

Сужение множества Парето на основе информации множественно-точечного типа¹

Аннотация. Рассматривается аксиоматический подход к сужению множества Парето в задаче многокритериального выбора на основе полученного от ЛПР набора информации. Используемая информация отражает, в какой мере ЛПР готово потерять в значениях одной группы критериев, чтобы улучшить значения нескольких других групп критериев. Установлено, что использование данной информации позволяет удалить из исходного множества Парето целый ряд элементов и, тем самым, облегчить дальнейший процесс выбора.

Ключевые слова: многокритериальный выбор, компромисс, сужение множества Парето, аксиоматический подход.

Введение

Многокритериальные задачи нередко возникают во многих областях техники и экономики. Они образуют обширный класс, который интересен и с теоретической точки зрения. В статье [3] предпринята классификация различных методов решения указанных задач. Главная проблема здесь заключается как в постулировании самого понятия «наилучшего» решения, так и в обоснованном использовании имеющейся в задаче информации при поиске этого «наилучшего» решения.

Автор данной работы еще в начале 80-х годов прошлого столетия начал разрабатывать так называемый аксиоматический подход, предназначенный для решения задач с числовыми критериями. Этот подход предполагает отказ от формального определения понятия «наилучшего» решения и постулирования определенных аксиом «разумного» поведения ЛПР, которые на основе неполной, фрагментарной информации о предпочтениях ЛПР позволяют построить оценки сверху для неизвестного множества выбираемых решений [1, 2].

Самой простой информацией о предпочтениях ЛПР является указание пары критериев и двух чисел, первое из которых отражает вели-

чину уступки по одному из критериев, на которую согласно пойти ЛПР, ради выигрыша по другому критерию на величину, равную второму числу. Выявление такой информации обычно не вызывает затруднений, а ее учет на основе специальных правил приводит к сокращению числа возможных вариантов выбора «наилучшего» решения, что облегчает последующий окончательный выбор.

Более общая ситуация возникает тогда, когда вместо двух критериев и двух чисел рассматриваются две группы критериев и два набора соответствующих чисел. В таком случае полученная от ЛПР информация характеризует степень его готовности проявлять гибкость (идти на компромисс) при сопоставлении не двух критериев, а уже двух групп критериев. Здесь также разработаны правила [2], на основе которых следует учитывать указанную информацию.

Наконец, в самом общем случае может быть несколько пар групп критериев подобного типа. Тем самым возникает потребность учета набора такой информации о предпочтениях ЛПР. К сожалению, правил учета произвольного конечного набора указанной информации к настоящему времени не существует (если заранее не предполагать конечность множества исходных вариантов).

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 08-01-00301).

В данной работе предполагается, что задан конечный набор информации о предпочтениях, который характеризует готовность ЛПР идти на компромисс при сопоставлении вариантов, теряя по одной группе критериев ради выигрыша по каким-то другим фиксированным группам критериев. Подобная ситуация в определенном плане симметрична той, которая послужила предметом рассмотрения предшествующей работы автора [4], где речь шла об информации точно-множественного типа.

Полученные здесь результаты являются дальнейшим продвижением в развитии аксиоматического подхода и представляют собой правила учета заданного набора информации. Применение этих правил сводится к формированию по определенным формулам нового векторного критерия и последующему удалению из числа исходных вариантов тех, которые лежат за пределами множества Парето относительно нового векторного критерия.

1. Постановка задачи.

Аксиомы разумного выбора

Рассмотрим задачу (модель) многокритериального выбора $\langle X, f, \succ_X \rangle$ в следующей постановке. Заданы:

X – множество возможных вариантов (решений), из которого следует осуществлять выбор; это непустое множество произвольной природы;

$f = (f_1, \dots, f_m)$, $m \geq 2$ – векторный критерий, определенный на множестве X и принимающий числовые значения в арифметическом векторном пространстве R^m ;

$\succ_X$ – асимметричное бинарное отношение строгого предпочтения ЛПР, определенное на множестве X . Запись $x_1 \succ_X x_2$ для $x_1, x_2 \in X$ означает, что вариант x_1 для ЛПР предпочтительнее варианта x_2 ; иными словами, при выборе из двух данных вариантов ЛПР выберет первый и не выберет второй.

Результатом решения задачи многокритериального выбора является подмножество множества возможных вариантов X , которое именуется *множеством выбираемых вариантов* и обозначается $C(X)$. В частном случае это множество может состоять из одного элемента.

В дальнейшем будут также использоваться множество возможных векторов (векторных оценок) $Y = f(X) \subset R^m$ и множество выбираемых векторов $C(Y) = f(C(X))$. Будем считать, что на множестве возможных векторов Y задано отношение строгого предпочтения $\succ_Y$ (которое на практике обычно полностью не известно), согласованное с отношением $\succ_X$ следующим образом:

$$x_1 \succ_X x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \succ_Y f(x_2)$$

$$\text{для всех } x_1 \in \tilde{X}_1, x_2 \in \tilde{X}_2; \tilde{X}_1, \tilde{X}_2 \in \tilde{X},$$

где $\tilde{X}$ – совокупность классов эквивалентности, порожденных отношением эквивалентности $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ на множестве X .

