А.О. Захаров

Сужение множества Парето на основе взаимозависимой информации замкнутого типа[1]

Аннотация. Аксиоматический подход к сужению множества Парето используется в работе для решения задачи многокритериального выбора. Цель состоит в построении оценки сверху для неизвестного множества выбираемых вариантов. Устанавливается, как следует сужать область компромиссных вариантов на основе учета замкнутой информации об отношении предпочтения лица, принимающего решение. Приводится иллюстративный пример.

Ключевые слова: аксиоматический подход, многокритериальный выбор, многокритериальная задача, сужение множества Парето, область компромиссов.

Введение

В повседневной жизни, науке, технике и экономике приходится сталкиваться с проблемами выбора, которые следует рассматривать многоаспектно, с нескольких разных сторон. При этом желания и предпочтения человека в процессе выбора чрезвычайно разнообразны, а иногда и противоположны, поскольку обычно он стремится выбрать наиболее выгодное, оптимальное с его точки зрения решение и при этом понести как можно меньшие потери. Теория принятия решений при многих критериях призвана помочь человеку – лицу, принимающему решение (ЛПР), в обосновании выбора и поиска разумного компромисса в сложных ситуациях.

Разработаны различные методы решения многокритериальных задач [1-5], которые предлагают процедуры нахождения "наилучшего" решения на основе вкусов и предпочтений ЛПР, причем каждый автор по-своему понимает, что является наилучшим. Выделяют методы, основанные на использовании обобщенного критерия; процедуры теории многомерной полезности (MAUT); метод анализа иерархий (AHP); человеко-машинные (интерактивные) процедуры; подходы, предназначенные для решения задач в условиях неопределенности и т.д. Для решения задач с неколичественными критериями используют методы вербального анализа решений. Заметим, что для большинства из существующих подходов не установлены четкие границы их применимости. Кроме того, алгоритмы по нахождению "наилучшего" решения нередко включают эвристическую составляющую.

В данной работе используется аксиоматический подход к сужению множества Парето [6]. Согласно этому подходу, модель многокритериального выбора включает множество возможных решений, числовой векторный критерий и бинарное отношение предпочтения ЛПР, которое известно лишь частично. Принимаются некоторые "разумные" аксиомы поведения ЛПР в процессе принятия решений. А сама идея сужения множества Парето заключается в построении на основе конечного набора так называемых "квантов информации" [2] об отношении предпочтения ЛПР определенной оценки сверху для неизвестного множества выбираемых ("наилучших") решений.

"Квант информации" представляет собой сведение о том, что ЛПР согласно понести определенные потери по некоторой совокупности критериев (менее важной группы) ради получения вы-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-07-00449).

годы по другой совокупности критериев (более важной группы). Эти "кванты информации" выявляются при прямом опросе ЛПР и характеризуют степень готовности ЛПР идти на компромисс в процессе принятия решения. Границы указанной оценки сверху выделяют искомую область "наилучших" решений.

Ответ на вопрос, каким образом проводить учет подобного рода информации был получен в [6]. В [7] для сужения множества Парето используется информация, в которой присутствует набор менее важных групп критериев, вместо одной группы. В данной работе предлагается рассмотреть замкнутую "цепочку", состоящую из "квантов информации". Частный случай, когда первая группа критериев важнее второй группы, а та, в свою очередь, важнее первой, был разобран в [8].

Работа имеет следующую структуру. Сначала устанавливается критерий непротиворечивости рассматриваемого набора "квантов информации". Далее показывается, что сужение множества Парето в случае, когда "цепочка" замкнутой информации состоит из трех групп критериев, можно осуществить на основе полученных формул для пересчета векторного критерия. Множество Парето относительно нового (пересчитанного) векторного критерия указывает границы неизвестного множества выбираемых решений. Работа иллюстрируется прикладным примером использования замкнутой информации для сужения множества Парето. Все доказательства вынесены в приложение.

1. Основные положения аксиоматического подхода к сужению множества Парето

В терминах векторов основными объектами задачи многокритериального выбора являются:

- непустое множество возможных векторов *Y*, $Y = f(X)$;
- асимметричное бинарное отношение строго предпочтения $\succ_Y$, заданное на множестве *Y*.

Здесь $X \subseteq R^n$, а отображение $f: X \to R^m$ носит название векторного критерия; его компоненты отражают стремления ЛПР. Бинарное отношение $\succ_Y$ определяется следующим образом: $y' \succ_Y y''$ означает, что при рассмотрении двух векторов y' и y'' ЛПР выберет y', а y'' отвергнет. Символом $C(Y)$ обозначается неизвестное множество выбираемых векторов, которое содержится во множестве возможных векторов *Y* и в полной мере удовлетворяет предпочтениям ЛПР. Это множество представляет собой желаемый выбор ЛПР из *Y*.

