А.С. Самохина, Э.А. Трахтенгерц

Проблема компьютерного выбора моделей задач электродинамики

Аннотация. Основные этапы решения задач электродинамики можно представить как: формулировка задачи в формализованных содержательных терминах (построение физической модели); математическая формулировка задачи (построение математической модели); запись задачи с помощью дифференциальных или интегральных уравнений; определение краевых условий для дифференциальных уравнений; оценка параметров математической модели и критериев выбора оптимального решения; решение задачи электродинамики с помощью аналитических или численных методов (возможно с использованием математических пакетов программ); подбор аналогов; проверка верификации решения; анализ решения. Построение компьютерной системы поддержки выбора моделей, методов и алгоритмов решения задач математической физики, включая задачи электродинамики, является важным.

Ключевые слова: компьютерные системы, задачи электродинамики, управление выбором, принятие решений.

Введение

Использование вычислительных средств для решения задач математической физики являлось, в свое время, побудительной причиной развития электронных вычислительных машин. В свою очередь, совершенствование вычислительной техники позволяло расширить область решаемых задач математической физики. Увеличение скорости вычислений и объема оперативной памяти компьютеров предоставило возможность более широкого выбора моделей задач, например, помимо использования только дифференциальных уравнений, появилась возможность выбора между дифференциальной и интегральной формой записи задач электродинамики. Предоставление исследователю, ученому, инженеру возможности выбирать математическую модель задачи, методы и алгоритмы ее решения, проверять корректность этого выбора и обосновывать выбор наилучшего позволяет проводить исследовательскую работу и выполнять инженерные расчеты на более высоком уровне.

Таким образом, в настоящее время существует потребность в компьютерной поддержке корректной записи задач математической физики и компьютерной помощи в выборе методов их решения. Компьютерная система поддержки и управления выбором вводит новую составляющую при решении задач математической физики, это искусство использования средств вычислительной техники, которые должны сочетать оценки и решения, полученные уже устоявшимися (или вновь разработанными) математическими методами с субъективными оценками, сделанными на основе знаний, опыта и интуиции ученого, инженера.

Опишем основные этапы решения задач электродинамики.

1. Формулировка задачи в содержательных терминах (построение физической модели).

2. Математическая формулировка задачи (построение математической модели). Запись задачи с помощью дифференциальных или интегральных уравнений. Определение краевых условий для дифференциальных уравнений.

3. Оценка параметров математической модели и критериев выбора оптимального решения.

4. Решение задачи электродинамики с помощью аналитических или численных методов (возможно с использованием математических пакетов программ). Подбор аналогов. Проверка верификации решения. Анализ решения.

На каждом этапе возникает проблема выбора, будь то выбора корректной и оптимальной физической и математической модели, выбора численного или аналитического метода и алгоритма решения. Создание компьютерной системы поддержки и управления выбором моделей, методов и алгоритмов решения задач математической физики и, в частности, задач электродинамики, опирающуюся на базу знаний, составленную экспертами, имеющую возможность обрабатывать большое количество вариантов, используя готовые математические пакеты программ и работающую с пользователем в режиме on-line, поможет справиться с проблемой выбора.

1. Система управления выбором в задачах математической физики как система принятия решений

Во многих случаях задачу математической физики можно представить как краевую задачу определения в некоторой области D переменных $x=(x_1,...,x_n)$ решения $u(x)$ уравнения

$$(Lu)(x)=f(x), x\in D, \qquad (1)$$

удовлетворяющего на границе S этой области определенным краевым условиям

$$(Bu)(y)=\varphi(y), y\in S. \qquad (2)$$

Краевая задача является корректно поставленной, если ее решение существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных задачи. Корректность постановки задачи связана с видом оператора дифференциального уравнения L, формы границы S и оператора краевых условий B. Операторы L и B могут быть описаны алгебраическими функциями. Эти величины могут быть формализованы и обработаны компьютерной системой с привлечением экспертов-математиков для классификации задач математической физики на этапе построения базы знаний Системы поддержки выбора, чтобы в дальнейшем, на этапе формулировки конкретной задачи помочь пользователю корректно составить и правильно записать математическую формулировку задачи.

Во многих задачах может использоваться также альтернативная запись в виде интегрального уравнения. В этом случае краевые условия учитываются в ядре интегрального уравнения.

Система поддержки и управления выбором моделей, методов и алгоритмов решения задач математической физики является системой принятия решений в условиях полной информации, т.е. разработчик заранее знает какие возмущения действуют на систему и результат выбора пользователя определен однозначно – известен реализующийся элемент ς. Кроме того, отношения сравнения, установленные на множестве возможных состояний (x) определяются критериями оценки выбранного варианта определенной цели – величина скалярной функции $F(x)$. Можно сказать, что чем больше значение функции $F(x)$ тем лучше рассмотренный вариант системы соответствует выбранной цели.

Эти предположения подходят под хорошо разработанный класс оптимизационных моделей в теории принятия решений. Задачу рационального выбора варианта можно сформулировать следующим образом: найти элемент $a\in A$, который доставляет максимум функции $F(x)$ при дополнительном условии $x=\mu(a,\varsigma)$, ς - задано, μ - оператор, определяющий состояние системы по заданным воздействиям ς и варианту системы a.

