

Анализ устойчивости результатов выбора при частичном отношении предпочтения¹

Аннотация. Предлагается подход к анализу устойчивости (чувствительности к изменению значений параметров модели ситуации выбора) множества недоминируемых вариантов. Показывается, что в рамках разработанного подхода анализ чувствительности решения многокритериальной задачи выбора, полученного методами теории важности критериев, можно эффективно провести при помощи методов линейного программирования.

Ключевые слова: анализ чувствительности, частичное отношение предпочтения, недоминируемые варианты, многокритериальные задачи, коэффициенты важности, веса критериев.

Введение

Важной для приложений и интересной в теоретическом отношении является проблема оценки устойчивости или чувствительности решения к изменению ситуации выбора. Можно выделить непараметрический и параметрический подходы к анализу устойчивости. К первому относится, например, анализ устойчивости множества Парето [1, 2]. Известные подходы к параметрическому анализу чувствительности предполагают, что предпочтения моделируются при помощи функции ценности, или полезности (обычно аддитивной), зависящей от параметров (чаще всего от весов критериев), и опираются на понятия потенциально оптимального и смежного потенциально оптимального объектов [3-6]. Однако для частичного отношения предпочтения эти понятия не применимы, и требуется создание нового подхода к параметрическому анализу чувствительности. Этому и посвящена данная статья.

1. Определения и показатели устойчивости выбора

Рассматривается дискретная задача единичного выбора (выделения одного наиболее пред-

почтительного варианта из заданного конечного множества всех вариантов) при неполной информации о предпочтениях лица, принимающего решение (ЛПР). Математическая модель ситуации выбора имеет вид:

$$\langle X, R(\alpha), A \rangle, \quad (1)$$

где $X = \{x^1, \dots, x^j, \dots, x^n\}$ – множество вариантов (стратегий, планов, альтернатив, ...); $R(\alpha)$ – параметрическое отношение нестрогого предпочтения на множестве X . Параметр α может иметь произвольную природу, в частности, быть m -мерным вектором. Предполагается, что множество A возможных значений параметра α содержит не менее двух элементов.

При фиксированном значении $\alpha \in A$ отношение нестрогого предпочтения $R(\alpha)$ есть частичный квазипорядок, т.е. оно рефлексивно и транзитивно, и порождает отношения (строгого) предпочтения $P(\alpha)$, безразличия $I(\alpha)$ и несравнимости $N(\alpha)$:

$$x^j P(\alpha) x^t \Leftrightarrow x^j R(\alpha) x^t \text{ верно, но } x^t R(\alpha) x^j \text{ неверно;}$$

$$x^j I(\alpha) x^t \Leftrightarrow \text{верно и } x^j R(\alpha) x^t, \text{ и } x^t R(\alpha) x^j;$$

$$x^j N(\alpha) x^t \Leftrightarrow \text{неверно ни } x^j R(\alpha) x^t, \text{ ни } x^t R(\alpha) x^j.$$

Поскольку $R(\alpha)$ есть квазипорядок, то отношение $P(\alpha)$ оказывается порядком (оно иррефлексивно и транзитивно), а отношение безразличия

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке лаборатории «Методы выбора и анализа решений» Государственного университета – Высшей школы экономики.

$I(\alpha)$ – эквивалентностью (оно рефлексивно, симметрично и транзитивно). Вариант x^j называется *недоминируемым* или *максимальным по $P(\alpha)$* , если не существует *доминирующего над ним* варианта x^t , т.е. такого, что верно $x^t P(\alpha) x^j$. Множество недоминируемых вариантов $X(\alpha)$ не пусто и, более того, внешне устойчиво: если $x^t \notin X(\alpha)$, то найдется вариант $x^j \in X(\alpha)$, такой, что выполнено $x^j P(\alpha) x^t$.

Если первоначально задано параметрическое отношение $P(\alpha)$ строгого предпочтения на X , которое при фиксированном значении $\alpha \in A$ является строгим частичным порядком, то отношением нестрогого предпочтения $R(\alpha)$ можно получить путем объединения отношения $P(\alpha)$ и отношения равенства на X , и тогда окажутся применимыми все дальнейшие определения и результаты.

Пусть $\alpha^* \in A$ – выделенное значение параметра α . Это значение задается ЛПР или же получается подходящим способом на основе информации о его предпочтениях. Для выделенного значения α^* решением рассматриваемой задачи выбора является множество $X^* = X(\alpha^*) = \{x^{*1}, \dots, x^{*l}, \dots, x^{*L}\}$ вариантов, недоминируемых по отношению $P(\alpha^*)$. Практически, как правило, $L > 1$, причем X^* содержит не сравнимые по отношению $R(\alpha^*)$ пары вариантов, т.е. такие варианты x^j и x^t , для которых неверно ни $x^j R(\alpha^*) x^t$, ни $x^t R(\alpha^*) x^j$.