Модель многокритериального выбора $\langle Y, \succ_Y \rangle$ в терминах векторных оценок включает множество возможных векторов Y и отношение строгого предпочтения $\succ_Y$, заданное на множестве Y , а решением задачи многокритериального выбора в таком случае является множество выбираемых векторов $C(Y)$. Между задачами выбора в терминах вариантов, а также в терминах их оценок имеется очевидная связь, которая дает возможность любое высказывание, сформулированное в одних терминах, переформулировать в другие термины.

Приведем определения множества парето-оптимальных векторов

$$P(Y) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y, \text{ что } y \geq y^*\}$$

и парето-оптимальных вариантов

$$P_f(X) = \{x^* \in X \mid \text{не существует такого } x \in X, \text{ что } f(x) \geq f(x^*)\}.$$

Здесь запись $y' \geq y''$ означает, что каждая компонента первого вектора больше либо равна соответствующей компоненты второго вектора, причем $y' \neq y''$, т.е., по крайней мере, одна компонента первого вектора строго больше соответствующей компоненты второго вектора.

Напомним сформулированные ранее «разумные» требования к отношению предпочтения и множеству выбираемых векторов [2].

Аксиома 1 (аксиома исключения доминируемых векторов). Для любой пары векторов $y', y'' \in Y$, удовлетворяющих соотношению $y' \succ_Y y''$, выполнено $y'' \notin C(Y)$.

Смысл аксиомы 1 состоит в том, что любой не выбираемый в паре вектор не должен выбираться и из всего множества векторов.

Аксиома 2 (аксиома существования транзитивного продолжения). *Для отношения $\succ_Y$ существует иррефлексивное и транзитивное продолжение на декартово произведение $\hat{Y} = f_1(X) \times \dots \times f_m(X) \subset R^m$, обозначаемое далее как $\succ$.*

В соответствии с аксиомой 2 отношение $\succ_Y$ является сужением отношения $\succ$ на множество Y и обладает свойствами иррефлексивности и транзитивности (а значит, и асимметричности). Смысл этой аксиомы заключается в том, что ЛПР в принципе может сравнивать любые (а не только возможные) векторные оценки, причем в ходе сравнения ЛПР должно вести себя «разумным» (т.е. транзитивным) образом. Указанное продолжение может оказаться неединственным; какое именно выбрать продолжение согласно аксиоме 2 значения не имеет.

Аксиома 3 (аксиома согласования). *Каждый из критериев $f_1, f_2, \dots, f_m$ согласован с отношением предпочтения $\succ$.*

Напомним, что критерий f_i называют согласованным с отношением предпочтения $\succ$, если для любых двух векторов $y', y'' \in \hat{Y}$, таких, что

$$y' = (y'_1, \dots, y'_{i-1}, y'_i, y'_{i+1}, \dots, y'_m), \\ y'' = (y'_1, \dots, y'_{i-1}, y''_i, y'_{i+1}, \dots, y'_m), \quad y'_i > y''_i,$$

верно $y' \succ y''$. Иначе говоря, ЛПР заинтересовано в увеличении значения критерия, если этот критерий согласован с отношением предпочтения.

Принцип Эджворта-Парето [1-2]. *Пусть выполнены аксиомы 1–3. Тогда для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ имеет место включение $C(Y) \subset P(Y)$.*

Согласно этому фундаментальному принципу ЛПР, осуществляющее свой выбор в соответствии с аксиомами 1-3, должно производить поиск «наилучших» вариантов только в пределах множества Парето. Иначе говоря, множество Парето является оценкой сверху для неизвестного множества выбираемых векторов. Установлено, что эта оценка точная, и отказ от хотя бы одной из указанных выше аксиом может привести к тому, что выбираемый («лучший») вектор может оказаться за пределами множества Парето. Следует

добавить, что принцип Парето верен и для не-транзитивных отношений, когда предполагаются выполненными лишь аксиома исключения и аксиома Парето.

При решении прикладных задач нередко имеется набор информации следующего типа: заданы векторы $u^i, v^i \in R^m$ (обычно они выявляются в ходе непосредственного опроса ЛПР о его предпочтениях), не связанные друг с другом отношением $\geq$, но удовлетворяющие условию $u^i \succ v^i, i=1, \dots, k$. При наличии такого рода информации возникают два вопроса: является ли эта информация непротиворечивой и, если она непротиворечива, то каким образом, учитывая эту информацию, можно сузить множество Парето?

