

Метод разумных целей в задаче многокритериального стохастического выбора¹

Аннотация. Предлагается метод поддержки принятия решений в многокритериальной задаче конечного выбора с критериями, которые являются случайными величинами, принимающими значения на достаточно малых интервалах. Показывается, что на этот случай переносятся концепции метода разумных целей, основанного на визуализации многомерной границы Парето выпуклой оболочки критериальных точек и отборе малого числа альтернатив, соответствующих цели, указанной ЛПР.

Ключевые слова: многокритериальный выбор, стохастические критерии, граница Парето, выпуклая оболочка, разумная цель.

Введение

В работе предлагается и обосновывается метод поддержки принятия решений для задачи многокритериального выбора из конечного числа альтернатив при наличии неопределенности в значениях критериев. Считается, что неопределенность задается в виде вероятностных распределений значений критериев, причем возможные значения критериев принадлежат интервалам, длины которых малы по сравнению с диапазонами значений критериев.

Предлагаемый метод развивает концепции метода разумных целей (МРЦ), предложенного в [1] для задач без неопределенности. В исходном МРЦ используется диалоговая визуализация границы Парето выпуклой оболочки критериальных точек, порождаемых рассматриваемыми альтернативами. Диалоговая визуализация границы Парето обеспечивается за счет предварительной аппроксимации оболочки Эджворта-Парето выпуклой оболочки критериальных точек, т.е. максимального по включению множества, имеющего ту же границу Парето, что и выпуклая оболочка критериальных точек. Такая визуализация позволяет лицу,

принимающему решение (ЛПР) осознать свои предпочтения и выразить их в виде целевой точки – предпочтительного критериального вектора, принадлежащего границе Парето выпуклой оболочки. В связи с тем, что указанная ЛПР цель принадлежит выпуклой оболочке достижимых критериальных точек, она именуется разумной. Поскольку разумная цель, как правило, не соответствует ни одной альтернативе, она используется для отбора малого числа альтернатив. Это делается на основе модели сожалений ЛПР об отклонении значений критериев от их целевых значений.

МРЦ был успешно применен для поддержки принятия решений в практических задачах экологического и экономического характера [2-7], в том числе и с использованием сети интернет [7, 8]. Представляет интерес вопрос о перенесении МРЦ на случай неточной информации, который часто встречается при наличии эмпирических источников (например, когда значения критериев отбора являются результатами наблюдений, сбора статистики или эксперимента, в том числе и вычислительного). Часто неточность в значениях критериев может быть задана на основе указания областей их неопределенно-

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 10-01-00199 и № 09-01-13534), ПФИ Президиума РАН № 14 и ПФИ ОМН РАН №3

сти. В [9-11] предложен метод поддержки принятия решений, являющийся модификацией МРЦ на случай, когда неточность значений критериев задается относительно малыми интервалами их возможных значений. Тогда каждой альтернативе ставится в соответствие уже не точка критериального пространства, а параллелепипед неопределенности, являющийся прямым произведением интервалов неопределенности значений критериев. При выборе решения в [9-11] используется принцип гарантированного результата, из-за чего число отбираемых альтернатив резко увеличивается по сравнению с детерминированным случаем.

В данной работе предлагается и обосновывается модификация МРЦ для постановки, в рамках которой информация о параллелепипедах неопределенности, соответствующих рассматриваемым альтернативам, дополняется информацией о плотности вероятностей значений критериев для точек этих параллелепипедов. Точнее говоря, предполагается, что каждой альтернативе соответствует некоторый случайный критериальный вектор, компоненты которого являются независимыми случайными величинами с известным распределением, принимающими значение в интервалах неопределенности. В данной работе предлагается новое понятие доминирования случайных величин, отличающееся от известных [12] и удобное для применения в рамках МРЦ. Использование стохастического доминирования позволяет резко снизить число отбираемых альтернатив, повысив тем самым эффективность использования МРЦ.

Статья имеет следующую структуру. Раздел 1 содержит математическую постановку задачи, и дается описание метода разумных целей для стохастических критериев. В разделе 2 вводится понятие доминирования по Парето-Слейтеру для случайных векторов. В разделах 3 и 4 дается обоснование предлагаемого способа отбора альтернатив.

1. Метод разумных целей для стохастической задачи выбора

В статье рассматривается задача выбора из конечного числа, а именно N альтернатив, совокупность которых обозначим через $X = \{x^1, x^2, \dots, x^N\}$. Предполагается, что каж-

дой из альтернатив сопоставлено m независимых скалярных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, значения которых являются критериями выбора решения. Предполагается, что каждая из случайных величин принимает значения на известном непустом компактном интервале неопределенности. Тогда альтернативе $x^k \in X$ соответствует заданный m -мерный случайный критериальный вектор $\xi^k = (\xi_1^k, \xi_2^k, \dots, \xi_m^k)$ со значениями в заданном параллелепипеде неопределенности пространства критериев R^m , который обозначим через $Y^k = [\underline{y}_1^k, \bar{y}_1^k] \times [\underline{y}_2^k, \bar{y}_2^k] \times \dots \times [\underline{y}_m^k, \bar{y}_m^k]$.

