hat{y} = (t^1 y, t^3 y, t^5 y), \quad \hat{z} = (t^1 z, t^3 z, t^5 z) \quad (5)$$

или

$$\hat{y} = (t^2 y, t^4 y, -t^5 y), \quad \hat{z} = (t^2 z, t^4 z, -t^5 z). \quad (5')$$

Следующая теорема, доказательство которой вынесено в приложение, содержит указания по построению функции принадлежности $\lambda_Y^M(\cdot)$ некоторого нечеткого множества, представляющего собой оценку сверху для неизвестного множества выбираемых векторов.

Теорема 1. Пусть выполнены аксиомы 1-4, задан набор нечеткой взаимно зависимой информации вида (Н1) и выполняется хотя бы одно из неравенств

$$\frac{w_1}{\gamma_1} > \frac{w_3}{\gamma_3}, \quad \frac{w_2}{\gamma_2} > \frac{w_3}{\gamma_3}. \quad (6)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\lambda_Y^C(y) \leq \lambda_Y^M \leq \lambda_Y^P(y) \quad \forall y \in Y, \quad (7)$$

где $\lambda_Y^C(\cdot)$ – функция принадлежности нечеткого множества выбираемых векторов, $\lambda_Y^P(\cdot)$ – функция принадлежности множества Парето, $\lambda_Y^M(\cdot)$ – функция принадлежности, определяемая равенствами

$$\lambda_Y^M(y) = 1 - \sup_{z \in Y} \zeta(z, y) \quad \forall y \in Y. \quad (8)$$

Если выполняются оба неравенства (6), то $\zeta(z, y) = \zeta_1(z, y)$. Если выполняется только одно из неравенств (6), то $\zeta(z, y) = \zeta_2(z, y)$, причем $\hat{y}$, $\hat{z}$ в формуле (4) имеют вид (5), когда справедливо только первое неравенство, и вид (5'), когда верно только второе неравенство.

Как показывает анализ формулировки теоремы 1, для того чтобы построить нечеткое множество с функцией принадлежности $\lambda_Y^M(y)$, необходимо решить три четкие задачи многокритериального выбора. На первом этапе следует найти множество Парето в задаче с множеством возможных решений X и исходной векторной функцией $f = (f_1, f_2, f_3)$. В результате всем векторам, принадлежащим найденному множеству Парето, присвоить степень принадлежности равную единице, а остальным – равную нулю.

Следующим шагом будет решение задачи многокритериального выбора на том же множестве возможных решений X , но уже с новой векторной функцией $(\gamma_3 f_1 + \gamma_1 f_3, \gamma_3 f_2 + \gamma_2 f_3, f_3)$, "пересчитанной" с учетом имеющейся информации об относительной важности критериев. Теперь всем векторам множества Парето, полученного на предыдущем этапе, которые не попали во множество Парето, найденного во второй задаче многокритериального выбора, нужно присвоить степень принадлежности $1 - \mu_1$.

И, наконец, третьим шагом на множестве X решается задача с вновь "пересчитанной" векторной функцией, вид которой зависит от того, выполняются оба неравенства (6) или одно из них. Если справедливы оба неравенства (6), то размерность новой векторной функции увеличивается на единицу и она принимает вид $(w_3 f_1 + w_1 f_3, w_3 f_2 + w_2 f_3, \gamma_3 f_1 + \gamma_1 f_3, \gamma_3 f_2 + \gamma_2 f_3)$. В том случае, когда выполняется только неравенство $\frac{w_1}{\gamma_1} > \frac{w_3}{\gamma_3}$, векторная функция в третьей задаче имеет вид

$$(w_3 f_1 + w_1 f_3, \gamma_3 f_1 + \gamma_1 f_3, (\gamma_2 w_3 - w_2 \gamma_3) f_1 + (w_1 \gamma_3 - w_3 \gamma_1) f_2 + (\gamma_2 w_1 - \gamma_1 w_2) f_3),$$

когда же верно только $\frac{w_2}{\gamma_2} > \frac{w_3}{\gamma_3}$, то

$$(w_3 f_2 + w_2 f_3, \gamma_3 f_2 + \gamma_2 f_3, (\gamma_3 w_2 - w_3 \gamma_2) f_1 + (w_3 \gamma_1 - w_1 \gamma_3) f_2 + (\gamma_1 w_2 - \gamma_2 w_1) f_3).$$

Всем парето-оптимальным векторам из второй задачи, не попавшим во множество Парето третьей задачи, следует присвоить степень принадлежности $1 - \mu_2$. Таким образом, будет построено нечеткое множество недоминируемых решений с функцией принадлежности $\lambda_Y^M(y)$, представляющее собой более точную оценку сверху для неизвестного множества выбираемых векторов $C(Y)$, чем множество Парето исходной задачи.