Что касается вопроса непротиворечивости, то он полностью решен в [2], где дано строгое определение непротиворечивого набора, а также получены критерии непротиворечивости, которые можно использовать при решении конкретных задач. Второй вопрос пока не получил окончательного ответа. В общем случае выявлены лишь определенные наборы векторов, для которых найдены соответствующие оценки сверху для неизвестного множества $C(Y)$ в виде некоторого множества Парето с новым векторным критерием [2].

Ниже формулируются утверждения, представляющие собой дальнейшие продвижения в указанном направлении. Чтобы получить более или менее существенное сокращение множества Парето, учитывая соотношения $u^i \succ v^i$, добавим еще одну аксиому дополнительно к сформулированным выше.

Аксиома 4 (аксиома инвариантности). *Отношение предпочтения $\succ$ является инвариантным относительно линейного положительного преобразования, обладающего свойствами:*

однородности – из выполнения $u^i \succ v^i$ всегда следует $\lambda u^i \succ \lambda v^i$ для любого положительного числа λ ;

аддитивности – из выполнения $u^i \succ v^i$ всегда следует $(u^i + c) \succ (v^i + c)$ для любого вектора $c \in R^m$.

Заметим, что соотношение $u^i \succ v^i$ в условиях аксиомы 4 равносильно $u^i - v^i \succ 0_m$, где 0_m обозначает нулевой вектор $(0, 0, \dots, 0)$. Тогда и

вектор v^i в соотношении $u^i \succ v^i$ можно считать нулевым, что и принято далее. Следует, однако, признать, что при сравнениях иногда удобнее считать, что вектор v^i состоит из одних единиц. При желании, в силу инвариантности, и такое предположение всегда можно считать выполненным. Подобные замечания могут относиться и к вектору u^i .

Так как векторы u^i и 0_m не сравнимы по отношению $\geq$, то у вектора u^i обязательно найдется хотя бы одна строго положительная и хотя бы одна строго отрицательная компоненты. При этом вектор u^i может иметь и нулевые компоненты. Тем самым, выполнение соотношения $u^i \succ 0_m$ означает, что вектор u^i по некоторым компонентам «лучше» (т.е. больше) нулевого вектора 0_m , тогда как по другим компонентам он будет обязательно «хуже» (т.е. меньше) нулевого вектора. Выполнение соотношения $u^i \succ 0_m$ можно истолковать, как способность ЛПР идти на определенный компромисс, т.е. готовность жертвовать по одним критериям ради получения добавок по каким-то другим критериям (при сохранении значений по всем остальным критериям).

2. Учет набора информации множественно-точечного типа

Сначала рассмотрим ситуацию, когда в соответствии с имеющейся информацией о предпочтениях, ЛПР ради увеличения значений критериев в двух группах A и B готово пожертвовать значениями в третьей группе C . Как показывает следующая теорема, подобного рода информация всегда непротиворечива, а ее учет сводится к формированию векторного критерия путем замены в «старом» векторном критерии всех компонент из группы C на «новые», вычисляемые по определенным формулам. При этом общее число компонент в образовавшемся «новом» векторном критерии может разве что увеличиться по сравнению с размерностью «старого» векторного критерия. Далее необходимо построить множество Парето относительно сформированного векторного критерия. Это множество даст искомую оценку сверху для неизвестного множества выбираемых векторов,

т.е. все векторы за его пределами не должны оказаться выбранными, поскольку их выбор не согласуется с имеющейся информацией о предпочтениях ЛПР.

Теорема 1. Пусть выполнены аксиомы 1–4, заданы три попарно непересекающихся подмножества номеров критериев $A, B, C \subset I$ и имеется информация о том, что $y' \succ 0_m$ и $y'' \succ 0_m$, где векторы y' и y'' имеют следующие компоненты:

$$\begin{aligned} y'_i &= w'_i \text{ для всех } i \in A; \quad y'_k = -w'_k \text{ для всех } k \in C; \\ y'_s &= 0 \text{ для всех } s \in I \setminus (A \cup C); \\ y''_j &= w''_j \text{ для всех } j \in B; \quad y''_k = -w''_k \text{ для всех } k \in C; \\ y''_s &= 0 \text{ для всех } s \in I \setminus (B \cup C), \end{aligned}$$

причем все w'_i, w'_k, w''_j, w''_k – фиксированные положительные числа.

