

Свойства множеств выбора оптимизационных задач проектирования сложных технических систем¹

Аннотация. В работе исследуются математические модели процессов проектирования и освоения сложных технических систем. Проведена оценка влияния различных возмущений и факторов неопределенности на процесс выбора оптимальных (максимальных) вариантов проектов сложных систем. Введены понятия разброса и морфизма процесса принятия комплексных проектных решений и изучены их основные характеристические свойства. Приведены примеры оценки величины разброса такого процесса.

Ключевые слова: оптимизация проектирования, решающий процесс, морфизм решающего процесса.

Введение

Бурное развитие аппаратуры и программных средств САПР сопровождается распространением новых электронных форм проектирования, основанных на компьютерном анализе и моделировании.

Такое виртуальное проектирование завоевывает все больше позиций у традиционного проектирования, снижая затратность и повышая производительность и качество проектных разработок. Работая с компьютерной моделью и виртуальным прототипом, проектировщик легко и комфортно преодолевает недостижимые ранее барьеры по числу, масштабу и глубине анализируемых вариантов проекта. Однако центральной проблемой проектирования в компьютерном мире остается проблема адекватного отображения реальности. Поэтому виртуальное проектирование предъявляет свои жесткие требования к применяемым методам анализа и синтеза, вызывает необходимость их совершенствования. В данной статье проиллюстрировано, как современные методы проектирования воздействуют на развитие новых направлений в математической теории принятия проектных

решений, используемой для анализа вариантов и выбора проектно-технических решений. В частности, необходимость учета реальных возмущений и факторов неопределенности при компьютерном анализе вариантов делает актуальным развитие параметрических моделей принятия решений, которым до сих пор уделялось значительно меньше внимания по сравнению с классическими моделями выбора. В работе рассматриваются различные классы таких моделей, изучаются их характеристические свойства, имеющие важное значение для анализа и синтеза сложных компьютерно-интегрированных систем.

1. Методы аппроксимации множеств выбора задач проектирования

В качестве основного объекта исследования в настоящей работе рассматривается следующая модель задачи проектирования, предложенная П.С. Краснощековым, А.А. Петровым, В.А. Вязгиным, В.В. Морозовым, В.В. Федоровым, Ю.А. Флеровым в рамках развиваемой ими математической теории проектирования [1-11]. При этом под задачей проектирования понимается ее

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президиума РАН “Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация” (проект №209) и РФФИ (Проект №10-01-00674)

формализация в терминах теории принятия решения как задачи выделения множества максимальных элементов (ядра) на множестве альтернатив X по бинарному отношению сравнительной эффективности R :

$$X' = \text{Max}(X, R), \quad (1)$$

где X – множество альтернативных вариантов проекта $x \in X$;

$\text{Max}(X, R)$ – множество максимальных элементов или в иной записи: $X \rightarrow X' = C(X)$, где $C(X)$ – множество выбора [12-15].

Напомним (например, [12-15]), что в классической теории принятия решений различают внешнее $(X, B(X))$ и внутреннее (L, p) описания модели выбора, где L – структура на множестве альтернатив (проектов) X , p – правило выбора, $B(X)$ – множество выбора. Внешнее описание показывает какие альтернативы из X выбираются, т.е. какое множество предъявлено на входе и какое получено на выходе модели. Внутреннее описание, называемое механизмом выбора, показывает, каким образом происходит выбор альтернатив. Обычно под структурой L понимают бинарные отношения или шкалы критериев, а под правилами выбора p – принципы оптимальности для выбранных отношений или шкал. Чаще всего механизм выбора представляют в виде (1):

$$X' = \text{Max}(X, R),$$

где R – бинарное отношение на множестве X , а выражение $\text{Max}(X, R)$ – принцип оптимальности. Но, на самом деле, для задачи типа (1), решаемой в условиях неопределенности, это выражение должно быть дополнено до следующего

$$X' = \text{Max}(X, A, R), \quad (2)$$

где A – множество параметров, отражающих возможные возмущения задачи (1) при реализации результатов выбора в обстановке неполного учета условий, влияющих на свойства выбираемых альтернатив.

Например, для процесса проектирования A – это разнообразные условия функционирования выбираемого устройства или технического решения.