Так как ЛПР может быть не уверено в том, что следует ограничиться рассмотрением только одного, выделенного значения параметра α^* , то возникает вопрос о том, насколько допустимо изменить параметр α , чтобы результат выбора – множество X^* – не изменился. Решение этого вопроса и является целью анализа устойчивости или чувствительности.

Поскольку под решением рассматриваемой задачи выбора при неполной информации о предпочтениях понимается все множество недоминируемых вариантов $X^* = X(\alpha^*)$, то будем вначале оценивать чувствительность к изменению значения α^* параметра α каждого варианта из этого множества по отдельности (что представляет и самостоятельный интерес), а затем уже характеризовать устойчивость множества X^* в целом.

Введем ряд необходимых понятий и определений. Пусть $x^{*l} \in X^*$ – произвольный фиксиро-

ванный недоминируемый по отношению $P(\alpha^*)$ вариант.

Определение 1. Вариант x^j называется *потенциально доминирующим над вариантом x^{*l}* , если найдется значение $\alpha^{jl} \in A$ параметра α , такое, при котором верно $x^j P(\alpha^{jl}) x^{*l}$.

Обозначим через A^{jl} множество значений параметра α , при которых вариант x^j доминирует над вариантом x^{*l} . Понятно, что вариант x^j является потенциально доминирующим над x^{*l} , когда множество A^{jl} не пусто.

Пусть $X^{\downarrow l}$ – множество вариантов, потенциально доминирующих над x^{*l} , а $J^{\downarrow l}$ – множество номеров таких вариантов.

Определение 2. Вариант x^{*l} называется *абсолютно нечувствительным* (к изменению значения α^*), или *глобально устойчивым*, или же *абсолютно устойчивым*, если не существует потенциально доминирующих над ним вариантов, т.е. множество $X^{\downarrow l} = \emptyset$.

Понятно, что вариант x^{*l} глобально устойчив, когда $\bigcup_{j \neq l} A^{jl} = \emptyset$.

Для оценки степени чувствительности варианта, не являющегося глобально устойчивым, необходимо иметь возможность оценивать удаленность одного из значений параметра α от другого. Поэтому далее предполагается, что на множестве $A \times A$ задана функция d , значение которой $d(\alpha', \alpha'')$ есть расстояние от одной из точек α' и α'' множества A до другой. Степень устойчивости объекта x^{*l} относительно потенциально доминирующего над ним объекта x^j можно оценить величиной расстояния d^{jl} от точки α^* до множества A^{jl} :

$$d^{jl} = \inf_{\alpha \in A^{jl}} d(\alpha, \alpha^*). \quad (2)$$

Степень устойчивости (в целом) объекта x^{*l} можно характеризовать наименьшим значением d^l величин d^{jl} для всех потенциально доминирующих над ним объектов:

$$d^l = \min_{j \in J^{\downarrow l}} d^{jl}. \quad (3)$$

Величину d^l целесообразно соотнести с возможным максимальным изменением значения параметра α^* . Следуя [3], введем в рассмотрение величину

$$D = \sup_{\alpha \in A} d(\alpha, \alpha^*) \quad (4)$$

(предполагается, что $D < +\infty$). Для оценки степени чувствительности варианта x^{*l} к изменению

значения параметра α^* будем использовать относительный показатель

$$\delta^l = \frac{d^l}{D}. \quad (5)$$

Отметим, что формально, если $A^{j^l} = \emptyset$, то, согласно (2), $d^{j^l} = +\infty$. Поэтому для абсолютно устойчивого варианта x^{*l} по определению принимаем $\delta^l = d^{j^l} = +\infty$.

Если вариант x^{*l} не является глобально устойчивым, то для него, согласно (3)-(5), $0 \leq \delta^l \leq 1$, причем, чем меньше значение δ^l , тем менее устойчив этот вариант. Если оказывается, что $\delta^l = 0$, то такой вариант x^{*l} можно назвать *абсолютно неустойчивым* или *сверхчувствительным*. При $0 < \delta^l < 1$ вариант x^{*l} можно считать *локально устойчивым* или *локально нечувствительным*, причем, чем меньше величина δ^l , тем менее устойчив (более чувствителен) этот вариант. На практике иногда бывает удобно выразить относительную величину δ^l в процентах.

Для варианта x^{*l} , который не является абсолютно устойчивым, может оказаться, что $\delta^l = 1$. Действительно, пусть $X = \{x^1, x^2\}$, $A = \{\alpha', \alpha''\}$, $d(\alpha', \alpha'') = b > 0$, $x^1 P(\alpha') x^2$, но $x^2 P(\alpha'') x^1$. При $\alpha^* = \alpha'$ множество X^* состоит из единственного варианта x^1 , но он, очевидно, не является абсолютно устойчивым, и для него $A^{2^1} = \{\alpha''\}$. Согласно (2)-(5) имеем: $d^{2^1} = d^2 = b$, $D = b$, $\delta^2 = 1$.