Тогда указанная информация непротиворечива, и для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ справедливы включения

$$C(Y) \subset \hat{P}(Y) \subset P(Y), \quad (1)$$

где $\hat{P}(Y) = f(P_g(X))$ – подмножество возможных векторов, соответствующих множеству парето-оптимальных вариантов в многокритериальной задаче с множеством возможных вариантов X и новым $(m - |C| + |A| \cdot |B| \cdot |C|)$ -мерным векторным критерием g , имеющим компоненты:

$$g_{ijk} = w'_i w''_j f_k + w''_j w'_k f_i + w'_i w'_k f_j \quad \text{для всех } i \in A, j \in B, k \in C; \quad (2)$$

$$g_s = f_s \quad \text{для всех } s \in I \setminus C.$$

В соответствии с теоремой 1, для того чтобы учесть набор информации о предпочтениях ЛПР, полученный в виде двух соотношений $y' \succ 0_m$ и $y'' \succ 0_m$, и сузить множество Парето, нужно сформировать новый векторный критерий g по формулам, приведенным в условиях теоремы, после чего построить множество Парето $P_g(X)$ относительно сформированного критерия. Множество векторов, отвечающих новому множеству Парето, т.е. $\hat{P}(Y) = f(P_g(X))$, и составит искомую оценку сверху для множества выбираемых векторов. Заметим, что теорема 1 носит универсальный характер: она верна для любых критериев f и произвольных множеств возможных решений X без каких-либо ограничений, поскольку на

указанные объекты в формулировке этой теоремы никакие требования не накладываются.

Полученный результат можно переформулировать при помощи следующего вспомогательного утверждения.

Лемма. Пусть M – совокупность всех линейных неотрицательных комбинаций набора векторов $e^1, \dots, e^m$, y' , y'' , где $e^1, \dots, e^m$ – единичные орты пространства R^m , а векторы y' , y'' имеют тот же вид, что и в теореме 1.

Включение $y \in M$ выполняется тогда и только тогда, когда имеют место неравенства

$$\min_{k \in C} \left[y_k + w_k' \min_{i \in A} \frac{y_i}{w_i'} + w_k'' \min_{j \in B} \frac{y_j}{w_j''} \right] \geq 0, \quad (3)$$

$$y_s \geq 0 \quad \forall s \in I \setminus C. \quad (4)$$

Из доказательства теоремы 1 и леммы вытекает

Следствие 1. Пусть выполнены аксиомы 1–4 и имеется информация об отношении предпочтения из условий теоремы 1. Тогда для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ справедливо включение

$$C(Y) \subset \tilde{P}(Y) \cap P(Y), \quad (5)$$

в котором $\tilde{P}(Y) = f(P_h(X))$ – подмножество возможных векторов, отвечающих множеству парето-оптимальных вариантов в многокритериальной задаче с множеством возможных вариантов X и новым $(m - |C| + 1)$ -мерным векторным критерием h , имеющим компоненты

$$h' = \min_{k \in C} \left[f_k + w_k' \min_{i \in A} \frac{f_i}{w_i'} + w_k'' \min_{j \in B} \frac{f_j}{w_j''} \right], \quad (6)$$

$$h_s = f_s \quad \text{для всех } s \in I \setminus C.$$

Следует заметить, что в общем случае включение $\tilde{P}(Y) \subset P(Y)$ не имеет места, поэтому в формулировке следствия 1 вместо включений (1) фигурирует включение $C(Y) \subset \tilde{P}(Y) \cap P(Y)$. Правило использования результатов теоремы 1 и следствия 1 практически одно и то же. Отличие состоит в конкретном виде нового векторного критерия g (или h), с помощью которого должна формироваться оценка сверху $\hat{P}(Y)$ для множества выбираемых вариантов.

В общем случае второй критерий h имеет меньшую размерность, чем g . Это, безусловно,

несколько упрощает построение множества $\hat{P}(Y)$ на основе следствия 1, по сравнению с теоремой 1. Однако, как нетрудно проверить, из-за нелинейного вида функции (6) следствие 1 можно применять лишь для критериев, значения которых измеряются в шкале отношений, тогда как теорему 1 можно использовать для более широкого класса – шкалы интервалов. Кроме того, линейная зависимость всех компонент нового векторного критерия g от компонент исходного критерия сохраняет многие полезные свойства, например, линейность и дифференцируемость, чего нельзя сказать о компонентах функции (6).

Используя схему доказательства теоремы 1, при помощи аналогичных рассуждений можно установить более общее утверждение, когда ради увеличения значений по критериям группы A ЛПР готово пойти на уменьшение критериев уже не трех, а целого набора групп $B_1, B_2, \dots, B_k$. А именно, имеет место следующий результат.

Теорема 2. Пусть выполнены аксиомы 1–4, задан конечный набор $k+1$ попарно непересекающихся подмножеств номеров критериев $A_1, A_2, \dots, A_k, B \subset I$ и имеется информация о том, что $y^s \succ 0_m$, $s = 1, \dots, k$, где векторы y^s (для $s = 1, \dots, k$) имеют компоненты:

$$y_i^s = w_i^s \quad \text{для всех } i \in A_s;$$

$$y_j^s = -w_j^s \quad \text{для всех } j \in B;$$

$$y_t^s = 0 \quad \text{для всех } t \in I \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_s \cup B),$$

причем все w_i^s, w_j^s – фиксированные положительные числа.

