М.И. Алиев, И.М. Алиев, Э.А. Исаева

Флуктуации с точки зрения теории нечетких множеств Л. Заде

Аннотация. В работе рассматривается процесс принятия одного из решений стохастического интегрального уравнения (СИУ) для белого шума. Делается вывод, что в этой задаче необходимо использовать теорию нечетких множеств (ТНМ) Л.Заде.

Ключевые слова: флуктуации, белый шум, нечеткие множества.

Введение

Известно, что электронно-вычислительные машины нового поколения будут отличаться от нынешних машин не только количественными показателями, но и качественно. Эти машины будут иметь искусственный интеллект. Это означает, что эти машины смогут, подобно человеку думать, и, значит, уметь принимать решение адекватно окружающей ситуации, среде. Именно этим отличается машина от человека. Конечно, для того, чтобы научить машину думать и принимать решение, необходимо разобраться в том, как действует интеллект. Но в начале, нам надо согласиться с тем, что интеллект может думать и принимать решение в любых ситуациях, то есть для него окружающая среда с процессами в нем может быть не только детерминированной или случайной, а может быть и нечеткой тоже. Поэтому, именно в нечеткой среде, процесс принятия решения очень интересная задача и наша статья будет посвящена ей.

В нашей статье нечеткой средой будет шум, в частности белый шум. Шум – это внешние флуктуации, флуктуации, действующие на рассматриваемую систему, а этой системой может быть и сам интеллект, извне. Но почему мы считаем, что белый шум является нечеткой средой, а не вероятностной, как это принято считать обычно в имеющейся литературе [1-5]. Известно, что существуют различные виды белого шума, и для их идентификации им приписываются различные цвета – розовый, черный, цветной и т.д. Мы считаем, что каждый шум участвует в среде своей функцией принадлежности μ, определенная в теории нечетких множеств Л. Заде [12, 13], которая может принимать значение из интервала [0, 1]. В противовес этому, если белый шум считать вероятностной средой, тогда только один вид из всех видов белого шума может рассматриваться. Это происходит из-за того, что в теории вероятностей нет функции принадлежности μ, а есть только его аналог – индикатор элементарного события $\boldsymbol{I}$ – равный либо 0, либо 1. Однако, именно так, считая белый шум вероятностным процессом, поступают при его изучении. Мы считаем, как об этом еще будет сказано ниже, что в этом причина получения различных ответов решения стохастического интегрального уравнения (СИУ).

Итак, считается, что белый шум – это вероятностный процесс, сразу забывающий только что принятое свое значение. Поскольку значения, принятые белым шумом в каждый момент времени независимы, можно использовать центральную предельную теорему теории вероятностей. Имея в распоряжении эту теорему можно сказать, что поведение белого шума любой природы будет универсальным. Исходя из вышесказанного, можно для модели белого шума выбрать любой вероятностный процесс, например, пуасоновский или гауссовский процессы, которые, как известно, очень хорошо изучены в теории вероятностей. Однако, существует одна очень важная проблема, которую нельзя игнорировать в понимании белого шума. Проблема заключается в следующем. Как известно, белый шум описывается стохасическим интегралом. Если обычный интеграл не зависит от своего определения, например, определен ли он по Риману или Лебега, но все равно приводят к одному и тому же ответу при раскрытии, то стохастический интеграл наоборот зависит от своего определения. Существуют три разных определений стохастического интеграла, по Ито, Стратоновичу и Климонтовичу, которые дают совсем разные ответы, несмотря на математическую корректность при их раскрытии. Эти разные определения стохастического интеграла до сих пор ставили и ставят в тупик многих ученых [1]. Никак не удается ответить на вопрос кто прав в своем определении стохастического интеграла - Ито, Стратонович или Климонтович, и по этому поводу существует очень много научных полемик [2-4]. Все это результат того, что есть непонимание до конца того факта, что белый шум – необычный объект исследования. Белый шум – это больше, чем вероятностный процесс, можно сказать, что это – обобщенный вероятностный процесс, а еще лучше будет сказать, что это нечеткий процесс. Объясним сказанное. Известно, что в теории вероятностей отсутствует этап принятия решения. Нахождения среднего или дисперсии случайной величины не имеет отношения к процессу принятия решения, Это происходит из-за того, что у нас имеется в наличии известное заранее распределение случайной величины. Как изящно сформулировал эту мысль китайский математик Чен говоря, что в случайной величине нет ничего случайного, а именно [1]: «элементом случайности в X(ω) можно было бы назвать выборочную точку ω, выбираемую «случайным образом»…. Но сколь ω выбрана, величина X(ω) полностью определена, и в ней нет больше ничего неоднозначного, неопределенного или случайного». В этом высказывании X – случайная величина, а ω - рассматриваемое событие. Хорошо известно, что теория вероятностей используется для нахождения вероятности интересующего нас события. Это событие может быть любым. Например, при бросании игральной кости с пронумерованными от 1 до 6 гранями, нас может интересовать событие, что выпадет грань «1», может интересовать событие, что выпадет либо грань «1», либо грань «2», а может вообще интересовать событие, что выпадет любая из граней «1», «2», «3», т.е. ω меняется. В этом случае случайная величина X числа выпадений, соответствующая интересующему нас событию при бросании множества одинаковых костей будет зависеть от того, какое событие нас интересует. Но как только мы останавливаемся на одном из ω, случайная величина X становится уже определенной, и из этой определенности мы можем сказать какова вероятность, найти среднее и дисперсию случайной величины числа бросания кости. Как мы видим на простом примере бросания кости отсутствует процесс принятия решения.