Очертим класс многокритериальных задач, к которым возможно применение используемого здесь аксиоматического подхода, введя следующие ограничения, основанные на аксиомах "разумного выбора" [6]. Предполагается, что при рассмотрении двух возможных вариантов исключенный вектор не может быть выбран и из всего множества *Y*. Чтобы ЛПР имело возможность сравнивать произвольные векторы (не только из множества *Y*), и таким образом предоставлять информацию об отношении предпочтения, для последнего вводится продолжение $\succ$ на критериальное пространство R^m. Кроме того, ЛПР заинтересовано в увеличении значения по каждому критерию при неизменном значении прочих.

Важную роль в аксиоматическом подходе играет

Принцип Эджворта-Парето [6]. *При выполнении аксиом "разумного выбора" для любого множества выбираемых векторов* $C(Y)$ *справедливо включение*

$$C(Y) \subseteq P(Y). \tag{1}$$

Здесь $P(Y) = \{ y^* \in Y \mid \overline{\exists} y \in Y: \ y \geq y^* \}$ называется множеством парето-оптимальных (оптимальных по Парето) векторов. Напомним, что запись $y' \geq y''$ означает выполнение неравенств $y'_i \geqq y''_i$, $i = \overline{1,m}$, причем хотя бы одно из них строгое.

В соответствии с принципом Эджворта-Парето выбирать “наилучшие” решения следует только в пределах множества Парето. Указать для множества $C(Y)$ более точные границы, чем (1), не располагая дополнительной информацией о предпочтениях ЛПР, невозможно.

Введем множество недоминируемых векторов

$$Ndom(Y)=\left\{ y^* \in Y \mid \nexists y \in Y \; : \; y \succ_Y y^* \right\}.$$

Для него справедливы включения $Ndom(Y) \subseteq P(Y)$ и $C(Y) \subseteq Ndom(Y)$ [6].

Заметим, что все результаты, а также постановку задачи многокритериального выбора можно выразить в терминах решений. При этом предполагается следующая связь между отношением предпочтения $\succ_X$, определенным на множестве *X*, и $\succ_Y$: соотношения $f(x') \succ_Y f(x'')$ и $x' \succ_X x''$ эквиваленты для всех $x' \in \widetilde{x}'$ и $x'' \in \widetilde{x}''$, таких что $\widetilde{x}', \widetilde{x}'' \in \widetilde{X}$. Под $\widetilde{X}$ понимается совокупность классов эквивалентности, порождённых отношением эквивалентности $x' \sim x'' \Leftrightarrow f(x') = f(x'')$ на множестве *X*.

2. Понятие замкнутой информации

Следуя [6], напомним, что наличие “кванта информации” о предпочтениях ЛПР означает, что для всех векторов $y', y'' \in R^m$, связанных соотношениями

$$y'_i - y''_i = w_i > 0 \quad \forall i \in A, \quad y''_j - y'_j = w_j > 0 \quad \forall j \in B, \quad y'_s = y''_s \quad \forall s \in I \setminus (A \cup B),$$

где $I = \{1,2,\ldots,m\}$, $A, B \subset I$, $A \neq \varphi$, $B \neq \varphi$, $A \cap B = \varphi$, выполняется $y' \succ y''$. В подобном случае говорят также, что группа критериев *A* важнее группы критериев *B* с заданными положительными параметрами w_i, w_j.

Использование аксиомы 4 [6] в приведенном выше определении позволяет считать векторы y', y'' фиксированными, в частности, можно положить

$$y'_i = w_i \quad \forall i \in A, \quad y'_j = -w_j \quad \forall j \in B, \quad y'_s = 0 \quad \forall s \in I \setminus (A \cup B), \quad y'' = 0_m .$$

Как было упомянуто выше, в данной работе для сужения множества Парето используется сообщение, представляющее собой замкнутую цепочку “квантов информации”. Сформулируем соответствующее определение.

Определение 1. Пусть имеется набор попарно непересекающихся множеств $A_i \subset I$, $i = \overline{1,k}$, $k \geqq 2$. Будем говорить, что задана *замкнутая информация об относительной важности групп критериев* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ с набором положительных параметров $\left\{ w_{i_1}^{(1)}, w_{i_2}^{(1)}, w_{i_2}^{(2)}, w_{i_3}^{(2)}, \ldots, w_{i_{k-1}}^{(k-1)}, w_{i_k}^{(k-1)}, w_{i_k}^{(k)}, w_{i_1}^{(k)} \in R \mid i_1 \in A_1, \ldots, i_k \in A_k \right\}$, если для векторов $y^{(1)}$, $y^{(2)}, \ldots, y^{(k)} \in R^m$ вида

$$\begin{array}{l} y_{i_1}^{(1)} = w_{i_1}^{(1)}, \quad y_{i_2}^{(1)} = -w_{i_2}^{(1)}, \quad y_s^{(1)} = 0 \quad \forall i_1 \in A_1, \forall i_2 \in A_2, \forall s \in I \setminus (A_1 \cup A_2); \\ y_{i_2}^{(2)} = w_{i_2}^{(2)}, \quad y_{i_3}^{(2)} = -w_{i_3}^{(2)}, \quad y_s^{(2)} = 0 \quad \forall i_2 \in A_2, \forall i_3 \in A_3, \forall s \in I \setminus (A_2 \cup A_3); \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_{i_k}^{(k)} = w_{i_k}^{(k)}, \quad y_{i_1}^{(k)} = -w_{i_1}^{(k)}, \quad y_s^{(k)} = 0 \quad \forall i_k \in A_k, \forall i_1 \in A_1, \forall s \in I \setminus (A_k \cup A_1) \end{array} \qquad (2)$$

справедливы соотношения $y^{(1)} \succ 0_m, y^{(2)} \succ 0_m, \ldots, y^{(k)} \succ 0_m$.