Тогда указанная множественно-точечная информация непротиворечива, и для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ справедливы включения (1), в которых $\hat{P}(Y) = f(P_g(X))$ – подмножество возможных векторов, соответствующих множеству парето-оптимальных вариантов в многокритериальной задаче с множеством возможных вариантов X и новым $(m - |B| + |B| \cdot \prod_{s=1}^k |A_s|)$ -мерным векторным критерием g , имеющим компоненты

$$\begin{aligned} g_{ji_1 \dots i_k}^s &= w_{i_1}^s \cdot \dots \cdot w_{i_s}^s f_j + w_j^s \cdot w_{i_2}^s \cdot \dots \cdot w_{i_k}^s f_{i_1} + \dots \\ &\dots + w_{i_1}^s \cdot \dots \cdot w_{i_{k-1}}^s \cdot w_j^s f_{i_k} \text{ для всех } i_s \in A_s, j \in B, \\ s &= 1, \dots, k, \quad g_s = f_s \text{ для всех } s \in I \setminus B. \end{aligned}$$

В частном случае $|A_s| = |B| = 1, s = 1, 2; k = 2$, теорема 2 превращается в теорему 4.4 из [3].

Аналогично следствию 1 может быть получен следующий результат.

Следствие 2. Пусть выполнены аксиомы 1–4, и имеется информация об отношении предпочтения из условий теоремы 2. Тогда для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ справедливо включение (5), в котором $\tilde{P}(Y) = f(P_h(X))$ – подмножество возможных векторов, отвечающих множеству парето-оптимальных вариантов в многокритериальной задаче с множеством возможных вариантов X и новым $(m - \sum_{s=1}^k |B_s| + k + 1)$ -мерным векторным критерием h' с компонентами

$$\begin{aligned} h' = \min_{k \in C} & \left[y_k + w_k' \min_{i_1 \in A_1} \frac{y_{i_1}}{w_{i_1}'} + w_k'' \min_{i_2 \in A_2} \frac{y_{i_2}}{w_{i_2}''} + \dots \right. \\ & \left. \dots + w_k^{(n)} \min_{i_n \in A_n} \frac{y_{i_n}}{w_{i_n}^{(n)}} \right] \geq 0, \\ h_s &= f_s \text{ для всех } s \in I \setminus B. \end{aligned}$$

Заключение

В работе предложено дальнейшее развитие аксиоматического подхода к решению проблемы сужения множества Парето на основе набора информации об отношении предпочтения ЛПР, развиваемого автором на протяжении последних 30 лет [3]. Отличительной особенностью этого подхода является принятие четырех «разумных» аксиом, регламентирующих поведение ЛПР в процессе выбора и позволяющих использовать хорошо разработанный аппарат выпуклого анализа. При этом на множество возможных вариантов, из которого осуществляется выбор, а также на векторный критерий никаких ограничений не накладывается.

Основной результат – теорема 1, и ее более общий вариант – теорема 2, в которых указано, каким образом следует «перестраивать» исходный векторный критерий для того, чтобы множество Парето относительно нового критерия служило оценкой сверху для любого неизвестного множества выбираемых оценок после получения от ЛПР информации о его предпочтениях множественно-точечного типа. Это новое множество Парето является частью «старого»; разницу между ними составляют те Парето-оптимальные оценки, которые удастся удалить из рассмотрения на основе указанной информации.

Приложение

Доказательство теоремы 1 разбито на четыре этапа.

1⁰. Сначала убедимся в непротиворечивости имеющейся информации. В соответствии с теоремой 4.7 [2] данная информация непротиворечива тогда и только тогда, когда система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i e^i + \lambda_{m+1} y' + \lambda_{m+2} y'' = 0_m \quad (7)$$

относительно $\lambda_1, \dots, \lambda_{m+2}$ не имеет ненулевых неотрицательных решений. Здесь e^i означает

m -мерный вектор, у которого i -я компонента равна единице, а все остальные равны нулю. В развернутом виде система (7) принимает вид

$$\begin{aligned} \lambda_i e^i + \lambda_{m+1} w_i' &= 0 \text{ для всех } i \in A, \\ \lambda_j e^j + \lambda_{m+2} w_j'' &= 0 \text{ для всех } j \in B, \\ \lambda_k e^k - \lambda_{m+1} w_k' - \lambda_{m+2} w_k'' &= 0 \text{ для всех } k \in C, \\ \lambda_l e^l &= 0 \text{ для всех } l \in I \setminus (A \cup B \cup C). \end{aligned}$$

Из уравнений, записанных в первой и второй строках, благодаря неотрицательности чисел $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}$ следуют равенства

$\lambda_i = \lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} = 0$ для всех $i \in A$. В таком случае оставшиеся уравнения влекут равенства $\lambda_j = 0$ для всех остальных номеров $j \in I \setminus (A \cup B)$. Следовательно, система (7) в качестве неотрицательного имеет только нулевое решение. Тем самым непротиворечивость имеющейся информации $y' \succ 0_m, y'' \succ 0_m$ установлена.