Формально, приближение модели выбора можно отнести к функции выбора, бинарным отношениям, множеству выбора, принципу оптимальности. В теории принятия решений подробно исследованы главным образом проблемы аппроксимации функции выбора [14-18] и задачи анализа влияния возмущений принципов оптимальности на устойчивость решений [19, 20]. Отметим также, что в статьях [21, 22] изучалась связь множеств выбора на бесконечном компактном множестве метрического пространства альтернатив с выбором на его конечных подмножествах, а в работах [23-32] исследовались вопросы аппроксимации множеств паретовского выбора линейных и ряда нелинейных задач векторной оптимизации. В работах авторов [33, 34] показано, что при исследовании бинарных отношений сравнительной эффективности более удобно рассматривать аппроксимацию множества выбора задачи принятия проектных решений (1),(2). Заметим, что множество выбора можно представить двумя способами – с помощью ожидаемых исходов Y , выделяемых истинным бинарным соотношением R_y , и реальных исходов Z , полученных после реализации выбранных вариантов с учетом возможных возмущений этого процесса.

Поэтому отображение множества реальных исходов на множество ожидаемых исходов в условиях возмущений дает разброс реальных исходов. Разброс реальных исходов позволяет оценить точность приближения множества выбора, а также рассматривать такой выбор как возмущенный решающий процесс.

Возмущенный процесс V задается следующим образом [33, 34]:

$$V \equiv (X; (Y, R_y); Z, f; H; g; d),$$

где X – множество альтернатив (проектов);

(Y, R_y) – множество ожидаемых исходов с истинным бинарным отношением сравнительной эффективности R_y ;

Z – множество реальных исходов, получаемых после реализации выбранных вариантов с учетом возможных возмущений процесс принятия решений;

$f: X \rightarrow Y$; $g: Z \rightarrow Y$ – заданные отображения;

H – семейство возмущающих отображений $h: X \rightarrow Z$;

$d: Y \times Y \rightarrow R^+$ – метрика на множестве ожидаемых исходов Y

($R^+ \equiv [0, +\infty)$ – неотрицательная полуось).

Разброс исходов возмущенного решающего процесса V определяется следующим образом [33, 34]:

$$\Delta V \equiv \sup \{ \Delta V(x, h) : x \in f^{-1}(M(Y, R_y)), h \in H \}, \quad (3)$$

где $\Delta V(x, h) \equiv d(f(x), gh(x))$ – разброс в h – реализация возмущенного решающего процесса;

$M(Y, R_y)$ – множество максимальных элементов по отношению R_y

В следующем параграфе мы сформулируем теорему о монотонности величины разброса (3) при сюръективных морфизмах (отображениях) решающих процессов, которая дает достаточные условия сводимости неизвестных решающих процессов выбора к известным.

2. Монотонность величины разброса решающих процессов выбора при сюръективных морфизмах

В настоящем разделе мы будем предполагать, что заданы два возмущенных решающих процесса

$$V = (X; (Y, R_y); Z; f; H; g; d); \quad (4)$$

$$V' = (X'; (Y', R_{y'}); Z'; f'; H'; g'; d'); \quad (5)$$

для которых существует сюръективный морфизм $\mu: V \rightarrow V'$;

$$\mu \equiv (\lambda, \eta, \chi, \varphi),$$

где сюръективных отображения

$\lambda: X \rightarrow X'$; $\eta: Y \rightarrow Y'$; $\chi: Z \rightarrow Z'$; $\varphi: H \rightarrow H'$ согласованы следующим образом:

a) $\eta f = f' \lambda$;

b) $\chi h = \varphi(h) \lambda$ для любого $h \in H$;

c) $\eta g = g' \chi$;

d) η является гомоморфизмом модели (Y, R_y) в модель $(Y', R_{y'})$ (напомним (например, [12]): что отображение $\eta: Y \rightarrow Y'$ называется гомоморфизмом модели выбора (Y, R_y) в модель $(Y', R_{y'})$, если для всяких $y_1, y_2 \in Y$ из $y_1 R_y y_2$ следует $\eta(y_1) R_{y'} \eta(y_2)$);

е) для любых $y_1, y_2 \in Y$ выполнено:

$$d'(\eta(y_1), \eta(y_2)) \leq d(y_1, y_2).$$

Для решающих процессов (4), (5) имеет место следующее утверждение [34].

Теорема 1. (О монотонности величины разброса решающих процессов выбора при их сюръективных морфизмах).

