

Снижение размерности сложных геометрических объектов при наличии частных параметрических моделей

Аннотация. При решении расчетных и оптимизационных задач, использующих в качестве входных данных детальные описания геометрий объектов, необходимо решать задачу снижения размерности геометрического описания. Статья посвящена решению основанной на данных задачи снижения размерностей с учетом частных параметрических моделей. Предложенное решение проиллюстрировано на важном в прикладном отношении примере описания профилей крыла самолета.

Ключевые слова: снижение размерности, аппроксимация данных, параметрические модели данных, модель профиля крыла.

Введение

Одной из важнейших составляющих описания технического объекта составляют описания его геометрических компонент (кривых и поверхностей), используемых в CAD-системах, компьютерной графике и других приложениях. Описания геометрических объектов или их компонентов в общем случае задаются набором 2D или 3D координат точек поверхности объекта, лежащих в выбранных узлах объекта. Другие точки объекта восстанавливаются, как правило, с использованием сплайнов - например, кривых Безье (Bezier curves, сплайнов Безье), поверхностей Безье, B-сплайнов (base-splines, базовых сплайнов - например, рациональных B-сплайнов, задаваемых на неравномерной сетке - Non-Uniform Rational B-splines, NURBS) и др. Такие описания объекта состоят из десятков тысяч чисел, каждое из которых, рассматриваемое изолированно, не несет смысловой нагрузки. Примерами таких геометрических объектов являются профили крыла самолетов, описываемых множеством двумерных координат некоторого набора точек контура профиля, используя для вычисления координат промежуточных точек процедуры квадратиче-

ской или кубической интерполяции. Такие описания профилей состоят из 50 – 100 чисел.

Методы решения различных расчетных и оптимизационных задач, использующие описания геометрий объектов в качестве входных данных, не позволяют решать математические задачи с такими высокими размерностями аргументов. Например, в задаче оптимизации геометрии крыла оптимизация производится по параметрам крыла, включающим описания набора профилей, лежащих в 5 – 7 сечениях крыла, в совокупности описываемых сотнями чисел. Поэтому для таких задач необходимо в качестве первого шага решать задачу снижения размерности описания объектов из рассматриваемого класса, в том числе размерности геометрических описаний.

В работе [1] предложен общий подход к построению основанных на данных процедур снижения размерности. Однако во многих ситуациях в рассматриваемом классе объектов существуют подклассы, для которых имеются частные предметно-ориентированные аналитические модели, описывающие объекты из этих подклассов небольшим числом параметров.

Естественно, что для объектов из этих подклассов частные параметрические модели, до-

полнительно учитывающие предметно-ориентированные знания об объектах, могут иметь лучшие характеристики снижения размерности по сравнению с универсальными процедурами, но в то же время существенно проигрывать в качестве для других объектов.

В статье рассмотрена задача построения универсальной основанной на данных процедуры снижения размерности, обобщающей класс процедур из [1] и учитывающей наличие частных параметрических моделей, и предложено решение этой задачи. Построенная обобщенная процедура имеет адаптивный характер в том смысле, что если данные, на основании которых синтезируется процедура снижения размерности, близки к данным, для которых эффективна частная параметрическая модель, то построенная обобщенная процедура также будет иметь эффективность, близкую к эффективности частной параметрической модели. Кроме того, во многих случаях построенная процедура имеет более высокую эффективность (по сравнению с универсальной процедурой) и в ситуации, когда процедура синтезируется на основании произвольных данных.

1. Математическая постановка задачи снижения размерности

В данной статье мы будем придерживаться определений, введенных в работах [1], [2], адаптированных к рассматриваемой в данной статье задаче.

Пусть $B = \{b\}$ есть множество геометрических объектов рассматриваемого класса. Для каждого объекта $b \in B$ имеется его цифровое описание $X = X(b)$ размерности N .

Рассмотрим подмножество

$$D = \{X = X(b), b \in B\} \subset R^N \quad (1)$$

N -мерного евклидова пространства R^N , состоящего из цифровых описаний всех объектов рассматриваемого класса. В приложениях в силу многочисленных взаимосвязей между координатами цифровых описаний объектов (поверхности тела реальных объектов являются достаточно гладкими и обладают различными предметно-ориентированными свойствами), и поэтому множество цифровых описаний D (1) может быть аппроксимировано многообразием существенно меньшей размерности, и задача снижения размерности фактически и состоит в

построении такого аппроксимирующего многообразия.