Обозначим также $Y = \bigcup_{k=1}^N Y^k$. Предполагается,

что представляет интерес увеличение значения каждого из критериев при неизменных значениях других критериев.

Задача исследования формулируется следующим образом: разработать метод, позволяющий некоторым способом, достаточно простым для ЛПР, отобрать из исходной совокупности небольшое число альтернатив и предоставить их ЛПР для окончательного выбора. При этом окончательный выбор может осуществляться либо с применением одного из многокритериальных методов, предназначенных для поддержки выбора из малого числа альтернатив, либо прямо из короткого списка. Последний вопрос находится за пределами данной статьи (см., например, [13]).

В связи со сказанным приобретает большое значение обоснование понятия решения задачи выделения малого числа альтернатив в сформулированной задаче многокритериального стохастического выбора. Этому вопросу уделено существенное место в данной статье. Отметим, что понятие решения строится в данной статье по аналогии с исходным МРЦ для задач без неопределенности [1, 5], в котором k -ой альтернативе соответствует точка $y^k \in R^m$, т.е. множество Y совокупность представляет собой совокупность критериальных точек $Y = \{y^1, y^2, \dots, y^N\}$. В исходном методе ЛПР анализирует границу Парето выпуклой оболочки множества Y , которая обозначается через Y_C . Поскольку рассматривается задача макси-

мизации критериев, то граница Парето множества Y_C определяется как $P(Y_C) = \{y \in Y_C \mid y' \succ_P y \Rightarrow y' \notin Y_C\}$, т.е. является максимальным множеством (на Y_C) бинарного отношения доминирования по Парето, обозначаемого для критериальных точек y и y' через $y' \succ_P y$ и означающего, что $y'_i \geq y_i, \forall i = \overline{1, m}$, и $y' \neq y$. С помощью программного обеспечения Диалоговых карт решений (ДКР) [5, 14, 15], позволяющего визуализировать границу Парето для числа критериев до 7-8, ЛПР изучает границу Парето множества Y_C и указывает цель – наиболее предпочтительную точку $y^* \in P(Y_C)$. В связи с тем, что обычно такая цель не совпадает ни с одной из точек множества Y , для нее используется термин «разумная цель», предложенный в [16] и позволяющий противопоставить ее достижимой цели [14], для которой найдется альтернатива, ее реализующая. В качестве решения в исходном МРЦ берется подмножество X , содержащее малое число альтернатив, эффективных по Парето (или Слейтеру) и близких к цели y^* в каком-то смысле.

В связи с тем, что сожаления ЛПР относительно отклонений векторов y^k от цели y^* не известны (авторы вслед за [13] считают, что процедуры выявления предпочтений типа построения функции полезности слишком сложны для ЛПР при $m > 3$ и не используют их), в [1] предложено использовать модели неизвестных сожалений ЛПР. Можно предложить много различных вариантов эвристических моделей и соответствующих способов выделения альтернатив на основе целевой точки. В работе [1] предлагается альтернативный аксиоматический подход к выбору решения задачи отбора. А именно, в [1] формулируется аксиома о том, что функция сожалений ЛПР $U(\cdot) : R^m \rightarrow R$ принадлежит некоторому классу K . Тогда под решением задачи отбора можно понимать подмножество $C(X, K)$ альтернатив из X , минимизирующих сожаления в следующем смысле: для любой $x' \in C(X, K)$ найдется по крайней мере одна такая функция $U'(\cdot) \in K$, что

$$U'(y') \leq U'(y), \forall x \in X,$$

где y' соответствует x' , а y соответствует x . Если класс K содержит большое или бесконечное число функций, то непосредственная проверка этого условия для всех $U(\cdot) \in K$ невозможна. Поэтому в [1] предлагается построить на X такое транзитивное иррефлексивное бинарное отношение $\mathcal{R}^d$, что множество максимальных (согласно $\mathcal{R}^d$) элементов X , обозначаемое через $Max_R(X)$, удовлетворяет $Max_R(X) = C(X, K)$. В [1] в качестве класса K предлагается использовать параметрический класс функций Чебышева

$$K_{Ch}^{y^*} = \{U(\cdot) \mid U(y) = \max_i \lambda_i (y_i^* - y_i), \lambda_i > 0, \forall i = \overline{1, m}\}, \quad (1)$$

для которого искомым бинарным отношением является отношение $\mathcal{R}^d$, определяемое как $x' \mathcal{R}^d x'' \Leftrightarrow \{y'_i > y''_i \text{ для } i : y'_i \leq y_i^*, i = \overline{1, \dots, N}\}$, где критериальные точки y' и y'' соответствуют альтернативам x' и x'' . Для построения $Max_R(X)$ в [1] предложена простая эффективная процедура.