Задача Б. Пусть $m = 4$, $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$. Известно, что группа критериев $A = \{f_1, f_2\}$ важнее группы критериев $B = \{f_3\}$ с двумя заданными наборами положительных параметров $\{w'_1, w'_2\}$, $\{w'_3\}$ и степенью уверенности μ_1 , а группа критериев $B = \{f_3\}$ важнее группы критериев $A = \{f_1, f_2\}$ с наборами положительных параметров $\{\gamma'_3\}$, $\{\gamma'_1, \gamma'_2\}$ и степенью уверенности μ_2 . Группа критериев $C = \{f_1\}$ важнее группы $D = \{f_4\}$ с наборами положительных параметров $\{w''_1\}$, $\{w''_4\}$ и степенью уверенности μ_3 ; а группа критериев D важнее группы C с наборами положительных параметров $\{\gamma''_4\}$, $\{\gamma''_1\}$ и степенью уверенности μ_4 . Данный набор информации обозначим символом (Н2). Предположим, что выполняются соотношения $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \mu_4$. Как и в предыдущей задаче, необходимо указать способ сужения множества Парето исходной задачи.

Введем следующие векторы:

$$\begin{aligned} q^1 &= (w'_3, 0, w'_1, 0), \quad q^2 = (0, w'_3, w'_2, 0), \quad q^3 = (\gamma'_3, 0, \gamma'_1, 0), \quad q^4 = (0, \gamma'_3, \gamma'_2, 0), \\ q^5 &= (\gamma_2 w_3 - w_2 \gamma_3, w_1 \gamma_3 - w_3 \gamma_1, \gamma_2 w_1 - \gamma_1 w_2, 0), \quad q^6 = (w'_3 w''_4, 0, w'_1 w''_4, w'_3 w''_1), \\ q^7 &= (\gamma'_3 w''_4, 0, \gamma'_1 w''_4, \gamma'_3 w''_1), \quad q^8 = (w'_3 \gamma''_4, 0, w'_1 \gamma''_4, w'_3 \gamma''_1), \quad q^9 = (\gamma'_3 \gamma''_4, 0, \gamma'_1 \gamma''_4, \gamma'_3 \gamma''_1), \\ q^{10} &= ((\gamma'_2 w'_3 - w'_2 \gamma'_3) w''_4, (\gamma'_3 w'_1 - w'_3 \gamma'_1) w''_4, (\gamma'_2 w'_1 - w'_2 \gamma'_1) w''_4, (\gamma'_2 w'_3 - w'_2 \gamma'_3) w''_1), \\ q^{11} &= ((\gamma'_2 w'_3 - w'_2 \gamma'_3) \gamma''_4, (\gamma'_3 w'_1 - w'_3 \gamma'_1) \gamma''_4, (\gamma'_2 w'_1 - w'_2 \gamma'_1) \gamma''_4, (\gamma'_2 w'_3 - w'_2 \gamma'_3) \gamma''_1). \end{aligned}$$

Рассмотрим следующие нечеткие отношения:

$$\bar{\zeta}_1(z, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } z - y \in R_+^4, \\ \mu_1, & \text{если } \bar{z} - \bar{y} \in R_+^5, z - y \notin R_+^4, \\ \mu_2, & \text{если } \hat{y} - \hat{z} \in R_+^5, \bar{z} - \bar{y} \notin R_+^5, z - y \notin R_+^4, \\ \mu_3, & \text{если } \tilde{y} - \tilde{z} \in R_+^5, \hat{y} - \hat{z} \notin R_+^5, \bar{z} - \bar{y} \notin R_+^5, z - y \notin R_+^4, \\ \mu_4, & \text{если } \check{y} - \check{z} \in R_+^6, \tilde{y} - \tilde{z} \notin R_+^5, \hat{y} - \hat{z} \notin R_+^5, \bar{z} - \bar{y} \notin R_+^5, z - y \notin R_+^4, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad \forall y, z \in Y$$