Будем предполагать, что векторы $X \in D \subset R^N$ могут быть описаны, по крайней мере, приближенно, векторами меньшей размерности m , и задача снижения размерности состоит в построении пары преобразований:

преобразование сжатия K_m :

$$K_m: D \rightarrow \Lambda_m = \{\lambda = K_m(X), X \in D \subset R^N\} \subset R^m, \quad (2)$$

преобразующее вектор $X \in D$ в m -мерный сжатый вектор $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \Lambda_m$, и

преобразование восстановления K_m^- :

$$K_m^-: \Lambda_m \rightarrow D_m(\Lambda) = \{K_m^-(\lambda), \lambda \in \Lambda_m \subset R^m\} \subset D \subset R^N, \quad (3)$$

преобразующее m -мерный сжатый вектор λ в «полноразмерный» вектор $X(\lambda) \in D$.

Качество процедуры снижения размерности, определяемой тройкой $\Sigma = \{m, K_m, K_m^-\}$, примененной к конкретному вектору X , будем характеризовать некоторой мерой близости $\rho(X) = \rho(X, X^*)$ между исходным вектором X и восстановленным вектором $X^* = K_m^-(K_m(X))$. Например, в качестве метрики ρ можно выбрать среднеквадратичное расстояние

$$\rho(X) = \|X - K_m^-(K_m(X))\|, \quad (4)$$

где $\|\cdot\|$ есть обычная L_2 -норма в N -мерном евклидовом пространстве R^N .

Результат усреднения $R = R(m, K_m, K_m^-)$ величин ρ по множеству D рассматривается как интегральная характеристика качества процедуры. Задача снижения размерности состоит в выборе минимального числа m и процедур $\{K_m, K_m^-\}$ таких, что величина R не превосходит заданного значения ε .

Параметрическая модель для класса объектов B предполагает, что имеется некоторый набор параметров $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ (характеристик объекта), с помощью которых может быть построено приближенное цифровое описание $X(\lambda(b))$ любого объекта $b \in B$. В терминах снижения размерности параметрическая модель формально соответствует паре преобразований снижения размерности:

$$\begin{aligned} K_m: X = X(b) &\rightarrow \lambda = \lambda(b); \\ K_m^-: \lambda = \lambda(b) &\rightarrow X^* = X^*(b). \end{aligned} \quad (5)$$

Процедуры снижения размерности, основанные на данных, строятся в предположении, что вся информация о множестве D содержится в конечной выборке:

$$D_n = \{X_1, X_2, \dots, X_n\} \subset D \quad (6)$$

объема n , и выборка (6) является достаточно «репрезентативной», содержащей описания $X = X(b)$ достаточного числа типичных представителей b из класса всех объектов B . Интегральная характеристика R заменяется своим выборочным аналогом R_n - результатом усреднения величин ρ по конечному множеству D_n . Например, в случае среднеквадратичной метрики (4) в качестве R_n берется величина

$$R_n = R_n(\Sigma|D_n) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|X_i - K_m(K_m^-(X_i))\|^2}. \quad (7)$$

Стандартная задача снижения размерности состоит в построении процедуры снижения размерности $\Sigma = \Sigma(D_n)$ такой, что при заданной размерности m величина (7) имеет минимальное значение (в заданном классе процедур), а размерность m имеет минимальное значение при условии, что величина (7) не превышает заданного значения ε .

2. Геометрическая интерпретация задачи снижения размерности

Следуя подходам работ [1, 2], заметим, что для произвольной процедуры снижения размерности $\Sigma = \{m, K_m, K_m^-\}$ преобразование восстановления $K_m^-(3)$ определяет в пространстве R^N m -мерное многообразие

$$D_m(\Lambda) = \{K_m^-(\lambda), \lambda \in \Lambda_m \subset R^m\} \subset R^N, \quad (8)$$

которое аппроксимирует множество цифровых описаний (1). Точки многообразия (8) параметризованы с помощью m -мерного параметра $\lambda \in \Lambda_m$, который можно считать внутренними координатами точек на многообразии (8).