В системе поддержки и управления выбором моделей, методов и алгоритмов решения задач математической физики соответствие выбранного варианта поставленной цели характеризуется значениями нескольких скалярных критериев $F_i(x), i=1,...,k$. В этом случае действует векторная оптимизация, которая заключается в следующем: если $F_i(x')>F_i(x''), i=1,...,k$, то вариант системы, который дает состояние x', лучше варианта, который дает состояние x''. Однако поскольку один вариант лучше по одним критериям, а другой по другим, то вводится понятие эффективного варианта. Эффективным называют вариант $x^*=\mu(a^*,\varsigma)$, который обладает следующим свойством – не существует $x=\mu(a,\varsigma), a\in A$, такой, что $F_i(x)\geq F_i(x^*), i=1,...,k$, и хотя бы при одном $i=i_0$ $F_{i_0}(x)>F_{i_0}(x^*)$. Предпочтительными считают эффективные варианты, это принцип Парето, и задачу рационального выбора формулируют так: найти все эффективные варианты $a^*, a^* \in A$, которым соответствуют эффективные состояния $x^* = \mu(a^*, \varsigma)$.

Укрупненная схема работы системы представлена на Рис. 1. Следует отметить, что на этапах выбора математических уравнений, краевых условий, численных методов решения, оценки выходных параметров – большая часть работы ложится на компьютерную систему поддержки выбора. Выбор осуществляется на основе информации введенной в Систему пользователями и информации хранящейся в базе данных составленной на основе знаний экспертов. Входная информация о задаче записывается с помощью специального языка, который позволяет анализировать задачу и предлагать пользователю возможные методы решения.

Таким образом, система поддержки выбора предназначена также для корректной записи задачи интегральными или дифференциальными уравнениями с определенными краевыми условиями и выбора численного метода решения.

2. Выбор и проверка корректной записи задачи электродинамики

Обозначим исходную задачу (1), записанную в математических терминах как Q, это краевая задача для дифференциального уравнения, так как это естественная исходная формулировка. Например, для двухмерного дифференциального уравнения в частных производных конкретная задача математической физики может быть сформулирована в следующем виде - Q_1.