В соответствии с приведенным определением группа критериев A_1 важнее группы A_2 с набором положительных параметров $w_{i_1}^{(1)}$, $w_{i_2}^{(1)}$ для всех $i_1 \in A_1$, $i_2 \in A_2$; группа A_2 важнее группы A_3 с набором положительных параметров $w_{i_2}^{(2)}$, $w_{i_3}^{(2)}$ для всех $i_2 \in A_2$, $i_3 \in A_3$ и т.д.; группа A_k важнее группы A_1 с набором положительных параметров $w_{i_k}^{(k)}$, $w_{i_1}^{(k)}$ для всех $i_k \in A_k$, $i_1 \in A_1$.

Пусть имеется набор векторов

$$y^{(i)} \in N^m, \quad i = \overline{1,k}, \quad N^m = R^m \setminus \left[R_+^m \cup R_-^m \cup \{0_m\}\right],$$

который может задавать набор “квантов информации” об отношении предпочтения ЛПР. Его называют непротиворечивым (совместным) [6], если существует хотя бы одно бинарное отношение $\succ'$, удовлетворяющее аксиомам 2-4 и такое, что выполняются соотношения $y^{(i)} \succ' 0_m$, $i = \overline{1,k}$. Введем матрицу $W(i_1, i_2, \ldots i_k)$ порядка *k*, где $i_p \in A_p$, $p = \overline{1,k}$:

$$W(i_1, i_2, \ldots, i_k) = \begin{pmatrix} w_{i_1}^{(1)} & 0 & \ldots & 0 & -w_{i_1}^{(k)} \\ -w_{i_2}^{(1)} & w_{i_2}^{(2)} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & w_{i_{k-1}}^{(k-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & -w_{i_k}^{(k-1)} & w_{i_k}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

В работе [9] рассмотрен случай, когда $|A_i| = 1$, $i = \overline{1,k}$, доказана теорема о сужении множества Парето на основе указанной замкнутой информации, а также получен критерий непротиворечивости в терминах знака определителя матрицы $W(i_1, i_2, \ldots i_k)$.

Теорема 1. *Пусть имеется замкнутая информация об относительной важности групп критериев, заданная с помощью векторов (2). Для того чтобы данная информация была непротиворечивой, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие номера* $i_p \in A_p$, $p = \overline{1,k}$, *что*

$$\frac{w_{i_2}^{(1)} w_{i_3}^{(2)} \cdot \ldots \cdot w_{i_k}^{(k-1)} w_{i_1}^{(k)}}{w_{i_1}^{(1)} w_{i_2}^{(2)} \cdot \ldots \cdot w_{i_{k-1}}^{(k-1)} w_{i_k}^{(k)}} < 1.$$

Следствие 1. *Информация об относительной важности групп критериев замкнутого типа, заданная с помощью векторов (2), будет непротиворечивой тогда и только тогда, когда найдутся такие номера* $i_p \in A_p$, $p = \overline{1,k}$, *что* $|W(i_1, i_2, \ldots, i_k)| > 0$.

Если положить $k = 2$, критерий непротиворечивости преобразуется в существование таких номеров $i_1 \in A_1$, $i_2 \in A_2$, что выполнено неравенство $w_{i_1}^{(1)} / w_{i_2}^{(1)} > w_{i_1}^{(2)} / w_{i_2}^{(2)}$. Последнее совпадает с результатом, полученным в [8].

Пример 1. Развивающейся фирме требуется подержанный автомобиль для транспортировки грузов и доставки товаров. Автомобиль предполагается использовать постоянно. Однако имеется ограниченность в финансовых средствах в начале рассматриваемого периода, т.е. стартовый капитал достаточно мал, однако по мере развития бизнеса ожидается его прирост.

При анализе объекта покупки выделены следующие критерии: 1. Стоимость автомобиля (f_1); 2.Пробег (f_2); 3. Расходы (f_3). Под расходами понимаются предполагаемые затраты на техническое обслуживание автомобиля в течение рассматриваемого периода. Необходимо минимизировать стоимость, пробег и расходы на техническое обслуживание, т.е. векторный критерий есть $f = (-f_1, -f_2, -f_3)$.

Допустим, что предпочтения ЛПР отражены в следующих “квантах информации”:

1. Критерий f_1 важнее f_2 (стоимость важнее пробега). В силу ограниченности финансирования на момент покупки, пренебрегаем величиной пробега. Купить дешевый автомобиль является более приоритетной целью. Пусть ЛПР ради уменьшения стоимости на 50 тыс. руб. готово пойти на увеличение пробега на 12 тыс. км., т.е. $w_1^{(1)} = 50$, $w_2^{(1)} = 12$.