Мы в данной статье утверждаем, что поскольку белый шум является обобщенным вероятностным или, как мы назвали его, нечетким процессом, то требуется введения процесса принятия решения, в котором можно будет выбирать то определение стохастического интеграла, которое нам нужно. В этом свете, уже не стоит вопрос кто прав, Ито или Стратонович, они все правы, а вопрос заключается в том, какой интеграл и каким образом выбрать его для белого шума в определенной задаче. Как мы видим, имеет место процесс принятия решения в нечетком процессе или, можно сказать, нечеткой среде. Как будет идти этот процесс описывается в классической работе

Р. Беллмана и Л.Заде «Принятие решения в нечеткой среде» [12]. Мы будем руководствоваться ею и конкретной задачей для нас, как физиков, могут служить задачи по флуктуациям в полупроводниках.

Исследование шума в физике

В физике исследование флуктуаций, в частности внешних флуктуаций - шумов – интересная и важная проблема [6]. Например, шумы в полупроводниках - это флуктуации тока (или напряжения) [7-11]. Как мы писали выше, в введении, для изучении белого шума используются стохастические интегралы, которые в зависимости от своего определения дают разные ответы, а именно:

По Ито: $\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - W_0^2) - \frac{t}{2}$,

По Стратоновичу: $\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - W_0^2)$,

По Климонтовичу:

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - W_0^2) + \frac{t}{2} \text{ [2-4].}$$

Вообще, стохастический интеграл может быть записан в общем виде:

$$\int_{t_0}^t W(t)dW(t) = \frac{W^2(t) - W^2(t_0)}{2} - \frac{t}{2} + \alpha(t - t_0).$$

Как мы видим, в различных определениях стохастического интеграла имеют место различные значения α. Например, для исчисления по Ито, α=0. Это левый край интервала $(t - t_0)$. Для исчисления по Стратоновичу α=0,5. Это середина интервала $(t - t_0)$. По Климонтовичу, α=1 и это уже правый край интервала $(t - t_0)$. Считается, что исчисление Ито лучше подходит для математиков при их идеализации белого шума. Для физиков же лучшим является исчисление Стратоновича. Но все равно, проблема остается, и она заключается в нахождении нужного α.

В данной статье с целью нахождения α мы будем использовать теорию принятия решения, данную Беллманом и Заде [12].