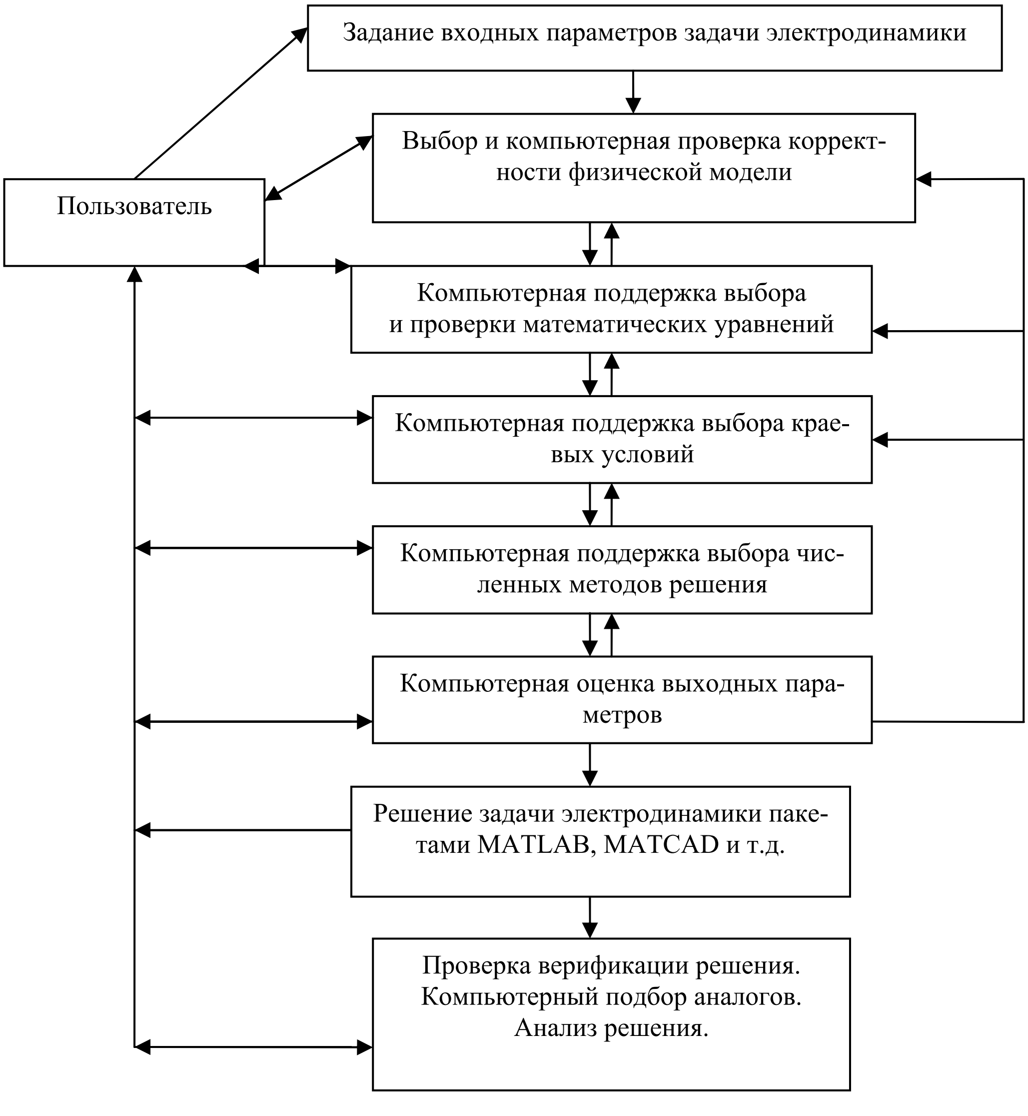

Рис. 1. Укрупненная схема системы поддержки выбора решения задач электродинамики

$$a_{11}(x_1,x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+2a_{12}(x_1,x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+a_{22}(x_1,x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+$$

$$+b_1(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}+b_2(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}+c_0u=f(x_1,x_2)$$

Здесь $u=u(x_1,x_2)$ неизвестная функция, а $f(x_1,x_2)$ - заданная функция координат.

Приведенное уравнение является эллиптическим в области D двумерного пространства E_2 (D может совпадать с E_2), если для всех точек $x=(x_1,x_2)$, $x\in D$,

$$\Phi(x,p)=|a_{11}(x)p_1^2+2a_{12}(x)p_1^2p_2^2+a_{22}(x)p_2^2|\neq 0,$$

для всех p_1,p_2,p_3, $p_1^2+p_2^2+p_3^2=1$.

Для корректной постановки задачи необходимо на границе области D задать дополнительные условия на искомую функцию *u*.

Исходную задачу *Q* можно представить как интегральное уравнение, в общем виде которое можно записать

$$a(x)u(x)+\int_D K(x,y)b(y)u(y)\,dy=f(x),$$

где *x* – точка двух или трехмерного пространства $x=(x_1,x_2)$ или $x=(x_1,x_{2,},x_3)$, D – область интегрирования, двухмерная поверхность или трехмерный объем; $a(x),b(x)$ - скаляр или вектор (в случае вектора указывается его размерность – *l*): $K(x,y)$ - ядро интегрального уравнения, может быть скаляр или матрица (в случае матрицы размерность будет $l\times l$.

Форма ядра интегрального уравнения $K(x,y)$ задается пользователем. Возможны следующие случаи:

1. $K(x,y)$ - ограниченная функция координат в области *D*.

2. $K(x,y)=\dfrac{M(x,y)}{R^\beta}$, где $M(x,y)$ - ограниченная функция координат в области *D*, R^β - расстояние между точками *x* и *y*, $\beta>0$ - задается пользователем; $R=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ - для двумерного, $R=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$ - для трехмерного случаев.

3. $K(x,y)=\dfrac{M(x-y)}{R^\beta}$

Для разного класса задач в базе данных или в справочной литературе пользователь может найти соответствующую величину параметра β.

На этапе задания функций $a(x),b(x)$ и $K(x,y)$ производится компьютерная проверка корректности поставленной задачи, в результате пользователю может быть сообщена следующая информация: задача поставлена корректно; задача поставлена не корректно, система дает подсказки для возможных видоизменений записи; задача поставлена условно корректно, система обращает внимание пользователя, что на этапе численного решения требуется особое внимание.

Корректность постановки задач (перевода физической модели в математическую) на этом этапе проверяется компьютером на основании теории размерности, которая опирается на следующие правила:

- члены физического уравнения имеют одинаковую размерность;
- вид физических уравнений не изменяется при переходе к другой системе единиц.

Выбор исследователем размерности может быть произведен в достаточной степени произвольно. Задача компьютера заключается в переводе одних единиц в другие, в том случае, если для измерения одной и той же величины были использованы разные единицы.

При проверке правильности записи физической задачи используются первая и вторая теоремы подобия. Первая теорема гласит, что у явлений, подобных в физическом, математическом, кибернетическом и т.д. смыслах, можно найти определенные сочетания параметров, называемые критериями подобия, имеющие одинаковое значение. Вторая теорема (π-теорема) гласит, что всякое полное уравнение физического процесса, записанное в определенной системе единиц, может быть представлено в виде зависимости между критериями подобия, т.е. безразмерных соотношений, составленных из входящих в уравнение параметров. Таким образом, она позволяет произвести замену переменных, сократив их число с m размерных величин до $m-k$ безразмерных величин, где k - число независимых величин и тем самым перейти к записи уравнений процессов в критериальной форме. При этом упрощается обработка аналитических и экспериментальных исследований, т.к. связи между безразмерными величинами π-критериями подобия выявляются проще, чем связи между обычными именованными величинами. Переход к безразмерным соотношениям позволяет распространять результаты аналитического или экспериментального исследования, проведенного применительно к конкретному явлению, на целый ряд подобных явлений [2].