2⁰. Символом K обозначим острый выпуклый конус (без нуля) конусного отношения $\succ$. Тот факт, что K действительно является острым и выпуклым конусом, вытекает из аксиом 2–4 и следствия 2.1 [2].

Обозначим через M острый выпуклый конус (без нуля), порожденный векторами $e^1, \dots, e^m, y', y''$. Конус M – острый в силу теоремы 4.6 [2] и установленной выше непротиворечивости заданной информации.

Возможны четыре случая: $|A| > 1$ и $|B| > 1$; $|A| = 1$ и $|B| > 1$; $|A| > 1$ и $|B| = 1$; $|A| = |B| = 1$. В первом случае образующими конуса M являются все векторы $e^1, e^2, \dots, e^m, y', y''$, поскольку ни один из них нельзя представить в виде линейной неотрицательной комбинации остальных векторов этого набора (так как порождаемый ими конус M является острым). Во втором случае (т.е. тогда, когда $A = \{i\}$) вектор e^i , очевидно, можно представить в виде линейной положительной комбинации вектора y' и всех векторов e^s при $s \in B$. Значит, во втором случае образующими конуса являются векторы $e^1, e^2, \dots, e^m, y', y''$ без вектора e^i . Аналогично в третьем случае образующими конуса M являются векторы $e^1, e^2, \dots, e^m, y', y''$ без вектора e^j , тогда как в четвертом случае из числа образующих следует исключить векторы e^i и e^j одновременно.

Сначала рассмотрим первый случай. Введем двойственный конус (без нуля) по отношению к многогранному конусу M

$$C = \{y \in R^m \mid \langle u, y \rangle \geq 0 \text{ для всех } u \in M\} \setminus \{0_m\}.$$

На основании теории двойственности выпуклого анализа ([5], с.175) образующими многогранного конуса C являются внутренние нормали к $(m-1)$ -мерным граням конуса M . И

обратно: образующими конуса M служат внутренние нормали к $(m-1)$ -мерным граням конуса C .

Так как образующими конуса M являются векторы $e^1, e^2, \dots, e^m, y', y''$, то множество ненулевых решений системы линейных неравенств:

$$\begin{aligned} \langle e^i, y \rangle &\geq 0 \text{ для всех } i \in I, \\ \langle y', y \rangle &\geq 0, \\ \langle y'', y \rangle &\geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

совпадает с двойственным конусом C .

3⁰. Найдем фундаментальную совокупность решений системы линейных неравенств (8). Это должна быть такая минимальная (по числу) система векторов, множество линейных неотрицательных комбинаций которой в точности совпадает с множеством решений системы (8). При этом ни один вектор фундаментальной совокупности невозможно представить в виде линейной неотрицательной комбинации остальных векторов этой совокупности.

Укажем некоторый набор решений системы линейных неравенств (8). Легко проверить, что векторы $e^{ijk} = w_j'' w_k' e^i + w_i' w_k'' e^j + w_j'' w_i' e^k$ для всех $i \in A, j \in B, k \in C$ удовлетворяют системе (8), причем неравенства из второй и третьей строк для этих векторов выполняются как равенства.

Таким образом, набор, состоящий из векторов e^s для всех $s \in I \setminus C$, векторов e^{ijk} для всех $i \in A, j \in B, k \in C$ (обозначим этот набор (*)), принадлежит двойственному конусу C . При этом, как нетрудно видеть, ни один из векторов этой совокупности невозможно представить в виде линейной неотрицательной комбинации остальных векторов. Общее число p всех векторов указанного набора равно $p = m - |C| + |A| \cdot |B| \cdot |C|$.

Для того чтобы проверить, что данный набор векторов образует фундаментальную совокупность решений системы (8), остается убедиться в том, что система линейных неравенств (8) не имеет никаких других (с точностью до положительного множителя) решений, кроме всевозможных линейных неотрицательных комбинаций векторов указанного выше набора (*). С этой целью наряду с системой (8)

рассмотрим соответствующую ей систему из $m+2$ линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \langle e^i, y \rangle &= 0 \text{ для всех } i \in I, \\ \langle y', y \rangle &= 0, \\ \langle y'', y \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Вычисляя ранги соответствующих матриц, можно проверить, что любая подсистема из $m-1$ векторов системы $e^1, e^2, \dots, e^m, y', y''$ является линейно независимой. Следовательно, искомая фундаментальная совокупность решений системы линейных неравенств (8) содержится среди (одномерных) ненулевых решений подсистем из $m-1$ уравнений системы линейных уравнений (9).