Пусть решающие процессы выбора V, V' удовлетворяют условиям а)-е). Пусть, кроме того, отображение λ является биекцией, а отношение $R_{y'}$ ассиметрично. Тогда для разбросов $\Delta V, \Delta V'$ соответственно процессов V, V' выполняется следующее соотношение

$$\Delta V \geq \Delta V'.$$

Отметим, что результат теоремы 1 применим к задаче проектирования по аналогу (прототипу), имеющему известные характеристики разброса ожидаемых исходов, и объясняет многочисленные примеры из практики, когда спроектированное по аналогу изделие отличается в худшую сторону от оригинала, несмотря на соблюдение казалось бы всех основных параметров и нарушение незначительных на первый взгляд свойств характеристик элементов технологии и ноу-хау. «Незначительное» изменение свойств на самом деле говорит о существенном превышении разброса ожидаемых исходов в оригинальном и копирующем режимах, то есть о превышении допустимого уровня возмущений, установленного оригинальным процессом проектирования.

В следующем разделе мы дадим оценку величины разброса $\Delta V'$ решающего процесса выбора V для важных специальных классов задач выбора по аналогу.

2.1. Примеры оценки величины разброса задач выбора по проекту-аналогу

В настоящем параграфе рассматриваются примеры вычисления величины разброса для некоторых специальных классов задач выбора по аналогу.

Предположим вначале, что идеальная (максимальная) система сравнения в задаче выбора по прототипу ищется в классе стационарных логистических дифференциальных моделей вида

$$\dot{x} = (p - \alpha x)x, \quad (6)$$

где коэффициенты p, α модели (6) – положительные вещественные числа.

Заметим, что модели типа (6) описывают, в частности, процессы переноса и распространения новых производственных технологий и ноу-хау [35-39].

В этом случае p, α – соответственно коэффициент роста и коэффициент замедления роста числа участвующих в переносе технологии фирм $x(t)$ ($t \geq 0$).

Напомним (например, [35-41]), что решения $x(t)$ логистических дифференциальных моделей сравнения вида (6) обладают следующими важными характеристическими свойствами.

1. Решение

$x(t, t_0, x_0)$, $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$, $t_0 \geq 0$, $x_0 \geq 0$ задается при $t \geq t_0$ следующей формулой

$$x(t) = x(t, t_0, x_0) = \frac{x_0 e^{p(t-t_0)}}{1 + x_0 \cdot \alpha \cdot p^{-1} \cdot (e^{p(t-t_0)} - 1)}.$$

2. $x(t) \equiv p \cdot \alpha^{-1}$ является положением равновесия модели (6).

3. При $0 < x_0 < p \cdot \alpha^{-1}$ решение $x(t, t_0, x_0)$ монотонно возрастает при $t \geq t_0$.

4. При $x_0 > p \alpha^{-1}$ решение $x(t, t_0, x_0)$ монотонно убывает при $t \geq t_0$.

5. Если $x_1 > x_2 > 0$, то $x(t, t_0, x_1) > x(t, t_0, x_2)$ при $t \geq t_0$.

6. Для любого решения $x(t, t_0, x_0)$ модели (6) имеет место следующее предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, t_0, x_0) = p \cdot \alpha^{-1}$$

7. Пусть заданы два уравнения вида (6)

$$\dot{z} = (p_1 - \alpha_1 z) \cdot z; \quad (7)$$

$$\dot{u} = (p_2 - \alpha_2 u) \cdot u. \quad (8)$$

Предположим, что коэффициенты $p_1, \alpha_1, p_2, \alpha_2$ уравнений (7), (8) удовлетворяют неравенствам

$$p_1 \geq p_2 > 0;$$

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0;$$

$$p_1 \alpha_1^{-1} > p_2 \alpha_2^{-1}.$$

Тогда для любых решений $z(t) \equiv z(t, 0, z_0)$, $u(t) \equiv u(t, 0, u_0)$ соответственно уравнений (7), (8) таких, что

$$0 < u_0 \leq z_0 < p_2 \alpha_2^{-1},$$

при любом $t > 0$ справедливо неравенство $u(t) < z(t)$

(заметим, что в утверждении 7 даны достаточные условия, показывающие, когда функция прироста числа участков переноса новой производственной технологии остается знакоопределенной на всем интервале времени $t \in (0, +\infty)$).