В качестве примера рассмотрим приведение уравнений Максвелла с условиями излучения, которые описывают задачи рассеяния электромагнитных волн в среде к безразмерному виду:

$$rot\ rot\ \vec{E} - \varepsilon\mu_0\omega^2\vec{E} = \vec{J}^0, \qquad (3)$$

$\lim\limits_{r\to\infty}\left[r\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} - ik_0 u\right)\right] = 0, \quad k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ - условия излучения.

Все записанные физические величины имеют размерность. Операция $rot\,rot$ имеет размерность $\dfrac{1}{[длина]^2}$. Для приведения уравнения (3) к безразмерному виду используем следующую величину: $k_0\vec{x} = \vec{x}_{безразм.}$, $k_0 = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, где λ - длина волны.

Диэлектрическая проницаемость в приведенном уравнении рассматривается как относительная диэлектрическая проницаемость по отношению к диэлектрической проницаемости свободного пространства $\varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$. Операция $rot\,rot$ выполняется также по отношению к безразмерной длине - электрическому расстоянию $\underset{безразм.}{rot\ rot}\ \vec{E} - \varepsilon_r\vec{E} = \vec{J}^0$. В данном примере критерием подобия является электрическая длина и относительная диэлектрическая проницаемость.

Тем или иным образом уравнение математической физики может быть приведено к безразмерному виду.

3. Выбор и согласование физической модели задачи

На этапе выбора физической модели важным моментом является оценка адекватности модели исходной содержательной задаче. На этом этапе желательно привлечение экспертов и чем более важная задача решается, тем более необходимо привлечение экспертов (Рис. 2).

При описании явления важно установить подобие этого явления хранящимся в базе знаний. В этом поможет третья теорема подобия, которая формулируется следующим образом: необходимыми и достаточными условиями для создания подобия (модели) являются пропорциональность

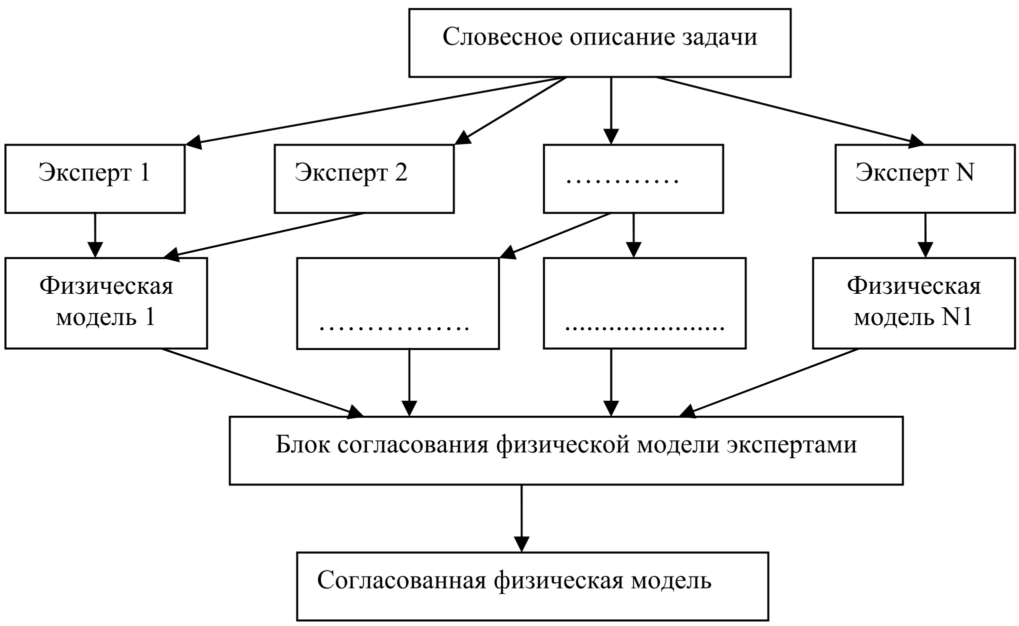

Рис. 2. Выбор физической модели задачи электродинамики

(нелинейное соответствие величин, входящих в условие однозначности, связанных нелинейными преобразованиями, для нелинейных процессов) сходственных параметров, входящих в условие однозначности, и равенство критериев подобия изучаемого явления.

Условия, определяющие индивидуальные особенности процесса или явления и выделяющие из общего класса конкретный процесс или явление, называются условиями однозначности. К ним относятся следующие факторы и условия, не зависящие от самого процесса: геометрические свойства системы, в которой протекает процесс; физические параметры среды и тел, образующих систему; начальное состояние системы (начальные условия); условия на границах системы (граничные или краевые условия); взаимодействие объекта и внешней среды. Значения параметров этих факторов и условий можно согласовывать с экспертами, используя для этого компьютерную систему поддержки выбора.

Так, при моделировании иногда бывает затруднительно применить π-теорему для установления количества критериев, обеспечивающих подобие. В этом случае желательно обращаться к экспертам, которые могут помочь выделить условия однозначности и критерии подобия путем логического анализа и контрольных экспериментов.

Рассмотрим более подробно блок согласования физической модели экспертами.