Будем удалять из системы (9) по три уравнения и выписывать решения получающихся в результате такого удаления подсистем, удовлетворяющие, кроме того, системе неравенств (8). Найденные таким образом векторы и составят требуемую фундаментальную совокупность решений системы неравенств (8).

Если в число удаляемых входят последние два уравнения системы (9), то ненулевыми решениями получающихся подсистем будут служить (с точностью до положительного множителя), единичные орты $e^1, e^2, \dots, e^m$. Однако, как легко видеть, системе неравенств (8) удовлетворяют лишь те векторы e^s из этого набора, для которых $s \in I \setminus C$.

Если последнее уравнение системы линейных уравнений (9) не удаляется, а предпоследнее удаляется, то ненулевыми решениями получающихся («сокращенных») подсистем будут являться (с точностью до положительного множителя) векторы, которые не удовлетворяют системе неравенств (8).

Аналогично, если остается предпоследнее уравнение из (9), а последнее исключается, то среди решений «сокращенных» подсистем также не будет существовать векторов, удовлетворяющих системе неравенств (8).

В случае, когда оба последних уравнения остаются в «сокращенной» подсистеме, приходим ко всевозможным решениям вида e^{ijk} для всех $i \in A, j \in B, k \in C$.

Поскольку все возможные варианты удаления троек уравнений из системы линейных

уравнений (9) рассмотрены, никаких других (с точностью до положительного множителя) решений подсистем из $m-2$ уравнений системы (9), удовлетворяющих системе линейных неравенств (8), не существует. Никаких других одномерных решений системы (9), удовлетворяющих системе неравенств (8), не существует. Это означает, что система векторов (*) образует фундаментальную совокупность решений системы линейных неравенств (8). Следовательно, любое решение системы неравенств (8) может быть представлено в виде неотрицательной линейной комбинации этой совокупности векторов. Далее для удобства будем означать эту совокупность следующим образом $a^1, a^2, \dots, a^p$.

В случае $|A|=1$ (т.е. $A = \{i\}$), рассуждения аналогичны, но несколько проще приведенных выше. В этом случае следует рассмотреть систему из $m+1$ уравнений, которая отличается от (9) отсутствием уравнения $\langle e^i, y \rangle = 0$. Здесь из указанной системы следует удалять лишь по два уравнения, чтобы получить ту же самую фундаментальную совокупность решений системы линейных неравенств (8). Аналогичное можно сказать и об остальных случаях. Мы на них останавливаться не будем.

4⁰. Заключительный этап доказательства проводится точно так же, как и в [4] с учетом окончания доказательства теоремы 3.5 [2].

Доказательство леммы. По определению конуса M включение $y \in M$ имеет место тогда и только тогда, когда существует такой вектор $(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \lambda_{m+2})$ с неотрицательными компонентами,

$$y = \sum_{i=1}^m e^i \lambda_i + \lambda_{m+1} y' + \lambda_{m+2} y'',$$

или в подробной записи

$$\begin{aligned} y_i &= \lambda_i + w'_i \lambda_{m+1} \text{ для всех } i \in A, \\ y_j &= \lambda_j + w''_j \lambda_{m+2} \text{ для всех } j \in B, \\ y_k &= \lambda_k - w'_k \lambda_{m+1} - w''_k \lambda_{m+2} \text{ для всех } k \in C, \\ y_s &= \lambda_s \text{ для всех } s \in I \setminus (A \cup B \cup C). \end{aligned} \quad (10)$$

Необходимость. Пусть $y \in M$, а значит, при некоторых неотрицательных $\lambda_1, \dots, \lambda_{m+2}$ верны равенства (10). Следует установить, что имеют место неравенства (3)–(4).

Если $\lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} = 0$, то благодаря неотрицательности чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ вектор y также со-

стоит из неотрицательных компонент. Для такого вектора y неравенства (3)–(4) выполняются очевидным образом.

Пусть $\lambda_{m+1} > 0, \lambda_{m+2} > 0$. В этом случае неравенство (4) сразу следует из первого, второго и последнего равенств системы (10). Поэтому для завершения доказательства необходимости остается проверить справедливость неравенств (3).

Систему (10) перепишем в таком эквивалентном виде

$$\begin{aligned} \frac{y_i}{w'_i} &= \frac{\lambda_i}{w'_i} + \lambda_{m+1} \text{ для всех } i \in A, \\ \frac{y_j}{w''_j} &= \frac{\lambda_j}{w''_j} + \lambda_{m+2} \text{ для всех } j \in B, \\ \frac{y_k}{w'_k w''_k} &= \frac{\lambda_k}{w'_k w''_k} - \frac{\lambda_{m+1}}{w''_k} - \frac{\lambda_{m+2}}{w'_k} \end{aligned} \quad (11)$$