8. Пусть заданы две нестационарные логистические дифференциальные модели

$$\dot{y} = (p_1(t) - \alpha_1(t)y) \cdot y; \quad (9)$$

$$\dot{w} = (p_2(t) - \alpha_2(t)w) \cdot w. \quad (10)$$

с непрерывными при $t \geq 0$ коэффициентами, удовлетворяющими соотношениям

$$0 < p' \leq p_2(t) < p_1(t) \leq p''; \quad (11)$$

$$0 < \alpha' \leq \alpha_2(t) < \alpha_1(t) \leq \alpha''. \quad (12)$$

Тогда для любых ненулевых решений $y(t) \equiv y(t, 0, y)$; $w(t) \equiv w(t, 0, w_0)$ соответственно уравнений (9), (10) таких, что

$$0 < w_0 \leq y_0, \quad (13)$$

справедливо неравенство

$$w(t) < y(t), \quad t \geq 0.$$

(Отметим, что в утверждении 8 получены достаточные условия знакоопределенности на всей неотрицательной полуоси времени функции прироста числа производителей, вовлеченных в процесс технологического переноса, для нестационарных логистических дифференциальных моделей переноса, удовлетворяющих условиям (11)-(13)).

Допустим теперь, что в процессе реализации модели сравнения вида (6) ее коэффициенты p, α испытывают возмущения (флуктуации и разработчику доступен лишь диапазон изменения этих коэффициентов

$$p \equiv p(t) \in [p - \varepsilon; p + \varepsilon]; \quad \alpha \equiv \alpha(t) \in [\alpha - \varepsilon; \alpha + \varepsilon]; \quad (14)$$

где $t \in [0, +\infty)$; ε – достаточно малое положительное число.

Будем также предполагать, что функции $p(t)$, $\alpha(t)$ непрерывны при $t \geq 0$. Обозначим

через M множество нестационарных логистических моделей вида

$$\dot{r} = (p(t) - \alpha(t)r)r, \quad (15)$$

удовлетворяющих соотношениям (14).

Тогда, как нетрудно видеть, величины разброса ΔV решающего процесса выбора максимальной (оптимальной) системы-аналога вида (6) может быть задана следующей формулой

$$\Delta V \equiv \Delta V(t, x_0, p, \alpha, \varepsilon) \equiv \sup_{\substack{r(t) \in M; \\ r(0) = x_0}} |x(t) - r(t)|, \quad (16)$$

где $x(t), r(t)$ – ненулевые решения соответственно моделей (6), (15) из множества M с одинаковыми начальными значениями $x(0) = r(0) = x_0$. Используя свойства 1-8 решений логистических моделей, а также соотношения (14), (16), приходим к следующему утверждению о величине разброса ΔV решающих процессов выбора максимальных аналогов в классе логистических дифференциальных моделей.

Теорема 2.

1. Предположим, что максимальный (оптимальный) вариант системы-прототипа задается логистическим уравнением вида (6)

$$\dot{x} = (p - \alpha x)x.$$

Допустим также, что реальный (возмущенный) вариант системы – прототипа задается логистической дифференциальной моделью типа (15)

$$\dot{r} = (p(t) - \alpha(t)r)r$$

с неизвестными «возмущенными» коэффициентами $p(t), \alpha(t)$, удовлетворяющими соотношениям (14).

Тогда для любого положительного числа t величина разброса $\Delta V(t)$, задаваемая формулой (16), допускает следующую оценку

$$\Delta V(t) \leq w(t) - v(t),$$

где $w(t), v(t)$ – решения соответственно стационарных логистических дифференциальных моделей

$$\dot{w} = (p_2(t) - \alpha_2(t)w) \cdot w,$$

$$\dot{v} = (p_1(t) - \alpha_1(t)v) \cdot v,$$

где

$$p_1(t) \equiv p - \varepsilon; p_2(t) \equiv p + \varepsilon; \alpha_1(t) \equiv \alpha + \varepsilon; \alpha_2(t) \equiv \alpha - \varepsilon,$$

с одинаковыми начальными значениями

$$w(0) = v(0) = x_0.$$

2. При всех достаточно больших положительных значениях t величина разброса $\Delta V(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\Delta V(t) \leq p_2 \alpha_2^{-1} - p_1 \alpha_1^{-1}.$$

3. Пусть ε – достаточно малое положительное число. Тогда для всех достаточно больших значений t справедливо следующее соотношение

$$\Delta V(t) = O(\varepsilon). \quad (17)$$

Заметим, что соотношение (17) утверждения 3 теоремы 2 показывает, что величина разброса (в момент времени t) $\Delta V(t)$, задаваемое формулой (16), при всех достаточно больших значениях времени t непрерывно зависит от основных коэффициентов логистической дифференциальной модели p, α .