Как известно, часто из-за сложности учета всех факторов строятся модели для изучаемых явлений, процессов. Примерная схема процесса формирования модели представлена на рисунке. Как видно из этого рисунка, прежде, чем нам выбрать модель, нужно знать в каком состоянии находится система - в детерминированном или случайном. Если рассматриваемая система является случайной, то есть подверженной воздействию различных шумов, то нужно выбрать какой именно шум имеет место. В своем выборе нужно руководствоваться тем, что окончательная модель должна быть непротиворечивой. Итак, мы будем рассматривать случайную (стохастическую) систему, в кото-

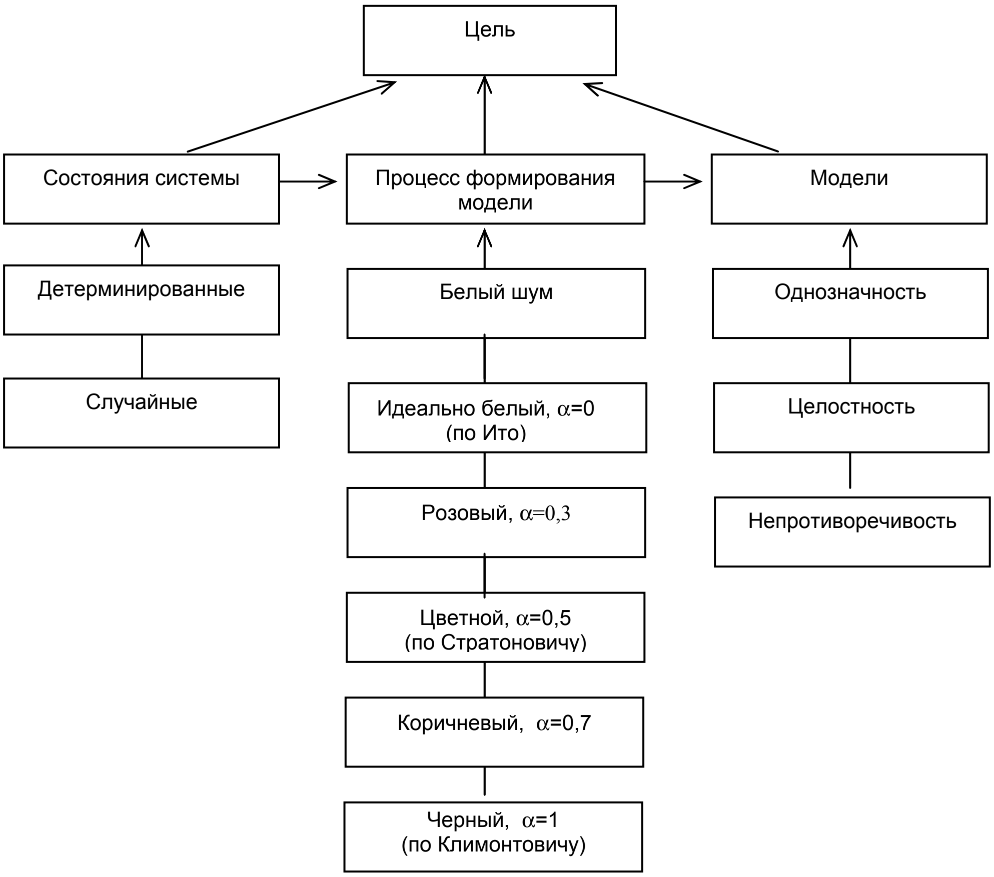

Схема процесса формирования модели

рой имеет место процесс формирования модели - многошаговый процесс. В процессе формирования модели получается много ее версий, но в конце должна быть выбрана самая подходящая. Таким образом, имеет место процесс принятия решения. Этот процесс происходит в нечеткой среде. Выражение "выбранная модель является лучшей" является неточным из-за нечеткости флуктуаций и шумов. Такая неточность связана с нечетким множеством все приемлемых моделей, где нет острой границы между принадлежностью и не принадлежностью какой-то избранной модели к нему [13]. Это получается из-за того, что, в процессе создания модели есть бесконечное число версий, и не возможно оценить частоту появления каждой версии моделей и лемма Борелли-Кантели, $\left(\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty\right)$, где А – одна из моделей, Р – ее вероятность, не удовлетворяется [14]. Таким образом, рассматриваемая система, например полупроводник, в котором флуктуируют значения тока, является случайной. Нечеткой является сама среда, сами внешние флуктуации, которые в конечном итоге приводят к тому, что процесс принятия решения происходит в нечетких условиях. Рассмотрение случайных (стохастических) систем в нечетких условиях и принятие решения там имеется в выше упомянутой фундаментальной работе Л.Заде и Р.Беллмана [12]. Еще раз повторим, что в нашем случае мы руководствуемся этой работой.