Отсюда следует [2], процедура сжатия K_m фактически «проектирует» заданный N -мерный вектор X на многообразие $D_m(\Lambda)$ (8), а именно, определяет вектор внутренних координат $\lambda(X)$, соответствующий проекции $X^* = K_m^-(\lambda(X))$ вектора X на многообразие $D_m(\Lambda)$.

Ошибка процедуры снижения размерности равна расстоянию $\rho(X) = \rho(X, X^*)$ между век-

тором X и его проекцией $X^* = K_m^-(\lambda(X))$ (в выбранной метрике ρ). Поэтому [2] для произвольного вектора X наилучшая процедура сжатия K_m^* должна определять точку X_{opt}^* на многообразии $D_m(\Lambda)$, ближайшую к X . Рассмотрим новую процедуру сжатия

$$K_m^*(X) = \lambda^*(X) = \arg \min_{\lambda} \rho(X, K_m^-(\lambda)), \quad (9)$$

определяющую внутреннюю координату $\lambda^*(X)$ точки X_{opt}^* на многообразии $D_m(\Lambda)$.

Тогда для произвольной процедуры сжатия (m, K_m, K_m^-) всегда имеет место неравенство:

$$R(m, K_m^*, K_m^-) \leq R(m, K_m, K_m^-). \quad (10)$$

3. Обобщенная процедура снижения размерности

Предположим, что имеется подкласс $B_0 \subset B$, для которого имеется частная параметрическая модель M_0 , которая описывает множество объектов B_0 с помощью N -мерной параметрической функции

$$F(\gamma) = (F_1(\gamma), F_2(\gamma), \dots, F_N(\gamma)), \quad (11)$$

зависящей от k -мерного параметра $\gamma \in \Gamma \subset R^k$, отображающей вектор $\gamma(b) \in \Gamma$ размерности k в цифровое описание объекта $X(b) = F(\gamma(b)) \in R^N$. Рассматриваемая в статье задача состоит в построении процедуры снижения размерности $\Sigma = \Sigma(D_n)$, основанной на выборке D_n (6), при условии, что известна частная параметрическая модель M_0 .

Модель M_0 определяет в пространстве R^N k -мерное многообразие

$$D_0(\Gamma) = \{F(\gamma), \gamma \in \Gamma \subset R^k\} \subset R^N. \quad (12)$$

Рассмотрим процедуру снижения размерности $\Sigma(M_0) = \{k, C_k, C_k^-\}$, состоящей из наилучшей процедуры сжатия

$$C_k(X) = \gamma(X) = \arg \min_{\gamma} \rho(X, F(\gamma)), \quad (13)$$

получающейся путем проектирования вектора X на многообразие $D_0(\Gamma)$ (12). Соответствующая процедура восстановления C_k^- равна:

$$C_k^-(\gamma) = F(\gamma). \quad (14)$$

Пусть далее обычная евклидова метрика (4) выбрана в качестве метрики ρ . Для выбранного вектора $X \in D$ построим $(N - k)$ -мерное аф-

финное подпространство $L(\gamma(X))$, проходящее через точку $F(\gamma(X)) \in D_0(\Gamma)$ и ортогональное к N -мерным векторам

$$e_t(\gamma(X)) = (e_{t1}(\gamma(X)), e_{t2}(\gamma(X)), \dots, e_{tN}(\gamma(X))) \in R^N, \quad t = 1, 2, \dots, k, \quad (15)$$

где

$$e_{tr}(\gamma) = \frac{\partial F_r(\gamma)}{\partial \gamma_t}, \quad t = 1, 2, \dots, k, \quad r = 1, 2, \dots, N. \quad (16)$$

Основываясь на подходе, основанном на построении ортогональных нелинейных многообразий проектирования [2], предлагается обобщенная процедура снижения размерности. В этой процедуре после применения процедуры сжатия, основанной на частной параметрической модели, строится новая процедура снижения размерности для остатков – разностей между исходными векторами X и их проекциями $F(\gamma(X))$ (результатами восстановления сжатого вектора $\gamma(X)$ с использованием частной параметрической модели как процедуры сжатия).