В [9-11] МРЦ модифицируется и распространяется на задачи, в которых альтернативе $x^k \in X$ соответствует уже не точка y^k , а параллелепипед неопределенности Y^k , причем другая информация о значениях критериев отсутствует. Так же, как и в [1], выдвигается аксиома о том, что функция сожалений ЛПР принадлежит некоторому классу K . Под решением задачи отбора $C(X, K)$ понимается такое подмножество альтернатив $x' \in X$, что для любой $x' \in C(X, K)$ найдется по крайней мере одна функция $U'(\cdot) \in K$, для которой

$$\{\min U'(y') : y' \in Y'\} \leq \{\max U'(y) : y'' \in Y''\}, \forall x'' \in X,$$

где Y' соответствует x' , а Y'' соответствует x'' . Таким образом, отбираются такие альтернативы, которые могут оказаться не хуже других хотя бы при одной функции сожалений для хотя бы одной точки параллелепипеда неопределенности. Предлагается указать транзитивное и иррефлексивное бинарное отношение $\mathcal{R}^g$ заданное на X , для которого выполняется включение

$$C(X, K) \subseteq Max_R(X). \quad (2)$$

В [10, 11] показано, что множество $Max_R(X)$ бинарного отношения R основанного на гарантированном доминировании одного параллелепипеда неопределенности другим, т.е.

$x' \mathcal{R}^g x' \Leftrightarrow \{\forall y' \in Y' \forall y'' \in Y'' \text{ имеем}$

$$y_i' > y_i'' \text{ для } i: y_i' \leq y_i^*, i = 1, \dots, N\}, (3)$$

где $Y' = [\hat{y}'_1, \hat{y}'_1] \times [\hat{y}'_2, \hat{y}'_2] \times \dots \times [\hat{y}'_m, \hat{y}'_m]$ и $Y'' = [\hat{y}''_1, \hat{y}''_1] \times [\hat{y}''_2, \hat{y}''_2] \times \dots \times [\hat{y}''_m, \hat{y}''_m]$ соответствуют альтернативам x' и x'' , совпадает с множеством $C(X, K)$ для класса K параметрических функций Чебышева (1). Для бинарного отношения (3) показаны его транзитивность и иррефлексивность, а также предложена простая эффективная процедура построения $Max_R(X)$.

Целью данного исследования являются модификация МРЦ и его распространение на задачу со стохастическими критериями, сформулированную в начале данного раздела. Предлагаемая в данной статье модификация МРЦ, предназначенная для решения задачи отбора малого числа альтернатив в задаче со стохастическими критериями, состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Работа метода начинается с аппроксимации оболочки Эджворта-Парето (ОЭП) выпуклой оболочки $\tilde{Y}_C$ множества $\tilde{Y} = \{\tilde{y}^1, \tilde{y}^2, \dots, \tilde{y}^N\}$, т.е. совокупности наиболее предпочтительных точек параллелепипедов неопределенности. Точнее говоря, аппроксимируется множество $H(\tilde{Y}_C) = \{y \in R^m \mid \exists y' \in \tilde{Y}_C : y' \succ_P y\}$. Аппроксимация $H(\tilde{Y}_C)$ осуществляется с целью визуализации многомерной границы Парето множества $\tilde{Y}_C$, играющего в данной модификации роль, которую в исходном МРЦ играло множество Y_C . Граница Парето множества $\tilde{Y}_C$ определяется как $P(\tilde{Y}_C) = \{y \in \tilde{Y}_C \mid y' \succ_P y \Rightarrow y' \notin \tilde{Y}_C\}$. Необходимость аппроксимировать $H(\tilde{Y}_C)$ обусловлена тем, что это требуется для использования программного обеспечения ДКР, позволяющего визуализировать границу Парето на основе того факта, что $P(H(\tilde{Y}_C)) = P(\tilde{Y}_C)$.

Для решения задачи аппроксимации $H(\tilde{Y}_C)$ используются методы полиэдральной аппрок-

симации выпуклых компактных множеств и их оболочек Эджворта-Парето [5, 14, 15, 17]. Эти методы основаны на комбинации расчета опорной функции и свертывания систем линейных неравенств, предложенного Фурье еще в начале 19 века. Расчет опорной функции множества $\tilde{Y}_C$ не представляет сложности, если число критериальных точек не слишком велико (не превосходит 10^6). На практике для аппроксимации ОЭП при числе альтернатив до нескольких сотен тысяч используется метод Уточнения Оценок, предложенный в [18] и описанный [5, 14, 15, 17]. Отметим, что в этом методе строятся внутренняя и внешняя аппроксимации, что позволяет найти аппроксимацию с заданной точностью, хотя, возможно, за достаточно продолжительное время. При значительном большем числе альтернатив можно использовать и другие подходы [19, 20].