где

$$\begin{aligned} \bar{y} &= (e^1 y, e^2 y, q^1 y, q^2 y, e^4 y), \quad \bar{z} = (e^1 z, e^2 z, q^1 z, q^2 z, e^4 z), \\ \hat{y} &= (q^1 y, q^2 y, q^3 y, q^4 y, e^4 y), \quad \hat{z} = (q^1 z, q^2 z, q^3 z, q^4 z, e^4 z), \\ \tilde{y} &= (q^1 y, q^2 y, q^3 y, q^4 y, q^6 y, q^7 y), \quad \tilde{z} = (q^1 z, q^2 z, q^3 z, q^4 z, q^6 z, q^7 z), \\ \check{y} &= (q^2 y, q^4 y, q^6 y, q^7 y, q^8 y, q^9 y), \quad \check{z} = (q^2 z, q^4 z, q^6 z, q^7 z, q^8 z, q^9 z), \end{aligned} \quad (9)$$

и

$$\bar{\zeta}_2(z, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } z - y \in R_+^4, \\ \mu_1, & \text{если } \bar{z} - \bar{y} \in R_+^5, z - y \notin R_+^4, \\ \mu_2, & \text{если } \hat{y} - \hat{z} \in R_+^4, \bar{z} - \bar{y} \notin R_+^5, z - y \notin R_+^4, \\ \mu_3, & \text{если } \tilde{y} - \tilde{z} \in R_+^5, \hat{y} - \hat{z} \notin R_+^4, \bar{z} - \bar{y} \notin R_+^5, z - y \notin R_+^4, \\ \mu_4, & \text{если } \check{y} - \check{z} \in R_+^6, \tilde{y} - \tilde{z} \notin R_+^5, \hat{y} - \hat{z} \notin R_+^4, \bar{z} - \bar{y} \notin R_+^5, z - y \notin R_+^4, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad \forall y, z \in Y$$

где $\bar{y}$, $\bar{z}$ векторы вида (9), а $\hat{y}$, $\hat{z}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$, $\check{y}$, $\check{z}$ имеют вид

$$\begin{aligned}\hat{y} &= (q^1 y, q^3 y, q^5 y, e^4 y), \quad \hat{z} = (q^1 z, q^3 z, q^5 z, e^4 z), \\ \tilde{y} &= (q^1 y, q^3 y, q^6 y, q^7 y, q^{10} y), \quad \tilde{z} = (q^1 z, q^3 z, q^6 z, q^7 z, q^{10} z), \\ \check{y} &= (q^1 y, q^3 y, q^6 y, q^7 y, q^8 y, q^9 y, q^{10} y, q^{11} y), \quad \check{z} = (q^1 z, q^3 z, q^6 z, q^7 z, q^8 z, q^9 z, q^{10} z, q^{11} z)\end{aligned}\quad (10)$$

или

$$\begin{aligned}\hat{y} &= (q^1 y, q^3 y, -q^5 y, e^4 y), \quad \hat{z} = (q^1 z, q^3 z, -q^5 z, e^4 z), \\ \tilde{y} &= (q^1 y, q^3 y, q^6 y, q^7 y, -q^{10} y), \quad \tilde{z} = (q^1 z, q^3 z, q^6 z, q^7 z, -q^{10} z), \\ \check{y} &= (q^1 y, q^3 y, q^6 y, q^7 y, q^8 y, q^9 y, -q^{10} y, -q^{11} y), \\ \check{z} &= (q^1 z, q^3 z, q^6 z, q^7 z, q^8 z, q^9 z, -q^{10} z, -q^{11} z).\end{aligned}\quad (10')$$

Теорема 2. Пусть выполнены аксиомы 1-4, задан набор нечеткой взаимно зависимой информации (Н2), а также справедливо неравенство

$$\frac{w_1''}{\gamma_1''} > \frac{w_4''}{\gamma_4''}$$

и выполняется хотя бы одно из неравенств

$$\frac{w_1'}{\gamma_1'} > \frac{w_3'}{\gamma_3'}, \quad \frac{w_2'}{\gamma_2'} > \frac{w_3'}{\gamma_3'}.\quad (11)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\lambda_Y^C(y) \leq \lambda_Y^M \leq \lambda_Y^P(y) \quad \forall y \in Y,\quad (12)$$