Допустим, что максимальная система сравнения в задаче выбора по аналогу принадлежит множеству систем линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = y \quad (18)$$

где $A: X \rightarrow Y$ – непрерывно-обратимый линейный оператор, X, Y – линейные нормированные пространства

(напомним (например, [42-44]), что оператор $A: X \rightarrow Y$ называется непрерывно обратимым, если область его значений $R(A) = Y$, оператор

A обратим и его обратный оператор A^{-1} принадлежит нормированному пространству $Y(X, L)$ линейных непрерывных операторов, действующих из всего Y в X).

Для непрерывно обратимого оператора A уравнение (18) имеет единственное решение $x = A^{-1}y$ для любой правой части y . Если при этом x' – решение системы (18) с правой частью y' , то

$$\|x - x'\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|y - y'\|. \quad (19)$$

Неравенство (19) означает, что малое изменение правой части влечет малое изменение решения, т.е. линейная задача (18) является корректно-разрешимой [44-47].

Предположим дополнительно, что пространство X является банаховым. Обозначим через $L(X)$ пространство линейных ограниченных всюду заданных операторов. Пусть E – единичный оператор из $L(X)$:

$$Ex = x \quad (x \in X).$$

Положим $V_1(E)$ – единичный шар в $L(X)$:

$$V_1(E) \equiv \{A \in L(X) : \|A - E\| < 1\}.$$

Для операторов A из множества $V_1(E)$ имеет место следующее утверждение [42-46].

Теорема 3.

Пусть $A \in V_1(E)$. Тогда оператор A непрерывно обратим. При этом для операторов $A, B \equiv E - A$ справедливы следующие соотношения:

$$\|A^{-1}\| \leq (1 - \|B\|)^{-1} = (1 - \|E - A\|)^{-1}; \quad (20)$$

$$\|E - A^{-1}\| \leq \|B\| (1 - \|B\|)^{-1} = \|E - A\| (1 - \|E - A\|)^{-1}. \quad (21)$$

Из теоремы 3 вытекает следующее следствие:

Свойство непрерывной обратимости является грубым для операторов из множества $V_1(A)$.

Пусть теперь линейный оператор A принадлежит пространству $L(X, Y)$ и является обратимым. Рассмотрим такой оператор $C \in L(X, Y)$, что

$$\|(C - A)A^{-1}\| < 1. \quad (22)$$

Для операторов A, C имеет место следующее утверждение [42-44].

Теорема 4.

1. Пусть $A, C \in L(X, Y)$ и удовлетворяет соотношению (22). Тогда оператор C является непрерывно обратимым и справедливы оценки:

$$\|C^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot (1 - \|(C - A)A^{-1}\|)^{-1};$$

$$\|C^{-1} - A^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|(C - A)A^{-1}\| \cdot (1 - \|(C - A)A^{-1}\|)^{-1}.$$

2. Пусть оператор A непрерывно обратим и справедливо неравенство

$$\|C - A\| \leq \|A^{-1}\|^{-1}. \quad (23)$$

Тогда оператор C также является непрерывно обратимым и для него выполняются следующие соотношения

$$\|C^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot (1 - \|(C - A)A^{-1}\|)^{-1}; \quad (24)$$

$$\|C^{-1} - A^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|^2 \cdot \|(C - A)A^{-1}\| \cdot (1 - \|(C - A)A^{-1}\|)^{-1}. \quad (25)$$

Из теоремы 4 вытекает следующее следствие:

Свойство непрерывной обратимости является грубым для линейных операторов из пространства $L(X, Y)$.

Предположим далее, что в результате реализации максимального (оптимального) варианта

системы (18) происходит возмущение (изменение) оператора A . Правую часть (вектор y) системы (18) при реализации системы (18) будем считать неизменной. Введем разброс $\Delta U(A, y)$ процесса реализации по следующей формуле

$$\Delta U(A, y) \equiv \sup_{\|D\| \leq \varepsilon} \|((A + D)^{-1} - A^{-1})y\|, \quad (26)$$

где $D \in L(X, Y)$ – возмущающий оператор; y – вектор правой части системы (18); ε – достаточно малое положительное число.