В теории нечетких множеств Л. Заде неточность, связанная с нечетким множеством А, в котором нельзя указать резкую границу между элементами, принадлежащими и непринадлежащими к нему, требует введения функции принадлежности μ_x элемента x к А. В нашем случае x - это один из вариантов моделей, А - множество удовлетворительных вариантов моделей и оно нечеткое. Опираясь на ТНМ [13] можно представить себе это так.

Пусть X={x} - совокупность всех вариантов моделей. Тогда нечеткое множество «удовлетворительных» моделей А в X есть совокупность упорядоченных пар: $\mathrm{A} = \{x, \mu(x)\}$, $x \in X$, где μ(x) - степень принадлежности *x* к *A*. Задача оценки μ(x) по известному множеству пар $\{x_1, \mu(x_1);\ x_2, \mu(x_2);....\}$- задача абстрагирования занимает центральную роль в распознавании образов [15]. Как нам кажется, к нашей задаче - распознавание наилучшего варианта модели - можно подойти с этой точки зрения. Однако, в данной работе, мы поставим другую задачу. Будем считать, что μ(x) задано для всех x∈X.

Таким образом, нам известны значения функции принадлежности μ(x) для всех x∈X. В этом случае основными элементами процесса принятия решения будут следующие этапы [12]:

а) множество альтернатив. В нашем случае это есть множество X вариантов моделей x с различными видами белого шума - идеальным, розовым, цветным, коричневым, черным и т.д.;

б) множество ограничений, с которым мы должны считаться при выборе нужной альтернативы. В нашем случае, этим будет множество моделей, взятые в различные равные интервалы времени $[t_0,\ t_1]$, $[t_1,\ t_2]$, $[t_2,\ t_3]$, … $[t_{n-1},\ t_n]$ (в стохастическом интеграле интервал времени $[t_0, t]$ разделен на n части). Обозначим эти ограничения через G_1, G_2, G_3 … G_n, соответственно;

с) функция предпочтения. Она находится в области пересечения нечетких ограничений G_1, G_2, … G_n., то есть. $G_1 \cap G_2 \cap \ldots G_n$.

Решение - это выбор одной или нескольких из имеющихся альтернатив и здесь решение-это нечеткое множество в пространстве альтернатив, получающееся в результате пересечения заданных целей и ограничений.

Совокупное влияние расплывчатых ограничений G представляется пересечением $G_1 \cap G_2 \cap \ldots Gn$. Функция принадлежности в этом случае имеет вид:

$$\mu_{G_1 \cap G_2 \cap \ldots G_n} = \mu_{G_1}(x) \wedge \mu_{G_2}(x) \ldots \wedge \mu_{Gn}(x) = \\ = \min\left(\mu_{G_1}(x), \ldots \mu_{Gn}(x)\right).$$

Пример, пусть имеется 5 альтернатив, т.е. 5 вариантов моделей с различным видом шумов. Обозначим их через X = [1,2,3,4,5] и для них заданы ограничения G_1, G_2 ...G_5, как показано в Табл.1. Ограничениями в нашей задаче являются, как было сказано выше, шумы в различные интервалы времени. Все их значения для функции принадлежностей в этой таблице взяты нами произвольно. Их нахождение, как было это отмечено выше, относится к задаче абстрагирования [15]. Повторим, что нас интересует не эта задача, а задача, как потом из всего этого набора значений для функции принадлежностей выбрать нужное значение.