Для оценки степени устойчивости множества недоминируемых объектов $X^* = \{x^{*1}, \dots, x^{*l}, \dots, x^{*L}\}$ в целом можно было бы использовать показатель $\delta = \min_{l \in \{1, \dots, L\}} \delta^l$. Однако он обладает тем недостатком, что учитывает возможность потенциального доминирования одних вариантов из X^* над другими, что противоречит самой идее оценивания устойчивости множества X^* как единого целого. Поэтому для указанной цели предлагается использовать показатель δ^* , получаемый следующей модификацией показателя δ . Для фиксированного варианта $x^{*l} \in X^*$ пусть X^l – множество вариантов из $X \setminus X^*$, потенциально доминирующих над x^{*l} , J^l – множество номеров таких вариантов, $d^{*l} = \min_{j \in J^l} d^{jl}$, $\delta^{*l} = d^{*l} / D$. Тогда

$$\delta^* = \min_{l \in \{1, \dots, L\}} \delta^{*l}. \quad (6)$$

Определение 3. Вариант x^j называется *безусловно нестрого доминирующим* над вариантом x^t , если $x^j R(\alpha) x^t$ верно при любых значениях $\alpha \in A$.

Если вариант x^j безусловно нестрого доминирует над вариантом x^t , то будем писать $x^j R(A) x^t$.

Теорема 1. Справедливы следующие утверждения:

1.1. Если недоминируемый по отношению $P(\alpha^*)$ вариант x^{*l} безусловно нестрого доминирует над вариантом x^j , то вариант x^j не является потенциально доминирующим над x^{*l} .

1.2. Если вариант x^j безусловно нестрого доминирует над вариантом x^t , но не является потенциально доминирующим над x^{*l} , то и x^t не является потенциально доминирующим над x^{*l} .

1.3. Если вариант x^j безусловно нестрого доминирует над вариантом x^t , который является потенциально доминирующим над x^{*l} , то и x^j является потенциально доминирующим над x^{*l} , причем $A^{t^l} \subseteq A^{j^l}$.

Доказательство этой теоремы несложно провести методом «от противного». Покажем, например, справедливость утверждения 1.1. Допустим, что вариант x^j является потенциально доминирующим над вариантом x^{*l} , так что, согласно определению 1, найдется значение $\alpha^{j^l} \in A$, такое, что верно $x^j P(\alpha^{j^l}) x^{*l}$. Но, по условию, справедливо $x^{*l} R(A) x^j$, так что верно и $x^{*l} R(\alpha^{j^l}) x^j$. Однако соотношения $x^j P(\alpha^{j^l}) x^{*l}$ и $x^{*l} R(\alpha^{j^l}) x^j$ не могут выполняться одновременно. Получилось противоречие, и утверждение 1.1 доказано.

Теорема 1 оказывается весьма полезной на практике, так как позволяет существенно сократить объем необходимых расчетов при проведении анализа устойчивости. Действительно, пусть оценивается степень устойчивости фиксированного недоминируемого варианта x^{*l} . Для этого не обязательно соотносить его с каждым из остальных $n-1$ вариантов x^j . Если оказывается, что для варианта x^j верно $x^{*l} R(A) x^j$, то, в силу утверждения 1.1, вариант x^j не может быть потенциально доминирующим над вариантом x^{*l} и его можно исключить из дальнейшего анализа устойчивости варианта x^{*l} . Если ранее было установлено, что вариант x^j не является потенциально доминирующим над вариантом x^{*l} и верно $x^j R(A) x^t$, то и вариант x^t , как показывает утверждение 1.2, не является потенциально доминирующим над вариантом x^{*l} , и его также можно далее не рассматривать. Если же было установлено, что вариант x^t является потенциально доминирующим и верно

$x^j R(A)x^t$, то и вариант x^j , согласно утверждению 1.3, является потенциально доминирующим; более того, при расчете расстояния d^t согласно (3) вариант x^t можно исключить, не вычисляя для него значений d^{tl} .

Безусловное нестрогое доминирование, т.е. справедливость соотношения $x^j R(A)x^t$ для некоторых пар вариантов x^j и x^t , типично для задач многокритериального выбора.

2. Анализ устойчивости результатов многокритериального выбора, полученных методами теории важности критериев

В теории важности критериев [7], основанной на строгих определениях базовых понятий «Один критерий важнее другого» и «Один критерий важнее другого во столько-то раз», для различных видов информации о важности критериев и ценности градаций их шкалы введен целый ряд параметрических отношений нестрогого предпочтения. Здесь ограничимся рассмотрением задачи многокритериального выбора, когда получены точные количественные оценки важности критериев, имеющих порядковую шкалу [7-9].