Принимая во внимание (20)–(26), а также результаты теорем 3, 4, получаем, что для величины разброса (26) имеют место следующие оценки:

$$a) \quad \text{при } A \equiv E \quad \Delta U(A, y) \leq \frac{\varepsilon \|y\|}{1 - \varepsilon}; \quad (27)$$

$$b) \quad \text{при } A \neq E \quad \Delta U(A, y) \leq \frac{a^2 \|y\| \varepsilon}{1 - a \cdot \varepsilon}. \quad (28)$$

где $a \equiv \|A^{-1}\|$.

Прямым следствием оценок (27-28) является следующее предложение.

Утверждение 1.

При любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ для величины разброса $\Delta U(A, y)$ процесса реализации максимальной системы алгебраических уравнений (18) справедливо соотношение $\Delta U(A, y) = O(\varepsilon)$.

Рассмотрим теперь случай, когда максимальный элемент f задачи выбора по прототипу принадлежит множеству функций $F_n(A)$ с ограниченной n -ой производной:

$$F_n(A) \equiv \{f : [a, b] \rightarrow R; |f^{(n)}(x)| \leq A, x \in [a, b]\}, \quad (29)$$

где $[a, b]$ – конечный отрезок числовой оси $R \equiv (-\infty; +\infty)$; $A = \text{const} > 0$.

Предположим далее, что в процессе реализации элемента $f = f(x)$, он заменяется приближением $l_n(x)$ – интерполяционным многочленом степени $n-1$ с узлами интерполяции $x_1, \dots, x_n \in (a, b)$. Для элемента $f(x) \in F_n(A)$ имеет место следующее представление [48-50]:

$$f(x) = l_n(x) + \frac{f^{(n)}(y) \cdot g_n(x)}{n!}, \quad (30)$$

где $g_n(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$.

Из (29-30) находим, что

$$\|f(x) - l_n(x)\| \leq \frac{A \cdot \|g_n(x)\|}{n!}, \quad (31)$$

где $\|f(x)\| \equiv \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Для нормы $\|g_n(x)\|$ справедлива оценка [48-50]:

$$\|g_n(x)\| \geq (b-a)^n \cdot 2^{1-2n}. \quad (32)$$

При $g_n(x) = (b-a)^n \cdot 2^{1-2n} \cdot c_n \left(\frac{2x - (b+a)}{b-a} \right);$

$$x_m = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \left(\frac{\pi(2m-1)}{2n} \right),$$

$m = 1, \dots, n; c_n \equiv \cos(n \arccos x)$

($c_n(x)$ – это полином Чебышева степени $n \geq 0$, а x_m – его нули) будем иметь

$$\|g_n(x)\| = (b-a)^n \cdot 2^{1-2n}. \quad (33)$$

Принимая во внимание (30-33), получаем, что при таком расположении узлов $x_m, m = 1, \dots, n$, на отрезке $[a, b]$ имеет место наилучшая из оценок нормы разности $f(x) - l_n(x)$, которая может быть получена как следствие оценки (31):

$$\|f - l_n\| \leq \frac{\|f^{(n)}\| (b-a)^n \cdot 2^{1-2n}}{n!} \leq \frac{A \cdot (b-a)^n \cdot 2^{1-2n}}{n!} \quad (34)$$

Соотношения (34) дают верхнюю границу оценки величины разброса процесса реализации максимального элемента $f(x)$ задачи выбора на множестве $F_n(A)$. Отметим, что оценка (34) является достижимой. В самом деле, если $f(x)$ – полином степени n :

$$f(x) = a_n \cdot x^n + \dots + a_0,$$

то

$$f^{(n)}(y) = a_n \cdot n!,$$

и неравенство (34) превращается в равенство

$$\|f - l_n\| = |a_n| \cdot (b-a)^n \cdot 2^{1-2n}.$$

Заметим также, что в случае $a = -1, b = 1$ для величины разброса (34) задачи реализации максимального элемента $f(x) \in F_n(A)$ имеют место следующие оценки [48,49,51]:

а) при $\sup \|f^{(m)}(x)\| < \infty, m \geq 1$:

$$\|f(x) - l_n(x)\| = O(n^{-m} \cdot \ln n) \text{ при } n \rightarrow \infty; \quad (35)$$

б) если $f(x)$ аналитична в каждой точке $x \in [-1; 1]$, то

$$\|f(x) - l_n(x)\| = O(q^n), \text{ где } 0 < q < 1. \quad (36)$$

Соотношения (35-36) показывают, что величина разброса $\|f - l_n\|$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$:

$$\|f(x) - l_n(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, x \in [-1, 1].$$

В случае иного расположения узлов интерполяции, например, равномерного, даже для аналитических функций разброс задачи реализации может стремиться к бесконечности с ростом числа узлов. Так, например, для функции $f(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$ имеет место неравенство [48,49]:

$$\|f(x) - l_n(x)\| \geq S \cdot s^n,$$

где $S = \text{const} > 0; s = \text{const} > 1$.