для всех $k \in C$,

$$y_s = \lambda_s \text{ для всех } s \in I \setminus (A \cup B \cup C).$$

При подстановке чисел λ_{m+1} и λ_{m+2} , выраженных из первого и второго равенств системы (11), в третье с учетом неотрицательности всех $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k$, получаем неравенство

$$\frac{y_k}{w'_k w''_k} \geq -\frac{y_i}{w'_i w''_k} - \frac{y_j}{w'_j w'_k} \text{ для всех } i \in A, j \in B, k \in C.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{y_k}{w'_k w''_k} &\geq \frac{1}{w''_k} \max_{i \in A} \left(-\frac{y_i}{w'_i} \right) + \frac{1}{w'_k} \max_{j \in B} \left(-\frac{y_j}{w''_j} \right) = \\ &= -\frac{1}{w''_k} \min_{i \in A} \left(\frac{y_i}{w'_i} \right) - \frac{1}{w'_k} \min_{j \in B} \left(-\frac{y_j}{w''_j} \right). \end{aligned}$$

Так как полученное неравенство верно для любых номеров $k \in C$, то из него немедленно вытекает неравенство (3).

Пусть теперь $\lambda_{m+1} > 0$ и $\lambda_{m+2} = 0$. Из первого, второго и последнего равенств (10) благодаря неотрицательности чисел λ_i, λ_s получаем (4). Подстановка числа λ_{m+1} , выраженного из первого равенства (10) или (11), в третье равенство этой системы с учетом неотрицательности чисел λ_i, λ_j и второго равенства (10), приводит к неравенству

$$\frac{y_k}{w'_k w''_k} \geq -\frac{y_i}{w'_i w''_k} \geq -\frac{y_i}{w'_i w''_k} - \frac{y_j}{w''_j w'_k}$$

для всех $i \in A, j \in B, k \in C$,

из которого вытекает (3).

Аналогично проводится рассмотрение случая $\lambda_{m+1} = 0, \lambda_{m+2} > 0$.

Достаточность. Пусть произвольный вектор y удовлетворяет неравенствам (3)–(4). Нужно установить справедливость для него равенств (10). Сразу заметим, что благодаря (4) для любых $s \in I \setminus C$ выполнено неравенство $y_s \geq 0$.

Если $y_k \geq 0$ для всех $k \in C$, то равенства (10) тривиально выполняются при $\lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} = 0$, а также при неотрицательных $\lambda_s = y_s$ для всех $s \in I$.

Пусть $y_k < 0$. Зафиксируем произвольный номер $k \in C$. Из неравенства (3) следует существование таких номеров $i_0 \in A, j_0 \in B$, что имеет место равенство

$$y_k = -w'_k \frac{y_{i_0}}{w'_{i_0}} - w''_k \frac{y_{j_0}}{w''_{j_0}}.$$

Тогда, как нетрудно проверить, равенства (10) (где третье равенство рассматривается для зафиксированного ранее номера k) справедливы при $\lambda_k = 0$ и следующих коэффициентах:

$$\lambda_i = y_i - \frac{w'_i}{w'_{i_0}} y_{i_0} \text{ при всех } i \in A;$$

$$\lambda_j = y_j - \frac{w''_j}{w''_{j_0}} y_{j_0} \text{ при всех } j \in B;$$

$$\lambda_{m+1} = y_{i_0} / w'_{i_0}; \quad \lambda_{m+2} = y_{j_0} / w''_{j_0}.$$

Неотрицательность чисел λ_i следует из правила выбора номера i_0 , согласно которому

$$y_i / w'_i \geq y_{i_0} / w'_{i_0},$$

а неотрицательность чисел λ_j аналогично вытекает из неравенства

$$y_j / w''_j \geq y_{j_0} / w''_{j_0}.$$

Благодаря произвольности выбора номера k , доказательство леммы завершено.

Литература

1. Ногин В.Д. Логическое обоснование принципа Эджворта-Парето// Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2002, т. 42, № 7, С. 950-956.
2. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход (2-е изд., испр. и доп.). – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005, 176 с.
3. Ногин В.Д. Проблемы сужения множества Парето: подходы к решению// Искусственный интеллект и принятие решений. – 2008, № 1, С. 98-112.
4. Ногин В.Д. Сужение множества Парето на основе информации о предпочтениях ЛПР точечно-множественного типа. // Искусственный интеллект и принятие решений. – 2009, № 1, С. 5-16.
5. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. Т. 1. – М.: Мир, 1991, 360 с.

Ногин Владимир Дмитриевич. Профессор кафедры теории управления факультета прикладной математики-процессов управления (ПМ-ПУ) Санкт-Петербургского государственного университета. Окончил Ленинградский государственный университет в 1971 году. Доктор физико-математических наук, профессор. Действительный член Международной академии наук высшей школы. Автор около 120 печатных трудов, среди которых 2 монографии и ряд учебных пособий. Область научных интересов – принятие решений при многих критериях, многокритериальная оптимизация.