Математическая модель ситуации выбора в рассматриваемом случае, конкретизирующая модель (1), выглядит следующим образом:

$$\langle X, K, Z_0, R(\alpha), A \rangle. \quad (7)$$

В модели (7), как и в модели (1), $X = \{x^1, \dots, x^j, \dots, x^n\}$ – это множество объектов; $K = (K_1, \dots, K_m)$ – векторный критерий, состоящий из $m \geq 2$ частных критериев $K_1, \dots, K_m$, которые являются функциями, определенными на множестве вариантов X и имеющими одну и ту же область значений – общую шкалу

$$Z_0 = \{1, \dots, k, \dots, q\}. \quad (8)$$

Числа $1, \dots, q$ в (8) суть номера градаций шкалы критериев и отражают лишь упорядоченность градаций по предпочтительности: чем номер больше, тем градация предпочтительнее. Каждый вариант x^j характеризуется соответствующим значением векторного критерия – векторной оценкой $K(x^j) = (K_1(x^j), \dots, K_m(x^j))$.

Количественная информация о важности критериев представляется в виде коэффициентов важности – числовых параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, удовлетворяющих ограничениям:

$$\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_m > 0; \quad (9)$$

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_m = 1. \quad (10)$$

Поскольку практически количественные оценки важности критериев целесообразно вводить после получения более простых и надежных качественных оценок [7], то на величины коэффициентов важности накладываются соответствующие ограничения.

Пусть Ω – качественная информация о важности критериев, состоящая из суждений (сообщений) типа «Критерий K_i важнее критерия K_j » ($i \succ j$) и «Критерии K_i и K_j равноважны» ($i \approx j$) и порождающая на X отношение нестрогого предпочтения R^Ω [7, 10]. Тогда на величины коэффициентов важности налагаются следующие дополнительные ограничения:

$$\text{если } i \approx j \in \Omega, \text{ то } \alpha_i = \alpha_j; \quad (11)$$

$$\text{если } i \succ j \in \Omega, \text{ то } \alpha_i > \alpha_j. \quad (12)$$

Система всех ограничений (9)-(12), состоящая из линейных равенств и неравенств, задает множество A возможных значений векторного параметра – вектора коэффициентов важности $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Далее предполагается, что информация о важности критериев Ω непротиворечива [7, 10], так что система указанных ограничений совместна. Если качественной информации нет ($\Omega = \emptyset$), то множество A задается только ограничениями (9), (10).

Введем в рассмотрение функцию

$$f_{ik}^j = f(i, j, k) = \begin{cases} 1, & K_i(x^j) \geq k, \\ 0, & K_i(x^j) < k, \end{cases} \quad (13)$$

$$i = 1, \dots, m, k = 2, \dots, q, j = 1, \dots, n.$$

Решающее правило, задающее отношение нестрогого предпочтения $R(\alpha)$ на множестве объектов X для фиксированного значения $\alpha \in A$, можно представить следующим образом:

$$x^j R(\alpha)x^t \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m \alpha_i f_{ik}^j \geq \sum_{i=1}^m \alpha_i f_{ik}^t, \quad (14)$$

$$k = 2, \dots, q.$$

Отметим, что $x^j P(\alpha)x^t$ верно тогда и только тогда, когда выполняются все неравенства в (14), причем хотя бы одно из них строгое.

Значение $\alpha^* \in A$ (точечная оценка количественной важности критериев) устанавливается на основе информации, получаемой от ЛППР [8, 9]. В соответствии с (14) для α^* определяется отношение $R(\alpha^*)$ и затем выделяется множе-

ство недоминируемых по отношению $P(\alpha^*)$ вариантов $X^* = X(\alpha^*) = \{x^{*1}, \dots, x^{*l}, \dots, x^{*L}\}$.

Согласно определению 1, вариант x^j является потенциально доминирующим над вариантом x^{*l} , если не пусто множество A^{jl} значений α , удовлетворяющих системе линейных ограничений (14), состоящей из $q-1$ неравенств:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f_{ik}^j \geq \sum_{i=1}^m \alpha_i f_{ik}^l, \quad k = 2, \dots, q, \quad (15)$$

среди которых должно быть хотя бы одно строгое, а также ограничений (9)-(12), задающих множество A .