Шаг 2. Визуализация границы Парето множества $H(\tilde{Y}_C)$ наборами его двумерных сечений осуществляется в диалоговом режиме с использованием ДКР. Математически двумерные сечения определяются следующим образом. Рассмотрим некоторую пару элементов (частных критериев) критериального вектора y , скажем, u и v . Сечение множества $H(\tilde{Y}_C)$ плоскостью, параллельной критериальной плоскости (u, v) , задается значениями остальных частных критериев w . Если множество $H(\tilde{Y}_C)$ уже аппроксимировано, построение набора из тысяч двукритериальных сечений занимает секунды. Практика показала, что для пользователей особенно удобна визуализация наборов сечений специального вида, в которых от сечения к сечению меняется только один частный критерий из совокупности w . Такие изображения имеют название карт решений. Предварительная аппроксимация $H(\tilde{Y}_C)$ позволяет с помощью ДКР быстро изображать по заказу пользователя различные карты решений для трех-восьми критериев либо осуществлять компьютерную анимацию карт решений и их совокупностей [5, 14, 15]. В последнем случае аппроксимация ОЭП становится источником всевозможных виртуальных анимационных фильмов, позволяющих получить информацию о границе Парето в наглядной форме. Пример карты решений, снабженной прокрутками, которые

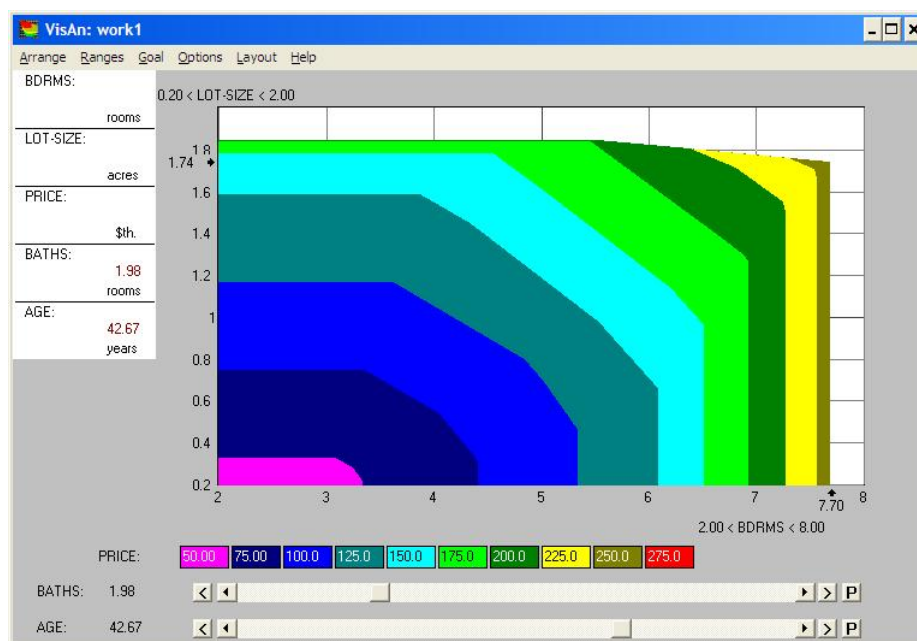


Рис.1. Пример карты решений для пяти критериев

позволяют оценить влияние значений двух критериев на трехкритериальную границу Парето, вручную или на основе анимации, приведен на Рис.1.

Шаг 3. Выбор целевой точки y^* на границе Парето множества $H(\tilde{Y}_C)$ осуществляется ЛПР после завершения диалогового изучения границы Парето. Рассмотрев различные карты решений, их совокупности и компьютерные анимационные фильмы, ЛПР осознает потенциальные возможности выбора решения и связь между значениями критериев в точках границы Парето (так называемые критериальные, или эффективные замещения). ЛПР указывает предпочтительную точку y^* границы Парето (разумную цель) непосредственно на экране компьютера.

Шаг 4. Отбор малого числа альтернатив по точке y^* , являющийся задачей данного шага, как и в детерминированном случае, можно основывать на всевозможных эвристических процедурах. При этом может быть полезно заранее исключить такие альтернативы, параллелепипеды неопределенности которых гарантированно доминируются параллелепипедами неопределенности других альтернатив. В данной работе, как и в [1], используется аксиоматический подход, базирующийся на введении понятия решения задачи отбора на основе аксиомы о принадлежности функций сожаления

$U(\cdot): R^m \rightarrow R$ к бесконечному классу K . Далее предлагается построить такое транзитивное иррефлексивное бинарное отношение $\mathcal{R}$, что множество его максимальных (на X) элементов содержит решение задачи отбора и реализовать компьютерный алгоритм построения множества максимальных элементов.

В двух следующих разделах дано теоретическое обоснование аксиоматического подхода к шагу 4, а пример его реализации для класса функций (1) приведен в заключительном разделе статьи.