2. Критерий f_2 важнее f_3 (пробег важнее расходов). Поскольку эксплуатация автомобиля предполагается постоянной, то для ЛПР желательно приобрести транспортное средство с меньшим пробегом, пожертвовав для этой цели некоторым увеличением расходов на техническое обслуживание. Пусть ЛПР согласно пойти на увеличение расходов в 20 тыс. руб. ради уменьшения пробега на 35 тыс. км., т.е. $w_2^{(2)} = 35$, $w_3^{(2)} = 20$.

3. Критерий f_3 важнее f_1 (расходы важнее стоимости). Ожидаемыми расходами на техническое обслуживание полностью пренебрегать тоже нельзя. Так как существует определенный риск не получения ожидаемой прибыли или вероятность непредвиденных финансовых затрат (имеются в виду расходы, не связанные прямо или косвенно с автомобилем), поэтому нельзя забывать о снижении расходов на техническое обслуживание. Таким образом, в определенной мере дешевизна автомобиля не должна быть более приоритетной, чем уменьшение расходов. Пусть ЛПР ради снижения расходов на 25 тыс. руб. готово пойти на увеличение стоимости на 15 тыс. руб., т.е. $w_3^{(3)} = 25$, $w_1^{(3)} = 15$.

Заметим, что данная замкнутая информация является непротиворечивой, ибо, согласно теореме 1 [9], получаем:

$$|W| = \begin{vmatrix} 50 & 0 & -15 \\ -12 & 35 & 0 \\ 0 & -20 & 25 \end{vmatrix} = 40150 > 0.$$

Пусть задано множество возможных векторов $Y = \{y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, y^{(4)}, y^{(5)}\}$, где

$$y^{(1)} = -\begin{pmatrix} 450 \\ 83 \\ 20 \end{pmatrix},\quad y^{(2)} = -\begin{pmatrix} 490 \\ 66 \\ 35 \end{pmatrix},\quad y^{(3)} = -\begin{pmatrix} 505 \\ 24 \\ 25 \end{pmatrix},\quad y^{(4)} = -\begin{pmatrix} 365 \\ 107 \\ 40 \end{pmatrix},\quad y^{(5)} = -\begin{pmatrix} 450 \\ 83 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $P(Y) = Y$. После учета введенной информации (см. [9]), получим образ множества возможных решений $G = g(X) = \{g^{(1)}, g^{(2)}, g^{(3)}, g^{(4)}, g^{(5)}\}$ при отображении g, где

$$g^{(1)} = -\begin{pmatrix} 429150 \\ 242350 \\ 226000 \end{pmatrix},\quad g^{(2)} = -\begin{pmatrix} 466925 \\ 235800 \\ 244850 \end{pmatrix},\quad g^{(3)} = -\begin{pmatrix} 467600 \\ 208500 \\ 206950 \end{pmatrix},$$

$$g^{(4)} = -\begin{pmatrix} 372475 \\ 250450 \\ 264600 \end{pmatrix},\quad g^{(5)} = -\begin{pmatrix} 466700 \\ 180660 \\ 163800 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что вектор $g^{(5)}$ доминирует векторы $g^{(2)}$ и $g^{(3)}$ по отношению $\geq$. Тогда суженное множество Парето $\hat{P}(Y) = \{y^{(1)}, y^{(4)}, y^{(5)}\}$. Таким образом, учет дополнительной замкнутой информации позволило сузить исходное множество Парето до трех вариантов.

3. Учет замкнутой информации с помощью линейных комбинаций

Пусть задана замкнутая информация об относительной важности групп критериев *A*, *B*, *C*, при этом $A \neq \varphi$, $B \neq \varphi$, $C \neq \varphi$ и попарно не пересекаются. Тогда, согласно определению 1, для векторов $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)} \in R^m$ с компонентами

$$\begin{aligned} y_i^{(1)} = w_i^{(1)}, \quad y_j^{(1)} = -w_j^{(1)}, \quad y_s^{(1)} = 0 \quad \forall i \in A, \forall j \in B, \forall s \in I \setminus (A \cup B); \\ y_j^{(2)} = w_j^{(2)}, \quad y_l^{(2)} = -w_l^{(2)}, \quad y_s^{(2)} = 0 \quad \forall j \in B, \forall l \in C, \forall s \in I \setminus (B \cup C); \\ y_l^{(3)} = w_l^{(3)}, \quad y_i^{(3)} = -w_i^{(3)}, \quad y_s^{(3)} = 0 \quad \forall l \in C, \forall i \in A, \forall s \in I \setminus (A \cup C) \end{aligned} \tag{3}$$

справедливы соотношения $y^{(1)} \succ 0_m$, $y^{(2)} \succ 0_m$, $y^{(3)} \succ 0_m$.