Предложенная процедура состоит из нескольких шагов.

Шаг 1. Для каждого вектора $X_j \in D_n$, принадлежащего заданной выборке D_n (6), строится проекция $X_j^* = F(\gamma(X_j)) \in D_0(\Gamma)$, где в соответствии с (13):

$$\gamma(X_j) = \arg \min_{\gamma} \|X_j - F(\gamma)\|. \quad (17)$$

Шаг 2. Обозначим

$$G_n = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\} \subset R^N, \quad (18)$$

где

$$Y_j = X_j - F(\gamma(X_j)), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

N -мерные остаточные векторы. По построению, каждый вектор Y_j (17) принадлежит аффинному подпространству $L(\gamma(X_j))$.

Шаг 3. Пусть процедура $\Sigma(G_n) = \{s, E_s, E_s^-\}$ – некоторая выбранная процедура снижения размерности, построенная по выборке G_n (18), сжимающая N -мерный вектор Y в s -мерный вектор

$$\beta = \beta(Y) = E_s(Y) \in U = \{E_s(X - F(\gamma(X))), X \in D\} \subset R^s. \quad (20)$$

Обозначим $\Phi(\beta)$ N -мерную вектор-функцию, зависящую от s -мерного параметра β , которая реализует процедуру восстановления E_s^- (строит восстановленный вектор $Y^* = \Phi(\beta(Y))$ по сжатому вектору $\beta(Y)$ (20)).

Шаг 4. Для $\gamma \in \Gamma$ обозначим $\Phi(\beta|\gamma)$ проекцию N -мерной вектор-функции $\Phi(\beta)$ на $(N - k)$ -мерное аффинное подпространство $L(\gamma)$, проходящее через точку $F(\gamma) \in D_0(\Gamma)$ и ортогональное к N -мерным векторам $e_t(\gamma)$, $t = 1, 2, \dots, k$, (15), (16). Пусть

$$S(\gamma) = \{\beta(X - F(\gamma)|\gamma): X \in D \cap L(\gamma)\} \quad (21)$$

множество возможных значений вектора $\beta(X - F(\gamma)|\gamma)$.

Функция $\Phi(\beta|\gamma)$ определяет в $L(\gamma)$ s -мерное многообразие

$$H(\gamma) = \{y = \Phi(\beta|\gamma), \beta \in S(\gamma)\} \subset L(\gamma). \quad (22)$$

Шаг 5. Для произвольного вектора $Y \in G = \{X - F(\gamma(X)), X \in D\}$ обозначим $\Phi(\beta(Y)|\gamma)$ его проекцию на многообразие $H(\gamma)$ (22), внутренняя координата $\beta(Y|\gamma)$ которой на многообразии $H(\gamma)$ определяется из условия

$$\beta(Y|\gamma) = \arg \min_{\beta \in S(\gamma)} \|Y - \Phi(\beta|\gamma)\|. \quad (23)$$

Шаги 1 – 5 определяют финальную процедуру сжатия размерности $\Sigma = \{m, K_m, K_m^-\}$, состоящую в следующем:

- $m = k + s$;
- процедура сжатия K_m преобразует N -мерный вектор $X \in D$ в m -мерный вектор $\lambda(X)$:

$$K_m(X) = \lambda(X) = (\gamma(X); \beta(X)); \quad (24)$$

состоящий из двух компонент: k -мерного вектора $\gamma(X)$ и s -мерного вектора $\beta(X - F(\gamma(X))|\gamma(X))$;

- процедура восстановления K_m^- преобразовывает m -мерный вектор $\lambda = (\gamma; \beta)$, где $\gamma \in \Gamma \subset R^k$, $\beta \in S(\gamma)$, по формуле:

$$K_m^-(\gamma; \beta) = F(\gamma) + \Phi(\beta|\gamma). \quad (25)$$

4. Пример

Рассмотрим детально описанный в работе [1] реальный пример геометрических объектов – профилей, описываемых одномерными кривыми в двумерном пространстве (Рис. 1). С помощью профилей задаются плоские сечения многих инженерных объектов (крыльев и хвостового оперения самолета, лопастей винта и т.п.), и возможность снижения размерности описания профилей во многом определяет возможности моделирования и оптимизации указанных объектов.