На первом этапе определяются объекты согласования. Это могут быть, скорее всего, следующие:

1. **Цели** – в англоязычной литературе термин «видение» (vision) – общее представление проблемы или «миссия» (mission) - глобальные задачи.

Формулировка цели обеспечивает общее понимание проблемы, определяет рамки для принимаемых текущих решений, направляя их русло конечной цели, дает основу для стратегического и текущего планирования, помогает объяснять деловую политику участникам работы, помогает находить контрольные точки и проводить мониторинг состояния дел, обеспечивает стимулирование изменений деловой политики.

2. **Стратегии** – способы достижения поставленной цели. Введем понятие полезности – вклад приносимый результатом решения подзадач в общее решение задачи математической физики. Принцип Пигу-Далатона гласит, что передача полезности от объекта i к объекту j увеличивает (или хотя бы не уменьшает) коллективную полезность, если полезность объекта i выше полезности объекта j до и после передачи. Выбирая ту или иную стратегию желательно ему следовать.

Практические оценки делают, исходя из функций полезности, заданных ограничений и принципа оптимальности, которому следует специалист. Покажем на примере.

Пусть цель можно реализовать с помощью n независимых стратегий. Для каждой стратегии задана зависимость затрат $S_i(\tau_i)$ от продолжительности ее выполнения τ_i, а также ограничения на суммарные затраты: $\sum_{i=1}^{n} S_i(\tau_i) \le S$. Требуется определить продолжительность реализации всех стратегий так, чтобы минимизировать потери C_i в единицу времени.

Будем считать, что допускается невыполнение ряда стратегий и, если i –я стратегия не выполняется, то потери ее невыполнения равны d_i. Требуется найти такое множество стратегий Q, которое будет выполняться, сводя к минимуму возможные потери, а также продолжительность этих стратегий при ограничении $\sum_{i\in Q} S_i(\tau_i) \le S$.

В этом случае потери будут равны $\Phi(\tau_i, Q) = \sum_{i\in Q} C_i\tau_i + \sum_{i\notin Q} d_i$, поскольку

$$\sum_{i\notin Q} d_i = \sum_{i=1}^{n} d_i - \sum_{i\in Q} d_i,\ \ \Phi(\tau, Q) = \sum_{i\in Q}(C_i\tau_i - d_i) + \sum_{i=1}^{n} d_i$$

В случае дискретной зависимости приходим к задаче выбора оптимального множества реализуемых стратегий Q такого, что $\sum_{i\in Q}(C_i\tau_i - d_i) \to \min$ при ограничении $\sum_{i\in Q} S_i(\tau_i) \le S$.

Как видим в данном случае целью является минимизация суммарных потерь при решении проблемы.

3. **Критерии** – показатели, характеризующие поставленную цель. Набор используемых критериев зависит от субъективных оценок пользователей, от их видения проблемы и характера цели, которую стремятся достичь. Для

всякой конкретной области приложений существует свой более менее устоявшийся набор критериев, который может варьироваться в зависимости от сложившейся обстановки и субъективных предпочтений руководителя. Для задач математической физики это могут быть достаточно точные числовые критерии, такие как число операций, необходимых для решения задачи и/или объем требуемой памяти или достаточно размытые оценки, такие как точность решения, адекватность решения поставленной задачи, корректность и т.д.

Каждый критерий зависит от внешних и внутренних параметров системы. Например, время, необходимое для решения задачи, обусловлено не только числом вычислительных операций, но и скоростью компьютеров, их количеством, возможностью распараллеливания алгоритмов и т.д. Предварительно проводится исследование критериев на предмет их значимости, так как можно предположить, что существенные критерии имеют непостоянную степень важности, которая зависит как от конкретной задачи, так и от предпочтений лица принимающего решения при выборе математической модели задачи электродинамики. Согласование параметров критериев, оценки их значений и присвоение весов критериям выполняется экспертами. На основании критериев, используя их значения и веса можно ранжировать цели и стратегии.

4. Выбор математической модели задачи

На этапе выбора математических уравнений, пользователь формулирует содержательную часть задачи на языке записи и на этом этапе Система предлагает на выбор запись в дифференциальном или интегральном виде.

Фрагмент дерева возможных способов построения математических моделей задач электродинамики, описываемых интегральными уравнениями можно представить в следующем виде (Рис. 3).

Ветвями дерева являются: Q_1 - краевые задачи для дифференциальных уравнений; Q_2 - интегральные уравнения; Q_{21} - поверхностные интегральные уравнения; Q_{22} - объемные интегральные уравнения; Q_{211} - интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода; Q_{212} - интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода; Q_{213} - сингулярные интегральные уравнения; Q_{214} - гиперсингулярные интегральные уравнения.