Совместность этой системы практически можно проверить при помощи методов линейного программирования. Для этого надо учесть, что после удаления равенства (10) получим эквивалентную по совместности систему (9), (11), (12), которая совместна тогда и только тогда, когда совместна исходная система. А последней эквивалентна по совместности система из линейных равенств и нестрогих неравенств, которая получается следующим образом. Все строгие неравенства в (9) и (12) заменяются нестрогими неравенствами с добавлением в их правые части произвольной положительной константы $c > 0$, например, $c = 1$:

$$\alpha_1 \geq 1, \dots, \alpha_m \geq 1; \text{ если } i > j \in \Omega, \text{ то } \alpha_i - \alpha_j \geq 1; \quad (16)$$

все неравенства из (15), среди которых обязательно есть строгое, заменяются нестрогими неравенствами

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \alpha_i (f_{ik}^j - f_{ik}^l) &\geq 0, \quad k = 2, \dots, q, \\ \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{k=2}^q (f_{ik}^j - f_{ik}^l) &\geq 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Удаленность d^{jl} точки α^* от непустого множества A^{jl} определяется выражением (2). Пусть в качестве функции $d(\alpha', \alpha'')$ выступает одна из функций:

$$d^{\Sigma}(\alpha', \alpha'') = \sum_{i=1}^m |\alpha'_i - \alpha''_i|, \quad (18)$$

$$d^{-}(\alpha', \alpha'') = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} |\alpha'_i - \alpha''_i|. \quad (19)$$

Тогда, используя известный прием (см., например, [3]), за счет введения дополнительных переменных можно свести оптимизационную задачу (2) к задаче с линейной целевой функцией и линейными ограничениями. Наконец, учитывая, что множество A^{jl} не пусто, можно все строгие неравенства, входящие в состав системы определяющих его линейных ограничений,

заменить нестрогими [10] и в итоге получить задачу линейного программирования.

Аналогичным образом сводится к задачам линейного программирования и задача вычисления D в соответствии с выражением (4).

При любом $\alpha \in A$ справедливо включение $R^{\Omega} \subseteq R(\alpha)$, т.е. из $x^j R^{\Omega} x^t$ следует $x^j R(\alpha) x^t$. Иначе говоря, если $x^j R^{\Omega} x^t$ выполнено, то объект x^j безусловно нестрого доминирует над объектом x^t , т.е. выполнено $x^j R(A) x^t$. Поэтому прямым следствием теоремы 1 является

Теорема 2. Справедливы следующие утверждения:

2.1. Если для недоминируемого по отношению $P(\alpha^*)$ варианта x^{*l} и варианта x^j верно $x^{*l} R^{\Omega} x^j$, то вариант x^j не является потенциально доминирующим над вариантом x^{*l} .

2.2. Если имеет место $x^j R^{\Omega} x^t$ и вариант x^j не является потенциально доминирующим над вариантом $x^{*l} \in X^*$, то и вариант x^t не является потенциально доминирующим над x^{*l} .

2.3. Если верно $x^j R^{\Omega} x^t$ и вариант x^j безусловно нестрого доминирует над вариантом x^t , который является потенциально доминирующим над $x^{*l} \in X^*$, то и вариант x^j потенциально доминирует x^{*l} , причем $A^{tl} \subseteq A^{jl}$.

Заметим, что если качественной информации о важности критериев нет, т.е. $\Omega = \emptyset$, то отношением R^{Ω} является отношение Парето R^0 , определяемое следующим образом:

$$x^j R^0 x^t \Leftrightarrow K_i(x^j) \geq K_i(x^t), \quad i = 1, \dots, m.$$

Поэтому теорема 2 оказывается полезной при проведении анализа чувствительности и при отсутствии информации Ω .

3. Пример анализа чувствительности

Проиллюстрируем изложенные теоретические положения и результаты подробным решением простого примера, причем для ясности изложения даже очевидные упрощения и промежуточные выводы, как правило, делаться не будут.

Рассмотрим трехкритериальную задачу ($m=3$), в которой у порядковой шкалы критериев три градации ($q=3$) и имеется четыре варианта ($n=4$) со следующими векторными оценками:

$$K(x^1) = (3, 1, 2), \quad K(x^2) = (1, 3, 3), \quad K(x^3) = (2, 1, 3), \\ K(x^4) = (1, 3, 2).$$

Отметим, что справедливо соотношение $x^2 P^0 x^4$, так что множество недоминируемых по Парето вариантов $X^0 = \{x^1, x^2, x^3\}$.

Пусть вначале имеется качественная информация о важности критериев $\Omega = \{1 > 2, 1 > 3, 2 > 3\}$, для которой $x^1 P^\Omega x^3$, $x^1 P^\Omega x^4$ и, конечно, $x^2 P^\Omega x^4$. В этом можно убедиться, проведя анализ «вручную» при помощи специальных методов [7] или используя подходящую компьютерную систему, например, DASS [11, 12]. Граф отношения P^Ω представлен на рисунке. Следовательно, множество недоминируемых по P^Ω вариантов $X^\Omega = \{x^1, x^2\}$.