где $\lambda_Y^C(\cdot)$ – функция принадлежности нечеткого множества выбираемых векторов, $\lambda_Y^P(\cdot)$ – функция принадлежности множества Парето, $\lambda_Y^M(\cdot)$ – функция принадлежности, определяемая равенствами

$$\lambda_Y^M(y) = 1 - \sup_{z \in Y} \zeta(z, y) \quad \forall y \in Y.$$

Если выполняются оба неравенства (11), то $\zeta(z, y) = \bar{\zeta}_1(z, y)$. Если выполняется только одно из неравенств (11), то $\zeta(z, y) = \bar{\zeta}_2(z, y)$, причем $\hat{y}$, $\hat{z}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$, $\check{y}$, $\check{z}$ имеют вид (10), когда справедливо только первое неравенство, и вид (10'), когда верно только второе неравенство.

Поясним данную теорему. Для того чтобы построить функцию принадлежности $\lambda_Y^M(\cdot)$, необходимо последовательно решить пять задач многокритериального выбора на одном и том же множестве возможных решений X , но с различными векторными критериями. В частности, если выполняются оба неравенства (11), то векторные критерии, используемые на каждом из этапов, имеют вид

$$\begin{aligned}f &= (f_1, f_2, f_3, f_4), \quad \bar{f} = (e^1 f, e^2 f, q^1 f, q^2 f, e^4 f), \quad \hat{f} = (q^1 f, q^2 f, q^3 f, q^4 f, e^4 f), \\ \tilde{f} &= (q^1 f, q^2 f, q^3 f, q^4 f, q^6 f, q^7 f), \quad \check{f} = (q^2 f, q^4 f, q^6 f, q^7 f, q^8 f, q^9 f).\end{aligned}$$

Построение функции принадлежности $\lambda_Y^M(\cdot)$ происходит следующим образом. Всем векторам из множества возможных векторов Y , которые принадлежат множеству Парето найденному на первом шаге, присвоить степень принадлежности равную единице, а остальным – равную нулю. Далее на каждом i -ом шаге ($i = 2, \dots, 5$) всем векторам множества Парето, полученного на $(i-1)$ -ом этапе, которые не попали во множество Парето, найденное в i -ой задаче многокритериального выбора, нужно присвоить степень принадлежности $1 - \mu_i$. Таким образом, будет построена функция принадлежности $\lambda_Y^M(\cdot)$, для которой выполняется соотношение (12).

3. Модельный пример

Рассмотрим в качестве модельного примера следующую задачу многокритериального выбора с набором нечеткой взаимно зависимой информации.

Пусть $m = 3$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$, а для нечеткого отношения предпочтения ЛПР выполняются аксиомы 1-4. Множество возможных решений X состоит из семи вариантов. Соответствующее ему множество возможных векторов $Y \subset R^3$ состоит из следующих элементов

$$y^1 = (2, 7, 4), y^2 = (3, 5, 0), y^3 = (6, 8, 2), y^4 = (1, 1, 3), \\ y^5 = (0, 2, 6), y^6 = (5, 2, 5), y^7 = (7, 0, 4).$$

Множество Парето задачи многокритериального выбора с исходной векторной функцией образовано пятью элементами $P(Y) = (y^1, y^3, y^5, y^6, y^7)$. Присвоим данным элементам степень принадлежности равную единице, а векторам y^2, y^4 нулевую степень принадлежности. Тем самым выполняется

$$\lambda_Y^P(y^1) = \lambda_Y^P(y^3) = \lambda_Y^P(y^5) = \lambda_Y^P(y^6) = \lambda_Y^P(y^7) = 1, \lambda_Y^P(y^2) = \lambda_Y^P(y^4) = 0.$$

Пусть группа A состоит из первого и второго критериев, а группа B – из третьего критерия. Предположим, что имеется информация о том, что группа A важнее группы B с двумя наборами параметров $\{w_1, w_2\} = \{7, 3\}$, $\{w_3\} = \{2\}$ и степенью уверенности $\mu_1 = 0,3$, а группа B важнее группы A с наборами параметров $\{\gamma_1, \gamma_2\} = \{5, 4\}$ и $\{\gamma_3\} = \{2\}$ и степенью уверенности $\mu_2 = 0,6$. Введем в рассмотрение следующие векторы $e^1 = (1, 0, 0)$, $e^2 = (0, 1, 0)$, $e^3 = (0, 0, 1)$, $y^1 = (w_1, w_2, -w_3)$, $y^2 = (-\gamma_1, -\gamma_2, \gamma_3)$.