Обозначим $D = A \cup B \cup C$. Введем следующее множество «изолированных непротиворечивых» совокупностей критериев:

$$\Omega = \Big\{ (\alpha,\beta,\gamma) \in A \times B \times C \mid |W(\alpha,\beta,\gamma)| > 0 \quad \forall i \in A \setminus \{\alpha\} \; |W(i,\beta,\gamma)| \leqq 0,$$
$$\forall j \in B \setminus \{\beta\} \; |W(\alpha,j,\gamma)| \leqq 0, \quad \forall l \in C \setminus \{\gamma\} \; |W(\alpha,\beta,l)| \leqq 0 \Big\}$$

Рассмотрим ситуацию, когда множество Ω не пусто, т.е. найдется такая совокупность номеров критериев (α,β,γ), где $\alpha \in A$, $\beta \in B$, $\gamma \in C$, для которой будет выполнено условие непротиворечивости, тогда как ни одна из совокупностей (i,β,γ), (α,j,γ), (α,β,l) при всех $i \in A \setminus \{\alpha\}$, $j \in B \setminus \{\beta\}$, $l \in C \setminus \{\gamma\}$ не будет удовлетворять условию непротиворечивости.

Теорема 2. *Пусть выполнены аксиомы* 1-4 [6] *и имеется непротиворечивая информация о том, что группа A важнее группы B, B важнее C, а C, в свою очередь, важнее A, т.е. задано (3). Причем, множество изолированных непротиворечивых совокупностей критериев* Ω *не пусто. Тогда для любого непустого множества выбираемых векторов* $C(Y)$ *справедливы включения*

$$C(Y) \subseteq \hat{P}(Y) \subseteq P(Y), \tag{4}$$

где $\hat{P}(Y) = \bigcap_{(\alpha,\beta,\gamma) \in \Omega} f\left(P_{g^{(\alpha,\beta,\gamma)}}(X)\right)$ *– пересечение образов парето-оптимальных решений в многокритериальных задачах с векторным критерием* $g^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ *и множеством возможных решений X при отображении f, а m-мерный векторный критерий* $g^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ *имеет компоненты*

$$\begin{aligned} g_\alpha^{(\alpha,\beta,\gamma)} &= w_\beta^{(2)} w_\gamma^{(3)} f_\alpha + w_\alpha^{(3)} w_\gamma^{(2)} f_\beta + w_\alpha^{(3)} w_\beta^{(2)} f_\gamma, \\ g_\beta^{(\alpha,\beta,\gamma)} &= w_\beta^{(1)} w_\gamma^{(3)} f_\alpha + w_\alpha^{(1)} w_\gamma^{(3)} f_\beta + w_\alpha^{(3)} w_\beta^{(1)} f_\gamma, \\ g_\gamma^{(\alpha,\beta,\gamma)} &= w_\beta^{(1)} w_\gamma^{(2)} f_\alpha + w_\alpha^{(1)} w_\gamma^{(2)} f_\beta + w_\alpha^{(1)} w_\beta^{(2)} f_\gamma, \\ g_i^{(\alpha,\beta,\gamma)} &= |W(\alpha,\beta,\gamma)| f_i - |W(i,\beta,\gamma)| f_\alpha + w_\gamma^{(2)} \left(w_i^{(3)} w_\alpha^{(1)} - w_\alpha^{(3)} w_i^{(1)} \right) f_\beta + \\ &+ w_\beta^{(2)} \left(w_i^{(3)} w_\alpha^{(1)} - w_\alpha^{(3)} w_i^{(1)} \right) f_\gamma \quad \forall i \in A \setminus \{\alpha\}, \\ g_j^{(\alpha,\beta,\gamma)} &= |W(\alpha,\beta,\gamma)| f_j + w_\gamma^{(3)} \left(w_j^{(1)} w_\beta^{(2)} - w_\beta^{(1)} w_j^{(2)} \right) f_\alpha - |W(\alpha,j,\gamma)| f_\beta + \\ &+ w_\alpha^{(3)} \left(w_j^{(1)} w_\beta^{(2)} - w_\beta^{(1)} w_j^{(2)} \right) f_\gamma \quad \forall j \in B \setminus \{\beta\}, \\ g_l^{(\alpha,\beta,\gamma)} &= |W(\alpha,\beta,\gamma)| f_l + w_\beta^{(1)} \left(w_l^{(2)} w_\gamma^{(3)} - w_\gamma^{(2)} w_l^{(3)} \right) f_\alpha + \\ &+ w_\alpha^{(1)} \left(w_l^{(2)} w_\gamma^{(3)} - w_\gamma^{(2)} w_l^{(3)} \right) f_\beta - |W(\alpha,\beta,l)| f_\gamma \quad \forall l \in C \setminus \{\gamma\}, \\ g_s^{(\alpha,\beta,\gamma)} &= f_s \quad \forall s \in I \setminus D. \end{aligned} \tag{5}$$

Очевидно, что частный случай $|A|=|B|=|C|=1$ полностью сводит теорему 2 к примеру 2 из [9], а формулы для расчета “нового” векторного критерия (5) превращаются в соответствующие формулы из упомянутого примера.