2. Бинарное отношение Парето-Слейтера для задач стохастического выбора

Для того, чтобы ввести бинарные отношения, используемые в рассматриваемой задаче стохастического выбора, понадобится рассмотреть вероятностное пространство, соответствующее случайному вектору ξ^k , а именно:

$$(\Omega^k, F^k, P^k) = (\Omega_1^k \times \Omega_2^k \times \dots \times \Omega_m^k, F_1^k \times F_2^k \times \dots \times F_m^k, P_1^k \times P_2^k \times \dots \times P_m^k),$$

где Ω_i^k – некоторое пространство элементарных исходов, F_i^k – σ -алгебра подмножеств

пространства Ω_i^k , P_i^k – вероятностная мера, заданная на F_i^k , где $i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, N$. Тогда можно сказать, что альтернативе $x^k \in X$ соответствует случайный вектор измеримых борелевских функций:

$$\xi^k(\omega^k) = (\xi_1^k(\omega_1^k), \xi_2^k(\omega_2^k), \dots, \xi_m^k(\omega_m^k)),$$

где $\omega_i^k \in \Omega_i^k$, $i = 1, \dots, m$, $\omega^k \in \Omega^k$, $k = 1, \dots, N$.

Аналогичным образом можно одновременно рассматривать несколько независимых случайных векторов, для которых строится вероятностное пространство Ω . Далее в статье в записи случайной величины как измеримой борелевской функции $\xi_i^k(\omega)$, где $\omega \in \Omega$, будет иметься в виду $\xi_i^k(\omega_i^k)$.

Предположим, что случайные величины – компоненты m -мерного критериального вектора ξ^k являются абсолютно непрерывными, т.е. для каждой случайной величины $\xi_i^k, i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, N$, существует плотность распределения – такая заданная на R интегрируемая функция $p_i^k(y) \geq 0$, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_i^k(y) dy = 1 \text{ и } P(\{\omega | \xi_i^k(\omega) < t\}) = \int_{-\infty}^t p_i^k(y) dy$$

для $\forall t \in R$.

Отметим, что хотя в рассматриваемой задаче плотности распределения случайных величин не равны нулю лишь на ограниченных замкнутых интервалах, удобно рассматривать бесконечную область интегрирования.

В многокритериальной оптимизации центральное место занимает понятие доминирования альтернатив. Наряду с введенным ранее понятием доминирования по Парето, далее будет использовано доминирование по Слейтеру, обозначаемое для критериальных векторов y и y' как $y' \succ_s y$ и подразумевающее, что $y'_i > y_i, i = \overline{1, m}$. Сразу отметим, что на основе доминирования критериальных точек по Парето и Слейтеру очевидным образом вводится доминирование соответствующих им альтернатив, что дает возможность ввести понятие под-

множества эффективных (недоминируемых) по Парето или Слейтеру альтернатив множества X . Определим понятие доминирования для стохастических критериев рассматриваемого нами типа. Начнем с доминирования скалярных случайных величин. Для рассматриваемой задачи удобным является подход, основанный на задании некоторого числа $\alpha \in [0, 1/2)$, которое в дальнейшем будем называть уровнем ошибки.

Определение 2.1. Пусть случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы. Будем говорить, что ξ_1 предпочтительнее ξ_2 и писать $\xi_1 \succ \xi_2$, если

$$P(\xi_1 > \xi_2) = P(\{\omega \in \Omega_1 \times \Omega_2 | \xi_1(\omega) > \xi_2(\omega)\}) \geq 1 - \alpha, \quad (4)$$

где, в силу введенных обозначений, $\xi_1(\omega) = \xi_1(\omega_1), \xi_2(\omega) = \xi_2(\omega_2)$ для $\omega = (\omega_1, \omega_2)$.

Смысл уровня ошибки состоит в том, что он дает оценку вероятности ошибки основанного на $\xi_1 \succ \xi_2$ утверждения о том, что реализовавшаяся величина ξ_1 будет больше величины ξ_2 . В силу определения бинарное отношение (4) является иррефлексивным. В силу $\alpha < 1/2$ оно асимметрично. В то же время, есть примеры, показывающие, что оно, вообще говоря, не является транзитивным. Так, рассмотрим три независимые случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 , которые с вероятностями $1/6$ принимают значения $\{18, 10, 9, 8, 7, 5\}$, $\{17, 16, 15, 4, 3, 2\}$ и $\{14, 13, 12, 11, 1\}$ соответственно. Можно проверить, что

$$P(\xi_1 > \xi_2) = P(\xi_2 > \xi_3) = P(\xi_3 > \xi_1) = 7/12 > 1/2,$$

т.е. транзитивность бинарного отношения (4) нарушается при $\alpha = 5/12$. Поэтому для того чтобы ввести для случайных векторов бинарные отношения, аналогичные доминированию критериальных векторов по Парето и по Слейтеру, которые являются иррефлексивными и транзитивными, основное внимание необходимо уделить вопросу о транзитивности.

Пусть теперь ξ' и ξ'' – некоторые m -мерные случайные векторы с независимыми компонентами.