Согласно теореме 4.1 [1], для того чтобы данный набор информации был непротиворечивым, необходимо выполнение следующих условий:

1. Система линейных равенств

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i e^i + \sum_{s=1}^2 \alpha_s y^s = 0_m$$

не должна иметь ни одного ненулевого неотрицательного решения относительно $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$.

2. Конус K_1 , образованный векторами e^1, e^2, e^3, y^1 , не должен содержать вектор y^2 .

Нетрудно убедиться, что указанные выше условия выполняются и, следовательно, набор информации непротиворечив.

Решая вторую задачу многокритериального выбора с новой векторной функцией $(\gamma_3 f_1 + \gamma_1 f_3, \gamma_3 f_2 + \gamma_2 f_3, f_3)$, вычислим

$$\bar{y}^1 = (24, 30, 4), \bar{y}^2 = (6, 10, 0), \bar{y}^3 = (22, 24, 2), \bar{y}^4 = (17, 14, 3), \\ \bar{y}^5 = (30, 28, 6), \bar{y}^6 = (35, 24, 5), \bar{y}^7 = (34, 16, 4).$$

Парето-оптимальными векторами в данной задаче являются первый, пятый и шестой векторы. Поскольку в новое множество Парето из "предыдущего" множества Парето не попадают третий и седьмой вектор, то этим векторам присваиваем степень принадлежности $1 - \mu_1$. Остальные векторы сохраняют свои прежние степени принадлежности

$$\lambda_Y^M(y^1) = \lambda_Y^M(y^5) = \lambda_Y^M(y^6) = 1, \lambda_Y^M(y^3) = \lambda_Y^M(y^7) = 0,7, \lambda_Y^M(y^2) = \lambda_Y^M(y^4) = 0.$$

И, наконец, на множестве X решаем третью задачу многокритериального выбора с векторной функцией $(\gamma_3 f_1 + \gamma_1 f_3, w_3 f_1 + w_1 f_3, (\gamma_2 w_3 - w_2 \gamma_3) f_1 + (w_1 \gamma_3 - w_3 \gamma_1) f_2 + (\gamma_2 w_1 - \gamma_1 w_2) f_3)$. Получаем

$$\hat{y}^1 = (24, 32, 84), \hat{y}^2 = (6, 6, 26), \hat{y}^3 = (22, 26, 70), \hat{y}^4 = (17, 23, 45), \\ \hat{y}^5 = (30, 42, 86), \hat{y}^6 = (35, 45, 83), \hat{y}^7 = (34, 42, 66).$$

Здесь множество Парето состоит только из пятого и шестого векторов, поэтому первому вектору присваиваем степень принадлежности $1 - \mu_2$: $\lambda_Y^M(y^1) = 0,4$.

Таким образом, мы построили функцию принадлежности λ_Y^M вида

$$\lambda_Y^M(y^5) = \lambda_Y^M(y^6) = 1, \lambda_Y^M(y^3) = \lambda_Y^M(y^7) = 0,7, \lambda_Y^M(y^1) = 0,4, \lambda_Y^M(y^2) = \lambda_Y^M(y^4) = 0.$$

Согласно теореме 1 множество выбираемых векторов содержится внутри нечеткого множества с данной функцией принадлежности.

Заключение

В работе рассмотрены две задачи многокритериального выбора, в которых отношение предпочтения является нечетким. Для сужения множества Парето был использован подход, основанный на принятии ряда аксиом и указании определенной информации о нечетком предпочтении ЛПР.

Для каждой из задач указано, как следует учитывать нечеткую взаимно зависимую информацию о предпочтениях ЛПР в ходе принятия решения. Если задано k сообщений, представляющих собой информацию об относительной важности критериев, то для учета подобной информации необходимо последовательно решить $k + 1$ задачу многокритериального выбора, причем на каждом из этапов множество выбираемых решений остается прежним, а векторный критерий «пересчитывается» по определенным формулам. В результате на последнем шаге строится функция принадлежности некоторого нечеткого множества, представляющего собой искомую оценку сверху для неизвестного множества выбираемых решений.