Заключение

Таким образом, в статье изучен ряд математических моделей анализа процессов проектирования и освоения сложных технических объектов и систем. Проведена оценка влияния различных возмущений и факторов неопределенности на процесс проектирования. Для моделей проектирования из класса задач выбора по бинарным отношениям сравнительной эффективности альтернативных вариантов сложных систем введены понятия решающего процесса принятия проектных решений, его разброса и морфизма. Установлены достаточные условия монотонности разброса решающего процесса. Приведены примеры оценки величины разброса для классов логистических дифференциальных моделей, систем линейных алгебраических уравнений в нормированных пространствах, задач интерполяции (приближения) гладких вещественнозначных функций.

Литература

1. Краснощеков П.С., Морозов В.В., Федоров В.В. Декомпозиция в задачах проектирования // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1979. - №2. – С.7-17.
2. Краснощеков П.С., Морозов В.В., Федоров В.В. Последовательное агрегирование в задачах внутреннего проектирования технических систем // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1979. - №5. - С. 5-12.

3. Краснощеков П.С. Математика и проектирование // Вестник МГУ. Серия Вычислительная математика и кибернетика. – 1979. – №4. – с.32-37.
4. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. – М.: МГУ, 1983.
5. Краснощеков П.С. Математические модели в исследовании операций. – М.: Знание, 1984.
6. Краснощеков П.С., Петров А.А., Федоров В.В. Информатика и проектирование. – М.: Знание, 1986.
7. Вязгин В.А., Федоров В.В. О редукции задач проектирования технических систем // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1986. – №3. – С.51-55.
8. Вязгин В.А., Федоров В.В. Математические методы автоматизированного проектирования. – М.: Высшая школа, 1989.
9. Краснощеков П.С., Савин Г.И., Федоров В.В., Флеров Ю.А. Автоматизация проектирования сложных объектов машиностроения // Автоматизация проектирования. – 1996. – №1. – С.3-13.
10. Краснощеков П.С., Федоров В.В., Флеров Ю.А. Элементы математической теории принятия проектных решений // Автоматизация проектирования. – 1997. – №1. – С.15-23.
11. Флеров Ю.А. Автоматизация проектирования сложных объектов машиностроения // В сб.: «Современные проблемы прикладной математики». – М.: МЗ Пресс, 2005. – С.99-140.
12. Макаров И.М., Виноградская Т.М., Рубчинский А.А., Соколов В.Б. Теория выбора и принятия решений. – М.: Наука, 1982.
13. Юдин Д.Б. Вычислительные методы теории принятия решений. – М.: Наука, 1989.
14. Шоломов Л.А. Логические методы исследования дискретных моделей выбора. – М.: Наука, 1989.
15. Айзерман М.А., Алескерев Ф.Т. Выбор вариантов. Основы теории. – М.: Наука, 1990.
16. Литваков Б.М. Аппроксимация функций выбора // Автоматика и телемеханика. – 1984. – №9. – С.138-146.
17. Литваков Б.М. Аппроксимация функций выбора на ограниченном множестве предъявлений // Автоматика и телемеханика. – 1985. – №2. – С.124-129.
18. Юдин Д.Б., Шоломов Л.А. Обобщенное математическое программирование и функции выбора // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1985. – №3. – С.3-15.
19. Молодцов Д.А., Федоров В.В. Устойчивость принципов оптимальности // В кн.: Современное состояние исследования операций. – М.: Наука, 1979. – С.236-262.
20. Молодцов Д.А. Устойчивость принципов оптимальности. – М.: Наука, 1987.
21. Бондарева О.Н. Сходимость пространств с отношением и теоретико-игровые следствия // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1978. т.1, №1. – С.84-92.
22. Бондарева О.Н. Конечные приближения выбора на бесконечном множестве // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1987. – №1. – С.18-23.
23. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982.
24. Sawaragi Y., Nakayama H., Takiko T. Theory of multiobjective optimization. – Orlando: Academic Press, 1985.
25. Полищук Л.И. Анализ многокритериальных экономико-математических моделей. – Новосибирск, Наука, 1989.
26. Смирнов М.М. Методы аппроксимации граней множества Парето в линейной многокритериальной задаче // Вестник МГУ. Серия Вычислительная математика и кибернетика. – 1996. – №3. – С.37-43.
27. Gal T. Postoptimal Analyses. Parametric Programming. Related Topics. – Berlin: Walter de Gruyter, 1995.
28. Давидсон М.Р. Липшиц – непрерывность паретовых крайних точек // Вестник МГУ. Серия Вычислительная математика и кибернетика. – 1996. – №4. – С.41-45.
29. Нефедов В.Н. Об аппроксимации множества Парето // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1984. – Т.24, – С.993-1007.
30. Попов Н.М. Об аппроксимации множества Парето методом сверток // Вестник МГУ. Серия Вычислительная математика и кибернетика. – 1982. – №2. – С.35-41.
31. Березкин В.Е., Каменев Г.К., Лотов А.В. Гибридные адаптивные методы аппроксимации невыпуклой многомерной паретовой границы // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т.46, №11. – С.1231-1242.
32. Семовская А.С. Аппроксимация множества неулучшенных оценок вектора критериев в задаче динамического принятия решений в условиях неопределенности // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2005. – №3. – С.12-23.
33. Ахрем А.А., Рахманкулов В.З. Виртуальное проектирование и принятие решений // Автоматизация проектирования. – 1997, №4. – С.20-30.
34. Ахрем А.А., Рахманкулов В.З., Соклеткин А.В. Модели проектирования и переноса передовых информационных технологий // В кн.: «Нелинейная динамика и управление. Вып.2». – М.: Физматлит, 2002. – С.271-278.
35. Мэнсфилд Э. Экономика научно-технического прогресса. – М.: Прогресс, 1970.
36. Сахал Д. Технический прогресс: концепции, модели, оценки. – М.: Финансы и статистика. 1985.
37. Ахрем А.А., Рахманкулов В.З. Динамические модели процесса технологического трансфера // В кн.: «Системные исследования. Методологические проблемы. Вып. 25». – М.: Эдиториал УРСС, 1997. – С.266-276.
38. Макаров И.М., Рахманкулов В.З., Ахрем А.А. Логистические дифференциальные модели технологического переноса // В кн.: Нелинейная динамика и управление. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – С.143-149.
39. Макаров И.М., Ахрем А.А., Рахманкулов В.З. Динамика процессов конкурентных взаимодействий на рынке технологического трансфера // В сб. трудов ИСА РАН: Методы и средства работы с документами. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – С.237-245.
40. Макаров И.М., Рахманкулов В.З., Ахрем А.А. Динамика процессов переноса передовых производственных технологий // в кн.: Новые методы управления сложными системами. – М.: Наука, 2004. – С.320-330.
41. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976.
42. Люстерник А.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965.
43. Тренгогин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980.
44. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984.