Определение 2.2. Будем говорить, что случайные векторы ξ' и ξ'' находятся в бинарном отношении $\mathcal{P}$, если

$$P(\{\omega \in \Omega \times \Omega'' | \xi'(\omega) \succ_p \xi''(\omega)\}) \geq 1 - \alpha,$$

где $\alpha \in [0, 1/2)$ и для $\omega = (\omega', \omega'') \in \Omega' \times \Omega''$ имеется в виду, что $\xi'(\omega) = \xi'(\omega')$, $\xi''(\omega) = \xi''(\omega'')$.

Определение 2.3. Будем говорить, что случайные векторы ξ' и ξ'' находятся в бинарном отношении S , если для некоторого $\alpha \in [0, 1/2)$ имеем

$$P(\{\omega \in \Omega' \times \Omega'' \mid \xi'(\omega) \succ_S \xi''(\omega)\}) \geq 1 - \alpha \quad (6)$$

Приведенный выше пример для скалярных случайных величин показывает, что введенные таким образом бинарные отношения $\mathcal{P}$ и S в общем случае не являются транзитивными. Приведем без доказательства утверждение о достаточных условиях их транзитивности.

Теорема 2.1. Бинарные отношения $\mathcal{P}$ и S для совокупности случайных векторов $\xi^k, k = 1, \dots, N$, с абсолютно непрерывными независимыми компонентами, задаваемыми интегрируемыми плотностями вероятностей $p_i^k(y), i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, N$, являются транзитивными, если для любого набора из трех альтернатив с номерами $\{k', k'', k'''\} \in \{1, \dots, N\}$ для всех $i = 1, \dots, m$, выполняются условия

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_i^{k'}(x) p_i^{k''}(y) p_i^{k'''}(z) dz dy dx \geq 0 \\ & \text{и} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_i^{k'}(x) p_i^{k''}(y) p_i^{k'''}(z) dz dy dx \geq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Из этой теоремы можно, например, получить, что бинарные отношения $\mathcal{P}$ и S являются транзитивными в том случае, когда функции плотности вероятностей центрально симметричны относительно точки математического ожидания и для различных случайных векторов могут быть получены сдвигом. В дальнейшем в данной статье, не предполагая выполнения условий Теоремы 2.1, будем считать, что выполняется следующее предположение.

Предположение 2.1. Для рассматриваемых нами совокупностей случайных векторов транзитивность бинарных отношений $\mathcal{P}$ и S имеет место.

Иррефлексивность бинарных отношений $\mathcal{P}$ и S следует из определения. Тогда при сделанном предположении 2.1 бинарные отношения $\mathcal{P}$

и S являются бинарными отношениями строгого порядка (доминирования).

Обратим также внимание на то, что для абсолютно непрерывных случайных векторов имеет место совпадение бинарных отношений $\mathcal{P}$ и S , поэтому для случайных векторов, задаваемых интегрируемыми плотностями вероятностей, транзитивные бинарные отношения $\mathcal{P}$ и S превращаются в бинарное отношение строгого порядка, которое будем называть доминированием по Парето-Слейтеру для случайных абсолютно непрерывных векторов и обозначать $\xi' \succ \xi''$.

По аналогии с детерминированным случаем, бинарное отношение доминирования по Парето-Слейтеру можно ввести на множестве альтернатив X , а именно: $x' \succ x'' \Leftrightarrow \xi' \succ \xi''$, где альтернативе x' соответствует случайный вектор ξ' , альтернативе x'' – вектор ξ'' . Это понятие дает возможность ввести понятие подмножества эффективных (недоминируемых) по Парето-Слейтеру альтернатив множества X .

3. Обоснование процедуры выбора в стохастическом случае

Прежде всего, введем понятие решения задачи отбора из $X = \{x^1, x^2, \dots, x^N\}$ малого числа альтернатив при стохастических критериях $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, принимающих для альтернативы $x^k \in X$ значения на параллелепипеде $Y^k = [y_1^k, \bar{y}_1^k] \times [y_2^k, \bar{y}_2^k] \times \dots \times [y_m^k, \bar{y}_m^k]$. При этом будем по-прежнему предполагать, что все случайные величины независимы, задаются интегрируемыми плотностями вероятностей и выполняется Предположение 2.1. Таким образом, корректно понятие доминирования по Парето-Слейтеру.

Пусть выполняется следующее основное предположение.

Аксиома. Функция сожаления ЛПР принадлежит некоторому бесконечному классу K функций сожаления $U(\cdot): R^m \rightarrow R$, убывающих по Слейтеру (т.е. из $a \succ_S b$ следует $U(a) < U(b)$), причем их минимум на множестве $Y \cup \{y^*\}$ достигается в точке y^* .