Табл.1

	G	X				
		1. Белый	2. Розовый	3. Цветной	4. Коричневый	5. Черный
$[t_0,t_1]$	μ_{G_1}	0,1	0,5	1,0	0,8	0,7
$[t_1,t_2]$	μ_{G_2}	0,2	0,2	0,6	0,7	0,8
$[t_2,t_3]$	μ_{G_3}	0,3	0,4	0,2	0,5	0,9
$[t_3,t_4]$	μ_{G_4}	0,8	0,5	0,4	0,3	0,5
$[t_4,t_5]$	μ_{G_5}	0,5	0,6	0,7	0,9	0,6

Табл.2

X	1. белый	2. розовый	3. цветной	4. коричневый	5. черный
μ_D	0,1	0,2	0,2	0,3	0,5

Из этой таблицы видно, что решение есть нечеткое множество D=[(1;0,1); (2;0,2); (3;0,2); (4;0,3); (5; 0,5)]. Эти данные для ясности сведены в Табл. 2.

Как видно, оптимальное решение есть четкое подмножество D^M из нечеткого множества D, определяемое условиями:

$$\mu_{D^M}(x) = \begin{cases} \max \mu_D(x), & x \in K \\ 0 & , \quad x \notin K \end{cases},$$

где K - множество тех X, в которых $\mu_D = \max$, каждое X из D^M называется максимирующим решением.

Таким образом, $\mu_D = 0{,}5$ - оптимальное решение, X = 5 – максимизируещее решение, и короче говоря, вариант близкий к варианту № 5 более лучший из бесконечного множества вариантов.

В Табл. 2 значения $\mu_{G_1,\ldots}\mu_{G_n}$ и т.д. взяты произвольно. Оценка этих величин может идти следующим способом. Возьмем одно из ограничений - вариант с белым шумом в интервале времени $[t_0,t_1]$ - G_1. Понятно, что в модели идеальный вариант - 100% белый шум, т.е. р =100. Самый худший вариант – белого шума в этой модели вообще нет, т.е. р=0. Поэтому нечеткая цель - это "р должно быть значительно больше 0 и приближаться к 100». В этом случае, функция принадлежности для белого шума μ_{G_1}, как показано в самой работе Заде и Беллмана, может иметь вид:

$$\mu_{G_1}(p) = \min\left[\left(1 + p^{-1}\right)^{-1}; \left(1 + (p-100)^2\right)^{-1}\right],$$

где $0 \le \rho \le 100$.

Точно также μ можно взять и для других ограничений G_2, G_3… и т.д., если все эти ограничения имеют одинаковую важность. В противном случае, как показано в [15], решение D может быть выражено выпуклой комбинацией целей и ограничений с весовыми коэффициентами α,β,γ… и т.д., характеризующими относительную важность составляющих элементов. Таким образом,

$$\mu_D(x) = \alpha\mu_{G_1} + \beta\mu_{G_2} + \gamma\mu_{G_3} + \ldots.\Im\mu_{G_n},$$

где $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\Im=1$

В работе [15] рассматриваются подробно задачи, связанные с многошаговым процессом принятием решений в нечетких условиях. Как нам кажется решения этих задач могут быть нами использованы.

В процессе формообразования управляемая система может иметь различные состояния (варианты моделей) X_t , где t = 0,1….- это различные моменты времени. При этом будет иметь место входной сигнал U_t, $U_t \in U=\{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \}$. В нашем случае входным сигналом будут ограничения – шумы в различные интервалы времени α_1, α_2. Понятно, что состояние X_{t+1} зависит от X_t и U_t и поэтому описывается уравнением эволюции

$$X_{t+1} = f(X_t, U_t).$$

Пусть заданы функции принадлежности $\mu(\sigma_i)$ и $\mu(U_i)$ в определенные моменты времени. В работе [12] находятся последовательность (U_0, U_1 ... U_{n-1}), которая максимизирует решение μ_D:

$$\mu_D(U_0, U_1, \ldots U_{N-1}) = \\ = \mu_0(U_0) \wedge \ldots \mu_{N-1}(U_{N-1}) \wedge \mu_N(U_N)$$

Решение представляется в виде:

$$U_n = \pi_n(x_n),$$

где π_n -принятая стратегия, т.е. принятое правило выбора входного воздействия U_n в зависимости от реализовавшегося X_n. После этого для нахождения X_n и максимизирующего (оптимального) решения $U_0^\mu, U_1^\mu, \ldots U_{N-1}^\mu$ применяется метод динамического программирования. Как нам кажется, можно идти подобным путем и при решении нашей задачи: нахождение функций принадлежности флуктуаций для различных физических процессов.