Пример 2. Рассмотрим многокритериальную задачу с дискретным множеством возможных решений X и векторным критерием $f:\ X \to R^6$. Множество возможных векторов $Y = f(X)$ представлено следующими элементами:

$$y^{(1)}=(4,2,1,2,3,0),\ y^{(2)}=(5,4,6,1,9,3),\ y^{(3)}=(1,4,1,2,5,3),\ y^{(4)}=(8,3,4,1,2,6),$$
$$y^{(5)}=(2,0,3,4,1,6)$$

Нетрудно видеть, что данные векторы являются парето-оптимальными. Пусть группы критериев $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4\}$, $C=\{5,6\}$. Имеется следующая замкнутая информация: группа A важнее группы B с набором параметров $\{3,2\}$ и $\{1,3\}$; группа B важнее группы C с набором параметров $\{2,1\}$ и $\{3,6\}$; группа C важнее группы A с набором параметров $\{4,2\}$ и $\{2,6\}$. Нетрудно получить, что множество изолированных непротиворечивых совокупностей критериев $\Omega=\{(1,3,5)\}$, поскольку

$$|W(1,3,5)|=\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}=18,\ |W(2,3,5)|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -6 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}=-2,$$

$$|W(1,4,5)|=\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}=-6,\ |W(1,3,6)|=\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Таким образом, данный набор “квантов информации” непротиворечив, и, более того, выполняются условия теоремы 2. Значит, для расчета компонент “нового” векторного критерия g можно воспользоваться формулами (5). Тогда образ множества возможных решений $G=g(X)$ при отображении g будет состоять из элементов

$$g^{(1)}=(50,170,34,152,39,126),\ g^{(2)}=(112,586,110,244,123,468),$$
$$g^{(3)}=(34,256,26,112,42,126),\ g^{(4)}=(96,294,84,222,72,468),$$
$$g^{(5)}=(38,158,46,140,39,306).$$

Очевидно, что множество парето-оптимальных векторов $P(G)=\{g^{(2)}\}$ в многокритериальной задаче с векторным критерием g. Поэтому новая оценка для множества выбираемых векторов $C(Y)$ будет следующей: $\hat{P}(Y)=\{y^{(2)}\}$. В итоге учет замкнутой информации позволил сузить выбор до одного варианта.

Теперь пусть $\widetilde{Y}=\{\widetilde{y}^{(i)}, i=\overline{1,5}\}$ – множество возможных векторов, где

$$\widetilde{y}^{(1)}=(4,2,1,8,3,0),\ \widetilde{y}^{(2)}=(3,4,6,1,1,3),\ \widetilde{y}^{(4)}=(3,3,4,2,2,1),\ \widetilde{y}^{(3)}=y^{(3)},\ \widetilde{y}^{(5)}=y^{(5)},$$

применим к нему уже имеющуюся замкнутую информацию об относительной важности групп критериев. Кроме того, справедливо $P(\widetilde{Y})=\widetilde{Y}$. В данном случае преобразованное множество возможных векторов $\widetilde{G}=g(\widetilde{X})$ состоит из следующих векторов:

$$\widetilde{g}^{(1)}=(50,170,34,260,39,126),\ \widetilde{g}^{(2)}=(64,358,86,124,69,432),$$
$$\widetilde{g}^{(4)}=(56,284,64,140,57,288),\ \widetilde{g}^{(3)}=g^{(3)},\ \widetilde{g}^{(5)}=g^{(5)}.$$

Поскольку здесь доминируемым является только вектор $\widetilde{g}^{(3)}$, сужение множества Парето $\hat{P}(\widetilde{Y})$ в соотношении $C(\widetilde{Y})\subseteq \hat{P}(\widetilde{Y})\subseteq P(\widetilde{Y})$ есть $\widetilde{Y}\setminus\{\widetilde{y}^{(3)}\}$.

Таким образом, при наличии различных множеств возможных векторов Y одна и та же замкнутая информация о группах критериев в различной степени обеспечивает сужение множества Парето. Вклад дополнительной информации в принятие решения зависит от того, к какому множеству возможных векторов она применяется.

Заключение

В работе рассмотрена актуальная проблема сужения области компромиссов и упрощения процесса выбора за счет использования дополнительной, так называемой замкнутой информации об отношении предпочтения ЛПР. Получено новое условие, при котором «цепочка квантов информации» является непротиворечивой и, значит, применимой в процессе принятия решений. В случае трех групп критериев доказана теорема о построении оценки сверху для множества выбираемых векторов, где компоненты «нового» векторного критерия являются неотрицательными линейными комбинациями компонент «старого» векторного критерия. Благодаря этому «новый» критерий сохраняет многие свойства «старого» в том числе непрерывность, дифференцируемость и выпуклость. Полученные результаты иллюстрируются примерами. Показано, как выбор множества возможных векторов влияет на сужение области компромиссов при использовании одной и той же замкнутой информации.