Определение 3.1. Под решением $C(X, K, \alpha)$ рассматриваемой задачи отбора, порожаемым классом K и числом $\alpha \in [0, 1/2)$, будем понимать совокупность таких альтернатив $x' \in X$, что для любой $x' \in C(X, K, \alpha)$ найдется по крайней мере одна функция $U'(\cdot) \in K$, удовлетворяющая

$$P(U'(\xi') \leq U'(\xi)) > \alpha, \forall x \in X,$$

где случайный вектор ξ' соответствует x' , а случайный вектор ξ соответствует x .

Итак, отбираются только такие альтернативы, для которых хотя бы при одной функции сожалений достаточно велика вероятность, что такая альтернатива не хуже всех других альтернатив.

Рассмотрим теперь вопрос о бинарном отношении, максимальное множество которого можно использовать для выявления альтернатив, принадлежащих $C(X, K, \alpha)$.

Определение 3.2. Иррефлексивное бинарное отношение $\mathcal{R}$ заданное на X , назовем соответствующим тройке (X, K, α) , если

$$x' \mathcal{R} x \Leftrightarrow P(U(\xi') \leq U(\xi)) \geq 1 - \alpha, \forall U(\cdot) \in K, \quad (8)$$

где случайный вектор ξ' соответствует x' , случайный вектор ξ соответствует x .

Предположение 3.1. Бинарное отношение (8) транзитивно.

Из Предположения 3.1 следует, что корректно понятие множества максимальных элементов по бинарному отношению $\mathcal{R}$, которое далее обозначается $Max_{\mathcal{R}}(X)$.

Теорема 3.1. Если выполняется Предположение 3.1, а бинарное отношение $\mathcal{R}$ соответствует тройке (X, K, α) , то

$$C(X, K, \alpha) \subseteq Max_{\mathcal{R}}(X).$$

Доказательство. Пусть $x^* \in C(X, K, \alpha)$, т.е. найдется такая функция $U'(\cdot) \in K$, что $P(U'(\xi^*) \leq U'(\xi)) > \alpha, \forall x \in X$, где ξ^* соответствует x^* , ξ соответствует x .

Предположим, что $x^* \notin Max_{\mathcal{R}}(X)$. Тогда найдется такой $x' \in X$, что $x' \mathcal{R} x^*$. Отсюда в силу соответствия $\mathcal{R}$ тройке (X, K, α) имеем

$$P(U(\xi') \leq U(\xi^*)) \geq 1 - \alpha, \forall U(\cdot) \in K,$$

где ξ' соответствует x' . Отсюда следует, что для любой функции $U(\cdot) \in K$ имеем, что

$$P(U(\xi^*) \leq U(\xi')) \leq \alpha.$$

Отсюда $x \notin C(X, K, \alpha)$, т.е. получено противоречие. Теорема доказана.

Теорема показывает, что и в случае стохастического выбора выполняется вложение множеств, ранее доказанное в [10] для случая отсутствия информации о распределении критериев. На случай стохастического выбора переносится и другой результат, доказанный в [10] для задачи без информации о распределении критериев – оценка $Max_{\mathcal{R}}(X)$ сверху.

Теорема 3.2. Если выполняется Предположение 3.1, а бинарное отношение $\mathcal{R}$ соответствует тройке (X, K, α) , то имеет место включение $Max_{\mathcal{R}}(X) \subseteq Max_{PS}(X)$, где $Max_{PS}(X)$ – множество элементов множества X , максимальных по отношению Парето-Слейтера.

Доказательство. Пусть $x' \succ x$. Следовательно $P(\{\omega : \xi'(\omega) \succ_S \xi(\omega)\}) \geq 1 - \alpha$.

Рассмотрим $\omega : \xi'(\omega) \succ_S \xi(\omega)$. Для любой функции $U(\cdot) \in K$ согласно аксиоме при $\xi'(\omega) \succ_S \xi(\omega)$ выполняется $U(\xi'(\omega)) < U(\xi(\omega))$. Отсюда следует, что

$$P(\{\omega : U(\xi'(\omega)) < U(\xi(\omega))\}) \geq \\ \geq P(\{\omega : \xi'(\omega) \succ_S \xi(\omega)\}) \geq 1 - \alpha, \forall U(\cdot) \in K.$$

Следовательно, $x' \mathcal{R} x$, т.е. бинарное отношение $\mathcal{R}$ включает бинарное отношение Парето-Слейтера. Отсюда следует утверждение теоремы.

На основе доказанных теорем можно сформулировать процедуру Шага 4.