45. Тихонов А.Н. Арсенин В.Н. Методы решения некорректных задач.-М.:Наука, 1974.
46. Аоки М. Введение в методы оптимизации. -М. :Наука, 1977.
47. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики.- М.:Наука, 1977.
48. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М. :Наука, 1987.
49. Бабенко К.И. Основы численного анализа.-М. :Наука, 1986.
50. Локуцкий О.В., Гавриков М.Б. Начала численного анализа. -М. :Янус, 1995.
51. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. -М. :Изд-во МГУ, 1976.

Макаров Игорь Михайлович. Окончил МАИ в 1950 г. Академик РАН, доктор технических наук, профессор. Советник Президиума РАН. Автор более 230 научных работ. Специалист в области гибкой автоматизации производства, интеллектуальной робототехники и мехатроники, теории управления, системного анализа, математического моделирования.

Ахрем Андрей Афанасьевич. Старший научный сотрудник ИСА РАН. Окончил МГУ в 1977 г. Кандидат физико-математических наук. Автор 95 научных публикаций. Специалист в области качественной теории дифференциальных уравнений, математической теории систем, математического моделирования.

Рахманкулов Виль Закирович. Заведующий лабораторией «Методы исследования компьютерно-интегрированных систем» ИСА РАН. Окончил МАИ в 1960 г. Доктор технических наук, профессор. Автор более 150 научных работ. Специалист в области гибкой автоматизации производства, интеллектуальной робототехники и мехатроники, теории управления, системного анализа, математического моделирования, интеллектуального анализа данных. vilrakh@mail.ru