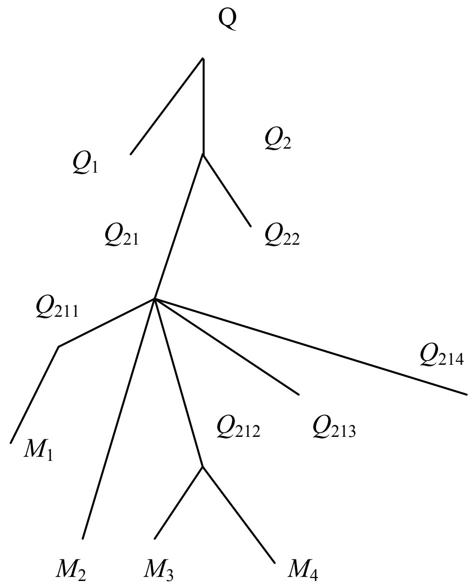

Рис. 3. Фрагмент дерева возможных математических моделей задач электродинамики

На каждом разветвлении проводится проверка корректности математической записи и поиск аналогов на основании знаний экспертов, используемых при проектировании и построении Системы выбора.

$M_1 \ldots M_n$ - предлагаемые аналитические или численные методы решения интегральных уравнений из которых пользователь при помощи системы подсказок производит выбор.

В качестве примера приведем выбор формы записи задачи электромагнитного рассеяния на трехмерных объектах основанный на двух параметрах: T - число операций, необходимых для решения задачи и гарантирующих определенную точность и M – объем требуемой памяти.

I. Запись с помощью дифференциальных уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} rot\ \vec{H} &= -i\omega\hat{\varepsilon}\vec{E} + \vec{J}_E^0 \\ rot\ \vec{E} &= -i\omega\hat{\mu}\vec{H} + \vec{J}_H^0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Рассмотрим три задачи:

1. Электромагнитное рассеяние на ограниченных диэлектрических объектах в свободном пространстве.

2. Электромагнитное рассеяние на ограниченном идеально проводящем теле или поверхности.

3. Электромагнитное рассеяние на диэлектрических объектах, находящихся внутри замкну-

той идеально проводящей поверхности (например, СВЧ-печь).

Для первой задачи решение помимо уравнений Максвелла должно удовлетворять условию излучения на бесконечности.

Для второй задачи, помимо двух условий первой задачи, должно выполняться равенство нулю тангенциальной составляющей электромагнитного поля на поверхности идеального проводника.

Для третьей задачи условия излучения отсутствуют, поскольку задача задана в ограниченной области, а граничными условиями является равенство нулю тангенциальной составляющей электромагнитного поля, на границе идеально проводящей поверхности (например, поверхности СВЧ-печи).

Для первых двух задач необходимо выполнение условия излучения на бесконечности. На практике, для численного решения эти условия заменяются приближенными условиями излучения на конечной поверхности, диаметр которого значительно больше диаметра рассеивающего объекта. В этом случае количество узловых точек, где ищется решение, значительно больше (в куб раз) числа узловых точек в рассеивающем объекте. Например, количество узловых точек в рассеивающем объекте 100x100x100=10^6, в этом случае, количество узловых точек, где ищется решение в области, на границе которой ставится приближенное условие излучения, должны быть как минимум в 10 раз больше по каждой из трехмерных декартовых осей. Т.е. общее количество узловых точек должно быть как минимум 10x10x10x10^6 (Рис.4).

II. Рассмотрим альтернативную формулировку записи задачи электромагнитного рассеяния

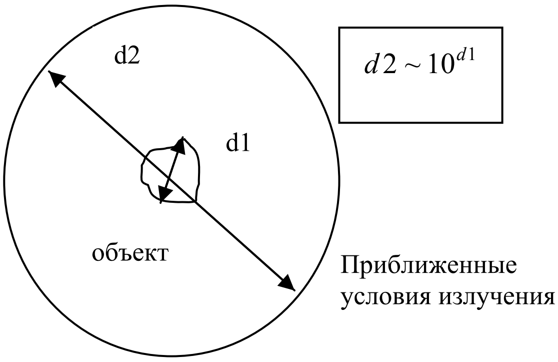

Рис. 4. Схематичное изображение объекта и приближенных условий излучения для дифференциального вида

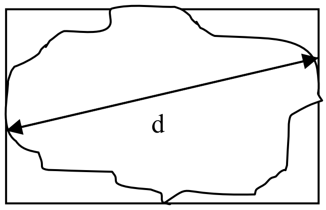

Рис. 5. Схематичное изображение объекта для интегрального уравнения

на трехмерных объектах с помощью интегральных уравнений. В отличие от дифференциальных уравнений, условия излучения присутствуют (зашиты) в ядре интегрального уравнения и решение ищется только относительно значения поля в области объекта рассеивания. На Рис.5 изображена проекция объекта с диаметром *d*, помещенного в прямоугольный параллелепипед.

Для первой задачи объемное интегральное уравнение записывается следующим образом

$$\vec{E}(x) = \vec{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q (\hat{\varepsilon}_r - \hat{I})\, \vec{E}(y) G(R) dy +$$

$$+ grad\ div \int_Q (\hat{\varepsilon}_r - \hat{I})\, \vec{E}(y) G(R) dy \,.$$

Для второй задачи поверхностное интегральное уравнение записывается следующим образом

$$\vec{J}(x) + 2\left[\vec{n}(x), \int_S (\vec{J}(y), grad\ G(R))\, dS_y\right] =$$

$$= 2[\vec{n}(x), \vec{H}^0(x)],\ x \in S \,.$$

Для третьей задачи в общем случае невозможно записать интегральное уравнение.