В заключении, хочется отметить, что нечеткая логика в физике очень интересная проблема, и наша работа лишь попытка приблизиться к ней. Несомненным является то, что физические задачи с флуктуациями тесно связаны с теорией нечетких множеств Л. Заде.

Литература

1. Chung K.L. Elementary Probability Theory with Stochastic processes. – Berlin, Heidelberg, N.Y.:Springer, 1979
2. Ito K. Stochastic differential equations on a differentiable manifold.-Nagoya Math. J., Vol.1, p.35, 1950.
3. Stratonovich R.L. A new representation for stochastic integrals and equations.-SIAM J. Control, 4, p.362, 1966.
4. Klimontovich Yu.L. What are stochastic filtering and stochastic resonance? Vol.42, No.1, pp.37-44, 1999 .
5. Horsthemke W., and Lefever R. Noise-induced transitions. Theory and Applications in Physics, Chemistry and Biology. Springer-Verlag, 1984.
6. Aliev M.I., Isaeva E.A., Figarov V.R., Aliev I.M., Abdinova A.B. Study of noises in semiconductors by soft computing , International Conference on Computational Intelligence (ICCI-2004), Near East University, Nicosia, North Cyprus, May 27-29, 2004.
7. Noise and fluctuations control in electronic devices. American Scientific Publishers, ed. by Alexander A. Balandin, 400 p., 2002.
8. Klimontovich Yu.L. Nonlinear Brownian motion. Physics-Uspekhi, Vol.37, No.8, pp.737-766, 1994.
9. McClintock P.V.E. Random fluctuations Unsolved problems of noise. Nature 401, pp.23-25, 1999.
10. Van Kampen N.G. Stochastic process in Physics and Chemistry. Elsevier Science Publishers, 2n ed., 1992.
11. Drummond I.T. Multiplicative stochastic differential equations with noise-induced transitions. J. Phys. A Math. Gen. 25, No.4 , pp.2273-2296, 1992
12. Bellman R. E., and Zadeh L. A. Decision-making in a fuzzy environment. Management Science, Vol.17, pp.141-164, 1970.
13. Zadeh L.A. Fuzzy sets, inform.a.Control, 1965, 8, p.338-353.
14. Meyer P.A. Probability and Potentials, Waltham, Massachusets, Blaisdell, pub. Co, 1966, p.250.
15. Bellman R.E., Kalaba R., Zadeh L.A. Abstraction and Pattern Classification, J.Math.a.Appl.,1966, 13, p.1-7.

Алиев Максуд Исфандиярович. Заведующий отделом Института физики Национальной академии наук Азербайджана. Окончил Бакинский государственный университет в 1950 году. Академик НАНА, доктор физико-математических наук, профессор. Награжден Орденом Славы, Орденом Великой Отечественной Войны, Орденом Дружбы Народов СССР. Имеет более 300 научных статей и 1 монографию. Область научных интересов: физика полупроводников, теория нечетких множеств Л.Заде. E-mail: maksud@physics.ab.az

Исаева Эльмира Абдуллаевна. Ведущий научный сотрудник Института физики Национальной академии наук Азербайджана. Окончила Бакинский государственный университет в 1986 году. Кандидат физико-математических наук, доцент. Имеет более 40 научных статей. Область научных интересов: физика полупроводников, теория нечетких множеств Л. Заде. E-mail: elmira@physics.ab.az

Алиев Исфандияр Максуд оглы. Ведущий научный сотрудник Института физики Национальной академии наук Азербайджана. Окончил Бакинский государственный университет в 1976 году. Доктор физико-математических наук, профессор. Имеет более 100 научных статей. Область научных интересов: физика полупроводников, теория нечетких множеств Л. Заде. E-mail: maksud@physics.ab.az.