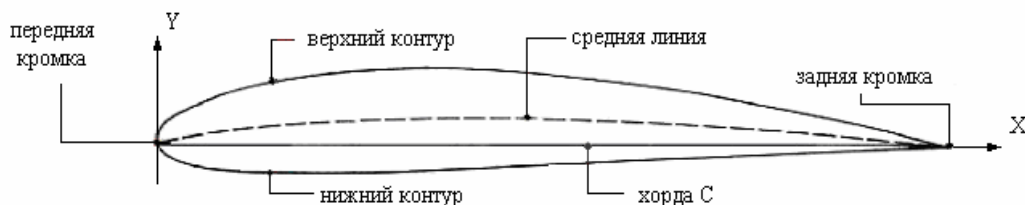


Рис. 1. Вид и элементы профиля

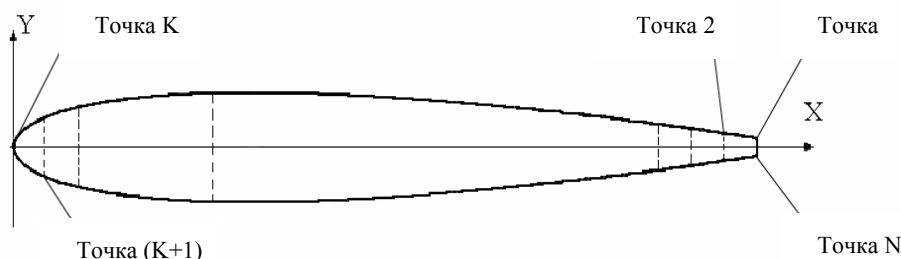


Рис. 2. Координатное задание профиля

Передняя кромка профиля условно разбивает его контур на нижнюю и верхнюю части контура, которые в общем случае задаются функциями $y''(x)$ и $y'(x)$, описывающими верхнюю и, соответственно, нижнюю части контура профиля в системе координат профиля OXY .

Цифровое описание профилей состоит из набора координат выбранных точек профиля (Рис. 2). При описании аэродинамических профилей крыла число координат N имеет порядок $50 \div 100$ [3].

Известны параметрические семейства аэродинамических профилей NACA, предложенные National Advisory Committee for Aeronautics (NACA) [4, 5], которые задают частные параметрические модели.

Рассмотрим в качестве модели $M_0(t)$ параметрическое семейство профилей NACA-4, имеющих заданную толщину t (максимум величины $(y''(x) - y'(x))$) и длину хорды $C = 1$. Эти профили описываются уравнениями контура профиля, заданные с помощью двумерного ($k = 2$) параметра $\gamma = (m, p)$, имеющего содержательный смысл, следующим образом:

- точки верхнего и нижнего контуров имеют координаты:

$$\begin{aligned} & (x - y(x, t) \sin(\theta(x)), y_c(x) + y(x, t) \cos(\theta(x))), \\ & (x + y(x, t) \sin(\theta(x)), y_c(x) - y(x, t) \cos(\theta(x))) \end{aligned} \quad (26)$$

соответственно, где:

- функция $y_c(x)$ равна:

$$\begin{aligned} y_c(x) &= \frac{m}{p^2} (2px - x^2) \\ &\quad \text{для } 0 \leq x \leq p \\ y_c(x) &= \frac{m}{(1-p)^2} [(1-2p) + 2px - x^2] \\ &\quad \text{для } p \leq x \leq C \end{aligned} \quad ; \quad (27)$$

- функция $y(x, t)$ равна:

$$\begin{aligned} y_t(x) &= \frac{t}{0.2} (0.2969\sqrt{x} - 0.1260x - 0.3516x^2 + \\ &\quad + 0.2843x^3 - 0.1015x^4) \end{aligned} \quad (28)$$

- угол $\theta(x)$ равен:

$$\theta(x) = \arctan\left(\frac{dy_c(x)}{dx}\right). \quad (29)$$

Параметрическая модель (26) – (29) определяет, конечно, процедуру снижения размерности цифрового описания профиля до размерности $k = 2$, и, следовательно, определяет Шаг 1 процедуры (величины, определенные в формулах (11) – (16)). Однако в общем случае ошибка восстановления (4) для произвольного исходного профиля может быть большой (это связано с тем, что модель NACA-4 описывает очень узкий класс возможных профилей), и среднеквадратическое усреднение векторов остатков (18), (19) может быть больше заданного значения ϵ .