5. Выбор критериев и оценка их значений

На всех этапах выбора, будь то математических уравнений, краевых условий, численных методов решения или оценки входных параметров возникает проблема выбора параметров, критериев и оценки их значений. Как было отмечено выше, это могут быть точные числовые критерии (число операций, необходимых для решения задачи и/или объем требуемой памяти) или не точные оценки, такие как точность решения, адекватность решения поставленной задачи, корректность и т.д.

Рассмотрим выбранные точные числовые критерии численных методов, относящиеся как к дифференциальным уравнениям, так и к интегральным – T и M. Причем $T \approx LT_A$, где L – число итераций, которое необходимо для получения решения с заданной точностью, T_A - число арифметических операций, требуемое для умножения матрицы системы линейных алгебраических уравнений, полученных после дискретизации функциональных уравнений, на вектор.

Для первых двух задач, записанных в дифференциальном виде, требуется условие излучения на бесконечности, что при численном решении заменяется условием излучения на поверхности, находящейся далеко от объекта. В этом случае матрица СЛАУ слабо заполнена – количество ненулевых элементов на строке ≈ 10, поэтому такую матрицу просто умножать и числовой критерий $T_A \approx 10N_D$, где N_D - число неизвестных в области, на границе которой ставятся приближенные условия излучения. Тогда, требуемый размер памяти порядка N_D. Очевидно, что в этом случае проблем с объемом памяти для решения дифференциальных уравнений не существует.

Для первой задачи, записанной в интегральном виде, матрица СЛАУ полностью заполнена (как и для всех интегральных уравнений) и получаем следующие числовые критерии $T_A \approx N_l LOG(N_l)$, где N_l - число неизвестных в рассеивающем объекте, LOG – целочисленный логарифм, являющийся суммой всех простых сомножителей числа (например, для 10^6 LOG=42). Дадим следующее определение LOG - $LOG(N) = \sum_{i=1}^{m} N_i, \quad N = \prod_{i=1}^{m} N_i$, где N_i - простые сомножители числа N, m – число простых сомножителей. Требуемая память для хранения матрицы СЛАУ пропорциональна числу неизвестных $M \approx N_l$.

Для второй задачи, записанной в интегральном виде $T_A \approx N_l^{\,2}$, где N_l - число неизвестных в рассеивающем объекте. Число неизвестных для интегральных уравнений как минимум в тысячу раз меньше, чем число неизвестных, требуемых для решения дифференциальных уравнений той же задачи. $N_l << N_D$. N_D - число неизвестных для дифференциальной задачи, так как для интегральной задачи решение ищется внутри объекта, а для дифференциальной задачи, решение ищется в области, существенно больше размеров объекта.

На основании вышеизложенного, можно сделать следующие выводы. Для первой задачи лучше использовать интегральные уравнения, для второй задачи в некоторых случаях лучше использовать дифференциальные уравнения, в некоторых – интегральные. Для третьей задачи вне конкуренции дифференциальные уравнения, так как в этом случае нет условий излучения на бесконечности. На Рис. 6 показана связь между видом уравнений, методами их решений и числовыми критериями – числом арифметических операций и объемом памяти.

6. Проверка верификации решения

Проверка верификации решения возникает в том случае, если при каких-то параметрах есть известное решение (например, есть решение задачи дифракции на шаре) и производится сравнение полученного решения с уже известным с учетом отличия задач.

В качестве примера рассмотрим сингулярное объемное интегральное уравнение, описывающее задачи рассеяния электромагнитных волн на трехмерных диэлектрических объектах сложной формы

$$\vec{E}(x) + \frac{1}{3}(\varepsilon_r(x) - 1)\vec{E}(x) -$$

$$- p.v. \int_Q \left((\varepsilon_r(y) - 1)\vec{E}(y), \mathrm{grad}\right) \mathrm{grad}\, G(R)\, dy -$$

$$- k_0^2 \int_Q (\varepsilon_r(y) - 1)\vec{E}(y)\, G(R)\, dy = \vec{E}^0(x), \quad x \in Q.$$

После построения алгоритма решения этого уравнения, для проверки точности необходимо сравнить решение, полученное на основе выбранного алгоритма с известными точными решениями. Хорошим тестовым примером является задача рассеяния электромагнитных волн на диэлектрическом – задача Ми [4]. Решение задачи Ми получено в аналитическом виде. В интегральном уравнении область Q выбирается в виде шара, а диэлектрическая проницаемость выбирается постоянной в области. Для этих исходных данных полученное численное решение сравнивается с решением задачи Ми. На основании этого сравнения можно оценить точность построенного алгоритма.