Шаг 4. ЛПР формулирует аксиому о том, что функция сожалений ЛПР $U(\cdot) : R^m \rightarrow R$ принадлежит некоторому бесконечному классу K , удовлетворяющему требованиям, сформулированным в аксиоме, и назначает число $\alpha \in [0, 1/2)$. Исследователь строит такое транзитивное иррефлексивное бинарное отношение $\mathcal{R}$, что множество максимальных (согласно $\mathcal{R}$) альтернатив X , удовлетворяет $Max_{\mathcal{R}}(X) \subseteq C(X, K, \alpha)$, разрабатывает алгоритм нахождения $Max_{\mathcal{R}}(X)$ и при-

Литература

1. Гусев Д.В., Лотов А.В. Методы поддержки принятия решений в задаче конечного выбора. Исследование операций. Модели, системы, решения (под ред. Иванилова Ю.П.). М.: ВЦ РАН, 1994. С.15-43
2. Jankowski P., Lotov A., Gusev D. Multiple Criteria Trade-off Approach to Spatial Decision Making. Spatial Multiple Criteria Decision Making and Analysis: A Geographical Information Sciences Approach (ed. By J.-C. Thill). Brookfield, VT, 1999. P. 127-148.
3. Бурмистрова Л.В., Ефремов Р.В., Лотов А.В. Методика визуальной поддержки принятия решений и ее применение в системах управления водными ресурсами. Известия Академии Наук. Серия Теория и Системы Управления. 2002, №5, с.89-100.
4. Soloveichik D., Ben-Aderet N., Grinman M., Lotov A. Multi-objective optimization and marginal abatement cost in the electricity sector – an Israeli case study. European Journal on Operational Research, 2002. 140(3). P. 571-583.
5. Lotov A.V., Bushenkov V.A., Kamenev G.K. Interactive Decision Maps. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004.
6. Dietrich J., Schumann A.H., Lotov A.V. Workflow oriented participatory decision support for integrated river basin planning // Topics on System Analysis and Integrated Water Resource Management (ed. by A. Castelletti and R. Soncini Sessa), Elsevier, (2007). P. 207-221.
7. Efremov R., Rios-Insua D., Lotov A. A framework for participatory decision support using Pareto frontier visualization, goal identification and arbitration. European Journal of Operational Research, v. 199, (2009). P. 459-467
8. Lotov A.V., Kistanov A.A., and Zaitsev A.D. Visualization-based Data Mining Tool and its Web application// In: Y. Shi, W. Xu, and Z. Chen (Eds.), Data Mining and Knowledge Management. Chinese Academy of Sciences Symposium CASDMKD 2004, Beijing, China, July 12-14, 2004, Revised Paper Series: [Lecture Notes in Computer Science](#), Subseries: [Lecture Notes in Artificial Intelligence](#), Vol. 3327, Springer-Verlag, (2004), Berlin, Heidelberg.
9. Lotov A. Visualization-based Selection-aided Data Mining with Fuzzy Data. International Journal of Information Technology & Decision Making. Vol. 5, No 4 (December 2006). P. 611-621.
10. Холмов А.В. Обоснование метода разумных целей для задач с неопределенностью. Сборник статей молодых ученых факультета ВМиК МГУ, 2008. выпуск №5, 34-48.
11. Лотов А.В., Холмов А.В. Метод разумных целей в задаче многокритериального выбора с неточной информацией. Доклады Академии Наук. Том 429, №1. 2009, с.28-30.
12. Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я. Математические основы теории риска. М.: Физматлит, 2007.
13. Ларичев О.И. Объективные модели и субъективные решения. М: Наука, 1987.
14. Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л. Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.: Наука, 1997, 239 с.
15. Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К. Метод достижимых целей. Математические основы и экологические приложения. The Edwin Mellen Press, Lewiston, NY, USA, 1999, 400 с.
16. Lotfi V., Stewart T.J., and Zionts S. An Aspiration Level Interactive Model for Multiple Criteria Decision Making, Computers and Operations Research, 19(7), 1992, 671-681.
17. Каменев Г.К. Оптимальные адаптивные методы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М: Изд. ВЦ РАН, 2007, 230 с.
18. Бушенков В.А. и Лотов А.В. Методы построения и использования обобщенных множеств достижимости. М: ВЦ АН СССР, 1982.
19. Лотов А.В., Поспелов А.И. Метод квазиразумных целей для целочисленных задач многокритериальной оптимизации // Доклады АН, том 414, № 3, 2007, 317-319.
20. Поспелов А.И. Аппроксимация выпуклой оболочки Эджворта-Парето в многокритериальных целочисленных задачах с монотонными критериями. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., том 49, № 10, с. 1765-1778.

Лотов Александр Владимирович. Главный научный сотрудник Вычислительного центра им. А.А. Дородницына РАН. Окончил МФТИ в 1969 году. Доктор физико-математических наук, профессор. Лауреат премии Эджворта-Парето Международного общества по принятию решений при многих критериях (2000 г.). Автор более 100 научных работ, в том числе четырех монографий и четырех учебных пособий. Область научных интересов: многокритериальная оптимизация, аппроксимация многомерных тел, поддержка принятия решений в компьютерных сетях, множества достижимости динамических систем. E-mail: lotov10@ccas.ru.

Холмов Алексей Владимирович. Аспирант факультета ВМК МГУ им. М.В.Ломоносова. Окончил МГУ им М.В.Ломоносова в 2007 году. Автор двух научных работ. Область научных интересов: многокритериальная оптимизация стохастических систем. E-mail: axely@yandex.ru.