Пусть, далее, получена количественная информация о важности критериев Θ , позволявшая рассчитать коэффициенты важности критериев: $\alpha_1^* = 0,4$; $\alpha_2^* = 0,35$; $\alpha_3^* = 0,25$. Эта информация не позволяет сравнить варианты, ранее несравнимые по R^Ω . В этом также можно убедиться, проведя анализ «вручную» при помощи методов [7-9] или используя систему DASS. Следовательно, $P^\Theta = P^\Omega$, и множество недоминируемых вариантов не изменилось: $X^\Theta = X^\Omega = \{x^1, x^2\}$.

Проведем анализ чувствительности. Вначале отметим, что при анализе устойчивости варианта x^1 , согласно утверждению 2.1 теоремы 2, достаточно ограничиться его сопоставлением с вариантом x^2 . А при анализе устойчивости варианта x^2 , согласно утверждению 2.3 теоремы 2, достаточно ограничиться его сопоставлением с вариантом x^1 (см. рисунок).

Запишем систему ограничений (9)-(12), задающую множество A :

$$\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_3 > 0; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1; \alpha_1 > \alpha_2, \quad (20)$$

$$\alpha_2 > \alpha_3, \alpha_1 > \alpha_3.$$

Выпишем значения функции f_{ik}^j . Согласно (13) имеем:

$$f_{12}^1 = 1, f_{22}^1 = 0, f_{32}^1 = 1; f_{13}^1 = 1, f_{23}^1 = 0, \quad (21)$$

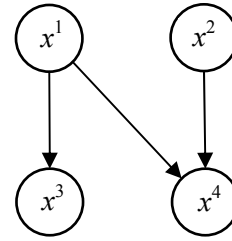
$$f_{33}^1 = 0;$$

$$f_{12}^2 = 0, f_{22}^2 = 1, f_{32}^2 = 1; f_{13}^2 = 0, f_{23}^2 = 1, \quad (22)$$

$$f_{33}^2 = 1.$$

Проведем анализ чувствительности варианта x^1 , сравнивая его с вариантом x^2 . Неравенства (15), участвующие в задании множества A^{21} , выглядят здесь следующим образом:

$$\alpha_2 + \alpha_3 \geq \alpha_1 + \alpha_3, \quad \alpha_2 + \alpha_3 \geq \alpha_1, \quad (23)$$



Граф отношения предпочтения P^Ω на множестве вариантов X

причем хотя бы одно из них должно быть строгим. Для того чтобы проверить, пусто ли множество A^{21} , нужно проверить на совместность систему нестрогих неравенств (16), (17), записываемую с учетом (23) следующим образом:

$$\alpha_1 \geq 1, \alpha_2 \geq 1, \alpha_3 \geq 1; \alpha_1 - \alpha_2 \geq 1, \alpha_2 - \alpha_3 \geq 1, \quad (24)$$

$$\alpha_1 - \alpha_3 \geq 1;$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 \geq 0, -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 0, -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \geq 1. \quad (25)$$

Для этого можно воспользоваться любой компьютерной программой линейного программирования, решая задачу максимизации, например, целевой функции $0 \times \alpha_1$ при ограничениях (24) и (25). Проведав указанное, выясним, что система (24)-(25) несовместна. Следовательно, множество A^{21} пусто, вариант x^1 абсолютно устойчив и для него $d^1 = d^1 = +\infty$.

Проведем теперь анализ чувствительности варианта x^2 , сравнивая его с вариантом x^1 . Для него неравенства (15), участвующие в задании множества A^{12} , таковы:

$$\alpha_1 + \alpha_3 \geq \alpha_2 + \alpha_3, \quad \alpha_1 \geq \alpha_2 + \alpha_3, \quad (26)$$

причем хотя бы одно из них должно быть строгим. Поэтому для проверки непустоты множества A^{12} нужно проверить на совместность систему нестрогих неравенств (16), (17), записываемую с учетом (26) в виде системы нестрогих неравенств (24) и

$$\alpha_1 - \alpha_2 \geq 0, \quad \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \geq 0, \quad 2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 \geq 1. \quad (27)$$

Максимизируя целевую функцию $0 \times \alpha_1$ при ограничениях (24) и (27), получаем значения коэффициентов важности, удовлетворяющие системе ограничений: $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1$. Напомним, что нормирующее ограничение $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ здесь было снято. Следовательно, множество A^{12} не пусто.

Пусть в качестве функции $d(\alpha', \alpha'')$ выступает функция (19), имеющая вид:

$$d^-(\alpha', \alpha'') = \max \{|\alpha'_1 - \alpha''_1|, |\alpha'_2 - \alpha''_2|, |\alpha'_3 - \alpha''_3|\}. \quad (28)$$

Вычислим величину $d^{12} = \inf_{\alpha \in A^{12}} d^-(\alpha, \alpha^*)$.