Поэтому для достижения нужной точности восстановления необходимо использовать

предложенную обобщенную процедуру снижения размерности для множества остатков, вычисляемых на Шаге 2 обобщенной процедуры.

В качестве процедуры снижения размерности $\Sigma(G_n)$ для остаточных векторов G_n (Шаг 3) может быть применен любой метод. Например, может быть использован предложенный в [1] подход, основанный на последовательном применении процедуры линейного сжатия (с использованием итеративного метода главных компонент [6]) и процедуры нелинейного сжатия (с использованием обобщенных нелинейных репликативных нейронных сетей [7]).

На Шаге 4 выбранная процедура снижения размерности модифицируется, используя описанную в разделе 2 операцию проектирования, результатом чего будет снижения ошибки восстановления.

На Шаге 5 идентифицируется итоговая обобщенная процедура снижения размерности.

Для применения предложенной процедуры были разработаны дополнительные численные процедуры построения N-мерных цифровых описаний профилей из класса НАСА-4, а также численные процедур решения оптимизационных задач для процедур проектирования.

Проведенные вычислительные эксперименты показали высокое качество предложенной обобщенной процедуры снижения размерности профилей.

Заключение

Предложена обобщенная процедура снижения размерности для задач, в которых известны

частные параметрические модели. Проведенные вычислительные эксперименты с реальными данными показали высокое качество предложенной обобщенной процедуры снижения размерности.

Литература

1. А.В. Бернштейн, А.П. Кулешов. Когнитивные технологии в проблеме снижения размерности описания геометрических объектов. Информационные технологии и вычислительные системы, 2008, №2, с. 6 – 19..
2. Бернштейн А.В., Кулешов А.П. Построение ортогональных нелинейных многообразий в задачах снижения размерности. Тезисы докладов VII Международной школы-семинара «Многомерный статистический анализ и эконометрика» (Цахкадзор, 2008) 2008, с. 25 – 27..
3. Кашафутдинов С.Т., Лушин В.Н. Атлас аэродинамических характеристик крыловых профилей, Новосибирск, 1994.
4. E. N. Jacobs, K. E. Ward, & R. M. Pinkerton 1933 The characteristics of 78 related airfoil sections from tests in the variable-density wind tunnel, NACA Report No. 460.
5. E. N. Jacobs & R. M. Pinkerton 1936 Test in the variable-density wind tunnel of related airfoils having the maximum camber unusually far forward, NACA Report No. 537.
6. Бурнаев Е.В., Чернова С.С. Об итеративном алгоритме подсчета взвешенных главных компонент. Информационные процессы (электронный научный журнал <http://www.iip.ru/Contents.htm>), 2008, т. 8, № 2, с. 99 – 107.
7. Бернштейн А.В., Кулешов А.П. Задачи снижения размерности моделей сложных объектов. Вторая Международная конференция «Системный анализ и информационные технологии» САИТ-2007 (10 – 14 сентября 2007 г., г. Обнинск, Россия): Труды конференции. Т. 1, стр. 243 – 247.

Иванова Елена Петровна. Старший научный сотрудник лаборатории когнитивных методов анализа данных и моделирования Института системного анализа РАН. Окончила Московский авиационный институт имени Серго Орджоникидзе в 1972 году. Кандидат технических наук. Автор более 10 научных работ. Область научных интересов: математическое моделирование, анализ и обработка данных, искусственный интеллект, системы поддержки принятия решений.

Чернова Светлана Станиславовна. Старший научный сотрудник лаборатории когнитивных методов анализа данных и моделирования Института системного анализа РАН. Окончила факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ им. Ломоносова в 1983 году. Кандидат технических наук, лауреат премии имени Ленинского комсомола. Автор 15 печатных научных работ. Область научных интересов: математическое моделирование, анализ и компьютерная обработка данных, искусственный интеллект, системы поддержки принятия решений.