Автор благодарит своего научного руководителя проф. В.Д. Ногина за помощь, оказанную при написании работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Для доказательства теоремы установим, что набор векторов (2) будет противоречивым тогда и только тогда, когда для любых номеров $i_p \in A_p$, $p = \overline{1,k}$, справедливо неравенство

$$\frac{w_{i_2}^{(1)} w_{i_3}^{(2)} \cdot \ldots \cdot w_{i_k}^{(k-1)} w_{i_1}^{(k)}}{w_{i_1}^{(1)} w_{i_2}^{(2)} \cdot \ldots \cdot w_{i_{k-1}}^{(k-1)} w_{i_k}^{(k)}} \geqq 1 \tag{6}$$

Необходимость. Пусть набор векторов (2) является противоречивым. Согласно теореме 4.7 из [6] это означает существование хотя бы одного неотрицательного ненулевого решения $\left(\lambda_1', \ldots \lambda_m', \mu_1', \ldots, \mu_k'\right)$ системы линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i' e^i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j' y^{(j)} = 0_m . \tag{7}$$

Подставив векторы (2) и решение $\left(\lambda_1', \ldots \lambda_m', \mu_1', \ldots, \mu_k'\right)$ в систему (7) и расписав ее покомпонентно, получим

$$\begin{gathered}
\lambda_s' = 0 \quad \forall s \in I \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_k, \\
\lambda_{i_1}' + \mu_1' w_{i_1}^{(1)} - \mu_k' w_{i_1}^{(k)} = 0 \quad \forall i_1 \in A_1, \\
\lambda_{i_2}' - \mu_1' w_{i_2}^{(1)} + \mu_2' w_{i_2}^{(2)} = 0 \quad \forall i_2 \in A_2, \\
\ldots \\
\lambda_{i_k}' - \mu_{k-1}' w_{i_k}^{(k-1)} + \mu_k' w_{i_k}^{(k)} = 0 \quad \forall i_k \in A_k .
\end{gathered} \tag{8}$$

Если предположить, что $\mu_s' = 0$, $s = \overline{1,k}$, то $\lambda_s' = 0$ для всех $s \in I$. Получается, что $(\lambda_1', \dots \lambda_m', \mu_1', \dots, \mu_k')$ есть нулевое решение системы (7). Это противоречит предположенному выше. Значит, существует, по крайней мере, одно μ_s' отличное от нуля.

Не ограничивая общности, положим $\mu_1' > 0$. В силу $\lambda_{i_p}' \geqq 0$ для всех номеров $i_p \in A_p$, $p = \overline{1,k}$, будут справедливы следующие неравенства:

$$\begin{gathered}
\mu_1' w_{i_1}^{(1)} - \mu_k' w_{i_1}^{(k)} \leqq 0 \quad \forall i_1 \in A_1, \\
-\mu_1' w_{i_2}^{(1)} + \mu_2' w_{i_2}^{(2)} \leqq 0 \quad \forall i_2 \in A_2, \\
\dots \\
-\mu_{k-1}' w_{i_k}^{(k-1)} + \mu_k' w_{i_k}^{(k)} \leqq 0 \quad \forall i_k \in A_k.
\end{gathered} \tag{9}$$

Преобразуя эти неравенства, получаем

$$\mu_2' \leqq \frac{w_{i_2}^{(1)}}{w_{i_2}^{(2)}} \mu_1', \mu_3' \leqq \frac{w_{i_3}^{(2)}}{w_{i_3}^{(3)}} \mu_2', \dots, \mu_k' \leqq \frac{w_{i_k}^{(k-1)}}{w_{i_k}^{(k)}} \mu_{k-1}', \mu_k' \geqq \frac{w_{i_1}^{(1)}}{w_{i_1}^{(k)}} \mu_1' \quad \Rightarrow \quad \frac{w_{i_2}^{(1)} w_{i_3}^{(2)} \cdot \ldots \cdot w_{i_k}^{(k-1)} w_{i_1}^{(k)}}{w_{i_1}^{(1)} w_{i_2}^{(2)} \cdot \ldots \cdot w_{i_{k-1}}^{(k-1)} w_{i_k}^{(k)}} \mu_1' \geqq \mu_1'.$$

Проделав соответствующие преобразования, можно получить неравенство аналогичное последнему, где вместо μ_1' стоит μ_p', $p = \overline{2,k}$. Поэтому допущение $\mu_1' > 0$ общности не ограничивает. Последнее полученное неравенство влечет (6).

Достаточность. Пусть условие (6) выполнено для любых номеров $i_p \in A_p$, $p = \overline{1,k}$. Возьмем произвольное $\mu_1' \in R$, $\mu_1' > 0$ и, умножив на него обе части неравенства (6), получим

$$\frac{w_{i_2}^{(1)} w_{i_3}^{(2)} \cdot \ldots \cdot w_{i_k}^{(k-1)} w_{i_1}^{(k)}}{w_{i_1}^{(1)} w_{i_2}^{(2)} \cdot \ldots \cdot w_{i_{k-1}}^{(k-1)} w_{i_k}^{(k)}} \mu_1' \geqq \mu_1' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{w_{i_2}^{(1)} w_{i_3}^{(2)} \cdot \ldots \cdot w_{i_k}^{(k-1)}}{w_{i_2}^{(2)} \cdot \ldots \cdot w_{i_{k-1}}^{(k-1)} w_{i_k}^{(k)}} \mu_1' \geqq \frac{w_{i_1}^{(1)}}{w_{i_1}^{(k)}} \mu_1'.$$