Для этого, согласно вышеизложенному, достаточно найти минимум функции (28) при следующих ограничениях, получаемых из (20) и (26):

$$\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1; \alpha_1 \geq \alpha_2, \quad (29)$$

$$\alpha_2 \geq \alpha_3, \alpha_1 \geq \alpha_3; \alpha_1 \geq \alpha_2 + \alpha_3.$$

Эта задача является задачей нелинейного программирования. Однако путем введения дополнительной переменной y (ее можно считать неотрицательной) она сводится к следующей эквивалентной задаче линейного программирования: минимизировать y при ограничениях – неравенствах и равенстве (29) и неравенствах:

$$\alpha_1 - 0,4 \leq y, -\alpha_1 + 0,4 \leq y, \alpha_2 - 0,35 \leq y, -\alpha_2 + 0,35 \leq y,$$

$$\alpha_3 - 0,25 \leq y, -\alpha_3 + 0,25 \leq y.$$

Решение этой задачи: $y=0,1$; $\alpha_1=0,5$; $\alpha_2=0,35$; $\alpha_3=0,15$. Следовательно, $d^{12}=0,1$. Поэтому, в соответствии с (3), $d^2=0,1$.

Теперь вычислим величину D согласно выражению (4) для функции d , определяемой (28). Прежде всего, заметим, что

$$D = \sup_{\alpha \in A} \max_{i \in \{1, \dots, m\}} |\alpha_i - \alpha_i^*| = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} (\sup_{\alpha \in A} |\alpha_i - \alpha_i^*|) =$$

$$= \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \max \{ \sup_{\alpha \in A, \alpha_i \geq \alpha_i^*} (\alpha_i - \alpha_i^*), \sup_{\alpha \in A, \alpha_i \leq \alpha_i^*} (\alpha_i^* - \alpha_i) \} =$$

$$= \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \max \{ (\sup_{\alpha \in A, \alpha_i \geq \alpha_i^*} \alpha_i) - \alpha_i^*, (-\inf_{\alpha \in A, \alpha_i \leq \alpha_i^*} \alpha_i) + \alpha_i^* \}$$

Пусть

$$D_i = \max \{ h_i^+ - \alpha_i^*, \alpha_i^* - h_i^- \}, \quad (30)$$

где

$$h_i^+ = \sup_{\alpha \in A} \alpha_i, \quad h_i^- = \inf_{\alpha \in A} \alpha_i. \quad (31)$$

Тогда

$$D = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} D_i. \quad (32)$$

Остается заметить, что поскольку множество A не пусто, то, как уже было выяснено выше, все строгие неравенства, участвующие в его задании, можно заменить нестрогими. Кроме того, вместо $\sup$ и $\inf$ в выражении (31) можно писать соответственно $\max$ и $\min$. Формула (32) без вывода и с опечаткой (пропуском) была приведена в работе [3].

Обратимся к рассматриваемой трехкритериальной задаче. Величины h_1^+ и h_1^- находятся путем решения соответственно следующих задач линейного программирования: максимизировать или же минимизировать α_1 как целевую функцию при ограничениях, получаемых из (20):

$$\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1; \alpha_1 \geq \alpha_2, \quad (33)$$

$$\alpha_2 \geq \alpha_3, \alpha_1 \geq \alpha_3.$$

Решив эти задачи, получим: $h_1^+ = 1$, $h_1^- = 0,33$.

Поэтому

$$D_1 = \max \{ 1 - 0,4; 0,4 - 0,33 \} = 0,6.$$

Аналогично, максимизируя и минимизируя целевые функции α_2 и α_3 на A , найдем:

$$h_2^+ = 0,5, \quad h_2^- = 0,$$

$$D_2 = \max \{ 0,5 - 0,35; 0,35 - 0 \} = 0,35.$$

$$h_3^+ = 0,33, \quad h_3^- = 0,$$

$$D_3 = \max \{ 0,33 - 0,25; 0,25 - 0 \} = 0,25.$$

Следовательно, $D=0,6$. И поэтому, согласно (5), $\delta^2=0,1/0,6=0,167$. Степень устойчивости (чувствительности к изменению значения α^*) варианта x^2 можно, по-видимому, считать приемлемой: она более 15 %.

Теперь проанализируем устойчивость множества недоминируемых решений $X^\Theta = \{x^1, x^2\}$ в целом. Ранее в качестве варианта, безусловно нестрого доминирующего над вариантом x^2 , рассматривался лишь вариант x^1 . Но вариант x^1 входит в состав множества X^Θ . Поэтому, учитывая утверждение 2.1 теоремы 2, следует сопоставить вариант x^2 с вариантом x^3 (см. рис 1).