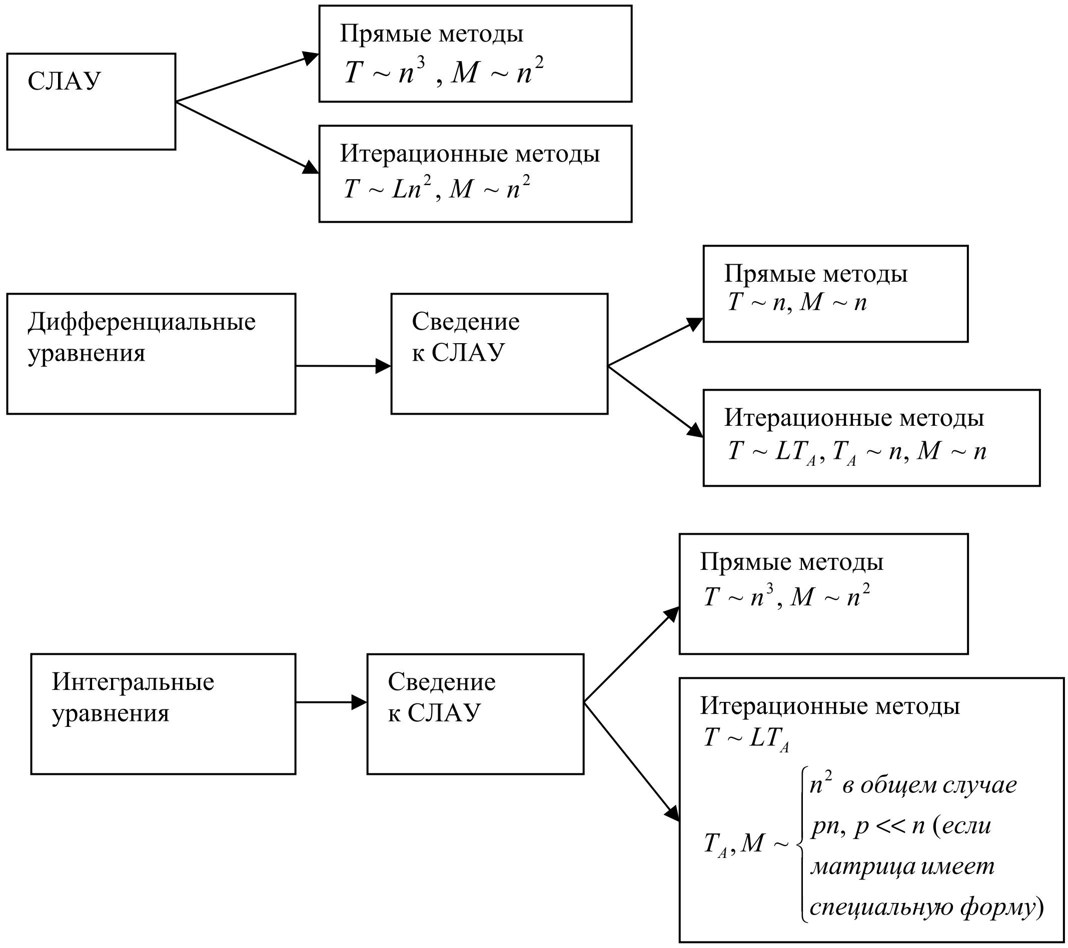

Рис. 6. Оценка числовых критериев решения задачи, представленной уравнениями разного вида

Обусловлено это тем, что процессы, происходящие при рассеянии электромагнитных волн на трехмерных диэлектрических объектах сложной формы и на шаре, являются автомодельными, т.е. происходит автоматическое соблюдение исходного явления его подобию независимо от абсолютных величин параметров элементов системы, в которой данное явление протекает. Одним из формальных признаков автомодельности является требование $m \leq k$, где m число параметров модели (шара), k- число независимых параметров системы.

Заключение

Сегодня уже многие специалисты, исследующие и решающие задачи математической физики и, в частности, задачи электродинамики, имеющие доступ к всевозможным пакетам прикладных программ, осознают необходимость формальных методов анализа задач, генерации, оценки и оптимизации с помощью компьютерных систем, поскольку они могут обеспечить выбор корректной записи и выполнение адекватного решения поставленной задачи. Эта тенденция может стать одним из перспективных направлений применения вычислительной техники.

Литература

1. Михлин С.Г. Курс математической физики. - М.: Наука, 1968. - 575 с.
2. Веников В.А. Теория подобия и моделирование применительно к задачам электроэнергетики. - М.: Высшая школа, 1966. - 487 с.
3. Трахтенгерц Э.А. Компьютерная поддержка формирования целей и стратегий. - М.: СИНТЕГ, 2005. - 217 с.
4. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. – М.-Л.: Энергия, 1967.-376 с.

Самохина Анна Сергеевна. Ведущий научный сотрудник Института проблем управления РАН. Окончила Московский Экономико-Статистический Институт в 1975 году. Доктор технических наук. Имеет 39 печатных работ, из них 2 монографии. Область научных интересов: Поддержка принятия решений. E-mail: assamokhina@yandex.ru.

Трахтенгерц Эдуард Анатольевич. Главный научный сотрудник ИПУ РАН. Окончил Сталинградский педагогический институт в 1960 году. Доктор технических наук. Имеет 200 печатных работ, из них 15 монографий. Область научных интересов: теория систем поддержки принятия решений (СППР), методология и алгоритмизация создания СППР. E-mail: tracht@ipu.ru.