Литература

1. Богданова А.В., Ногин В.Д. Сужение множества Парето на основе простейших наборов нечеткой информации об относительной важности критериев// Вестник С.-Петербургского Университета, Сер 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2007. Вып. 2, С. 3-17.
2. Климова О.Н., Ногин В.Д. Учет взаимно зависимой информации об относительной важности критериев в процессе принятия решения// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006, т. 46, № 12, С. 2178-2190.
3. Ногин В.Д. Логическое обоснование принципа Эджворта-Парето// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002, т. 42, № 7, С. 950-956.
4. Ногин В.Д. Принцип Эджворта –Парето и относительная важность критериев в случае нечеткого отношения предпочтения// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003, т. 43, № 11, С.1676-1686.
5. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход (2-е изд., испр. и доп.). М.:ФИЗМАТЛИТ, 2005, 176 с.

Приложение

Доказательство теоремы 1. Пусть задан набор нечеткой взаимно зависимой информации (Н1) и выполняются аксиомы 2-4.

Согласно результатам, полученным в [4], нечеткое отношение предпочтения $\mu(\cdot, \cdot)$, удовлетворяющее аксиомам 2-4, является конусным отношением с нечетким острым, выпуклым конусом K . Причем конус K с единичной степенью принадлежности включает неотрицательный ортант R_+^m и с нулевой степенью принадлежности содержит начало координат.

Задание набора информации (Н1), эквивалентно заданию векторов

$$y^1 = (-\gamma_1, -\gamma_2, \gamma_3) \text{ и } y^2 = (w_1, w_2, -w_3), \quad (13)$$

таких, что выполняются равенства $\mu(y^1, 0_m) = \mu_1$, $\mu(y^2, 0_m) = \mu_2$ и y^1, y^2 принадлежат носителю конуса нечеткого отношения предпочтения $\mu(\cdot, \cdot)$ соответственно со степенями принадлежности μ_1 и μ_2 .

Рассмотрим два четких конуса K_1 и K_2 , построенных следующим образом. Если $\mu_1 > \mu_2$, то конус K_1 порождается векторами e^1, e^2, e^3 и y^1 , а конус K_2 – векторами e^1, e^2, e^3 , y^1 и y^2 . Если же $\mu_1 = \mu_2$, то конус K_1 совпадает с K_2 .

Докажем непротиворечивость набора нечеткой взаимно зависимой информации (Н1). Для этого воспользуемся теоремой 4.1 из [1], которая для нашего случая примет вид:

Теорема 3. Для того чтобы набор векторов (13) вместе с набором чисел μ_1, μ_2 задавали непротиворечивую нечеткую информацию об относительной важности критериев необходимо и достаточно, чтобы система линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i e^i + \sum_{s=1}^2 \alpha_s y^s = 0_m \quad (14)$$

не имела ни одного ненулевого неотрицательного решения относительно $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$ и, кроме того, конус K_1 не содержал вектора y^2 .

Из системы линейных уравнений (14) следует справедливость равенств

$$\frac{\lambda_1}{\gamma_1} + \frac{\lambda_3}{\gamma_3} = \alpha_1 \left(\frac{w_3}{\gamma_3} - \frac{w_1}{\gamma_1} \right), \quad \frac{\lambda_2}{\gamma_2} + \frac{\lambda_3}{\gamma_3} = \alpha_1 \left(\frac{w_3}{\gamma_3} - \frac{w_2}{\gamma_2} \right).$$

Выполнение хотя бы одно из неравенств (6) влечет единственно возможное решение для системы (14) – нулевое. В случае $\mu_1 = \mu_2$, непротиворечивость доказана.

Докажем справедливость второго условия для случая $\mu_1 > \mu_2$. Предположим противное, $y^2 \in K_1$. Это означает, что вектор y^2 может быть представлен в виде неотрицательной линейной комбинации

$$y^2 = \sum_{s=1}^3 \lambda_s e^s + \alpha y^1.$$

Из последнего равенства указанной выше системы вытекает $-w_3 = \lambda_3 + \alpha \gamma_3 \geq 0$. Из полученного противоречия делаем вывод, что предположение неверно и $y^2 \notin K_1$. Следовательно, согласно теореме 3, набор нечеткой взаимно зависимой информации (Н1) непротиворечив.