Согласно (13) имеем следующие значения функции f_{ik}^3 :

$$f_{12}^3 = 1, \quad f_{22}^3 = 0, \quad f_{32}^3 = 1; \quad f_{13}^3 = 0, \quad f_{23}^3 = 0, \quad f_{33}^3 = 1.$$

Неравенства (15), участвующие в задании множества A^{32} , таковы:

$$\alpha_1 + \alpha_3 \geq \alpha_2 + \alpha_3, \quad \alpha_3 \geq \alpha_2 + \alpha_3, \quad (34)$$

причем хотя бы одно из них должно быть строгим. Поэтому для проверки непустоты множества A^{32} нужно проверить на совместность систему нестрогих неравенств (16), (17), записываемую в виде системы нестрогих неравенств (24) и неравенства, получаемого из (34):

$$\alpha_1 - \alpha_2 \geq z_1, \quad -\alpha_2 \geq z_2, \quad z_1 \geq 0, \quad z_2 \geq 0, \quad z_1 + z_2 = 1.$$

Эта система несовместна, и поэтому множество A^{32} пусто. Следовательно, вариант x^3 не является потенциально доминирующим над вариантом x^2 .

Итак, множество $X^\Theta = \{x^1, x^2\}$ в целом как решение задачи выбора абсолютно устойчиво и для него, согласно (6), $\delta^{*l} = +\infty$. Отметим, что этот вывод можно было ожидать, поскольку здесь $X^\Omega = X^\Theta = \{x^1, x^2\}$.

Для того чтобы выбрать один наилучший вариант из множества X^Θ , следует получить дополнительную информацию о предпочтениях ЛПР.

В рассматриваемой задаче эта информация должна касаться изменения предпочтений вдоль шкалы критериев (так как уже имеются точные оценки величин важности критериев) [7].

Заключение

В статье изложен операциональный подход к параметрическому анализу чувствительности решений дискретных задач выбора, когда предпочтения описываются частичным квазипорядком с параметром. Показано, что в рамках разработанного подхода анализ чувствительности решения многокритериальной задачи выбора при наличии точной информации о важности критериев, имеющих порядковую шкалу, которое получено методами теории важности критериев, можно эффективно провести при помощи методов линейного программирования, воспользовавшись любой подходящей компьютерной программой.

Литература

1. Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T. Theory of multiobjective optimization. Orlando: Academic Press, 1985.
 2. Лотов А.В. Поспелова И.И. Многокритериальные задачи принятия решений: Учебное пособие. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ; МАКС Пресс, 2008.
 3. Insua D.A., French S. A framework for sensitivity analysis in discrete multi-objective decision-making // *European Journal of Operational Research*. 1991. V. 54. P. 176-190.
 4. French S. Mathematical programming approaches to sensitivity calculations in decision analysis // *Journal of the Operational Research Society*. 1992. V. 43. No. 8. P. 813-819.
 5. Athanassopoulos A.D., Podinovski V.V. Dominance and potential optimality in multiple criteria decision analysis with imprecise information // *Journal of the Operational Research Society*. 1997. V. 48. P. 142-150.
 6. Mateos A., Jiménez A., Ríos-Insua S. Solving dominance and potential optimality in imprecise multi-attribute additive problem // *Reliability Engineering and System Safety*. 2003. V. 79. P. 253-262.
 7. Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений: Учебное пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
 8. Podinovski V.V. The quantitative importance of criteria for MCDA // *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*. 2002. V. 11. P. 1-15.
 9. Подиновский В.В. Количественная важность критериев // *Автоматика и телемеханика*. 2000. № 5. С. 110-123.
 10. Подиновский В.В. Анализ решений при множественных оценках коэффициентов важности критериев и вероятностей значений неопределенных факторов в целевой функции // *Автоматика и телемеханика*. 2004. № 11. С. 141-159.
 11. Подиновский В.В. Анализ задач многокритериального выбора методами теории важности критериев при помощи компьютерных систем поддержки принятия решений // *Известия АН. Теория и системы управления*. 2008. № 2. С. 64-68.
 12. Подиновский В.В., Потапов М.А. Теоретические основы и системы поддержки принятия многокритериальных решений // *Материалы XXXIV Международной конференции "Информационные технологии в науке, образовании, телекоммуникации и бизнесе"* (20 – 30 мая 2007 г., Гурзуф, Украина). Приложение к журналу «Открытое образование». 2007. С. 87-89.
- Подиновский Владислав Владимирович.** Профессор кафедры высшей математики, факультет экономики Государственного университета – Высшей школы экономики. Окончил Военную артиллерийскую инженерную академию им. Ф.Э Дзержинского (ныне – Академия ракетных войск стратегического назначения им. Петра Великого) в 1960 г. Доктор технических наук, профессор. Автор более 150 печатных работ, 7 монографий. Область научных интересов: теория принятия решений и ее приложения. E-mail: podinovsri@mail.ru.