Обозначим через M_1 нечеткий конус с носителем K_1 . Неотрицательный ортант R_+^m входит в конус M_1 со степенью принадлежности, равной 1, а все остальные элементы конуса K_1 – со степенью принадлежности μ_1 . Обозначим через M_2 нечеткий конус с носителем K_2 . Элементы неотрицательного ортанта R_+^m входят в конус M_2 со степенью принадлежности, так же равной 1, а все остальные элементы конуса K_2 – со степенью принадлежности μ_2 .

Рассмотрим нечеткий конус M , представляющий собой объединение двух нечетких конусов M_1 и M_2 . В силу включения $K_1 \subset K_2$, носитель конуса M совпадает с конусом K_2 , который порожден единичными ортами $e^1 = (1, 0, 0)$, $e^2 = (0, 1, 0)$, $e^3 = (0, 0, 1)$ и векторами y^1, y^2 . Так как вектор e^3 можно линейно выразить через остальные векторы, используя неотрицательные коэффициенты, то $\text{supp } M$ представляет собой совокупность всех ненулевых неотрицательных линейных комбинаций набора векторов e^1, e^2, y^1, y^2 . Таким образом, множество M – острый выпуклый конус, являющийся подмножеством конуса K .

Поскольку нечеткий конус M представляет собой объединение M_1 и M_2 , то векторам $\text{supp } M$, принадлежащим неотрицательному ортанту, приписана степень принадлежности 1, нача-

лу координат – степень принадлежности 0, векторам, принадлежащим конусу K_1 и не входящим в R_+^m – степень принадлежности μ_1 , а векторам, принадлежащим конусу K_2 и не входящим в конус K_1 – степень принадлежности μ_2 .

Носитель конуса M_1 , т.е. множество всех элементов конуса K_1 , совпадает с множеством всех ненулевых решений системы линейных неравенств

$$\begin{aligned}\gamma_3 y_1 + \gamma_1 y_3 &\geq 0, \\ \gamma_3 y_2 + \gamma_2 y_3 &\geq 0, \\ y_3 &\geq 0.\end{aligned}$$

Носитель конуса M , согласно доказательству теоремы 3 из [2], совпадает с множеством всех ненулевых решений системы линейных неравенств

$$\begin{aligned}w_3 y_1 + w_1 y_3 &\geq 0, \\ w_3 y_2 + w_2 y_3 &\geq 0, \\ \gamma_3 y_1 + \gamma_1 y_3 &\geq 0, \\ \gamma_3 y_2 + \gamma_2 y_3 &\geq 0.\end{aligned}$$

Рассмотрим нечеткое конусное отношение ζ , конус которого M . Согласно рассуждениям приведенным выше, отношение ζ в точности совпадает с отношением, определенным равенством (2). Тогда множество, функция принадлежности которого представлена равенством (8), есть нечеткое множество недоминируемых векторов относительно отношения ζ .

Из включений $R_+^3 \subset M \subset K$ вытекает, что множество Парето содержит множество недоминируемых векторов относительно отношения ζ , а оно в свою очередь содержит множество недоминируемых векторов, порожденное конусным отношением предпочтения с функцией принадлежности $\mu(\cdot, \cdot)$. На основании нечеткого принципа Эджворта-Парето, последнее множество содержит внутри себя нечеткое множество выбираемых векторов. Это означает справедливость (7).

Доказательство случая, когда выполняется только одно из неравенств (6), аналогично выше приведенному случаю. Отметим, что теперь носитель конуса M , согласно доказательству теоремы 4 из [2], будет совпадать с множеством всех ненулевых решений системы линейных неравенств

$$\begin{aligned}\gamma_3 y_1 + \gamma_1 y_3 &\geq 0, \\ w_3 y_1 + w_1 y_3 &\geq 0, \\ (\gamma_2 w_3 - w_2 \gamma_3) y_1 + (w_1 \gamma_3 - w_3 \gamma_1) y_2 + (\gamma_2 w_1 - \gamma_1 w_2) y_3 &\geq 0,\end{aligned}$$

а нечеткое конусное отношение будет иметь вид (4). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Климова Ольга Николаевна. Аспирант кафедры теории управления факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. Окончила Санкт-Петербургский государственный университет в 2005 году. Область научных интересов: принятие решений при многих критериях, многокритериальная оптимизация. klimova_o@rambler.ru.