Очевидно, что найдется такое $\mu_k' \in R$, что

$$\frac{w_{i_2}^{(1)} \cdot \ldots \cdot w_{i_k}^{(k-1)}}{w_{i_2}^{(2)} \cdot \ldots \cdot w_{i_k}^{(k)}} \mu_1' \geqq \underline{\mu_k' \geqq \frac{w_{i_1}^{(1)}}{w_{i_1}^{(k)}} \mu_1'} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{w_{i_2}^{(1)} \cdot \ldots \cdot w_{i_{k-1}}^{(k-2)}}{w_{i_2}^{(2)} \cdot \ldots \cdot w_{i_{k-1}}^{(k-1)}} \mu_1' \geqq \frac{w_{i_k}^{(k)}}{w_{i_k}^{(k-1)}} \mu_k'.$$

Найдется такое $\mu_{k-1}' \in R$, что

$$\frac{w_{i_2}^{(1)} \cdot \ldots \cdot w_{i_{k-1}}^{(k-2)}}{w_{i_2}^{(2)} \cdot \ldots \cdot w_{i_{k-1}}^{(k-1)}} \mu_1' \geqq \underline{\mu_{k-1}' \geqq \frac{w_{i_k}^{(k)}}{w_{i_k}^{(k-1)}} \mu_k'} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{w_{i_2}^{(1)} \cdot \ldots \cdot w_{i_{k-2}}^{(k-3)}}{w_{i_2}^{(2)} \cdot \ldots \cdot w_{i_{k-2}}^{(k-2)}} \mu_1' \geqq \frac{w_{i_{k-1}}^{(k-1)}}{w_{i_{k-1}}^{(k-2)}} \mu_{k-1}'.$$

Продолжая аналогичным образом, придем к тому, что найдется такое $\mu_2' \in R$, что

$$\underline{\frac{w_{i_2}^{(1)}}{w_{i_2}^{(2)}} \mu_1' \geqq \mu_2' \geqq \frac{w_{i_3}^{(3)}}{w_{i_3}^{(2)}} \mu_3'}.$$

Преобразовывая все подчеркнутые выше неравенства, получим (9). Введем $\lambda_s' \in R$ такие, что $\lambda_{i_p}' \geqq 0$ для всех номеров $i_p \in A_p$, $p = \overline{1,k}$, и $\lambda_s' = 0$ для любых $s \in I \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_k$, которые удовлетворяют системе уравнений (8). Таким образом, $(\lambda_1',\ldots\lambda_m',\mu_1',\ldots,\mu_k')$ является ненулевым неотрицательным решением системы (7). Тогда по теореме 4.7 из [6] набор векторов (2) является противоречивым.

Доказательство теоремы 2. Пусть K – острый выпуклый конус (без нуля) конусного отношения предпочтения $\succ$, содержащий неотрицательный ортант R_+^m без начала координат. Задание векторов (3), таких что $y^{(1)}\succ 0_m$, $y^{(2)}\succ 0_m$, $y^{(3)}\succ 0_m$, эквивалентно включению $y^{(1)},y^{(2)},y^{(3)}\in K$. В силу следствия 2.1 из [6] верно $R_+^m\subseteq K$.

Возьмем произвольную совокупность номеров критериев $(\alpha,\beta,\gamma)\in\Omega$ и зафиксируем ее. Введем в рассмотрение конус $M_{\alpha\beta\gamma}$, как выпуклый конус (без нуля), порожденный набором векторов

$$\left\{e^s\in R^m \;\mid\; s\in I\setminus\{\alpha,\beta,\gamma\}\right\}, y^{(1)},y^{(2)},y^{(3)}, \tag{10}$$

где $e^1,e^2,\ldots,e^m$ – единичные векторы пространства R^m. Покажем, что все векторы из набора (10) являются образующими конуса $M_{\alpha\beta\gamma}$, т.е ни один не может быть представлен в виде неотрицательной линейной комбинации остальных.

Сначала предположим, что один из векторов e^s, $s\in I\setminus D$ представим в виде такой неотрицательной линейной комбинации

$$e^s=\sum_{l\in I\setminus(D\cup\{s\})}\lambda_l e^l+\sum_{i\in A\setminus\{\alpha\}}\lambda_i e^i+\sum_{j\in B\setminus\{\beta\}}\lambda_j e^j+\sum_{l\in C\setminus\{\gamma\}}\lambda_l e^l+\mu_1 y^{(1)}+\mu_2 y^{(2)}+\mu_3 y^{(3)}.$$

Однако, для s-й компоненты последнего векторного равенства имеем $1=0$. Значит, данное представление невозможно ни при каких λ_l $\forall l\in I\setminus\{s,\alpha,\beta,\gamma\}$, μ_1,μ_2,μ_3.

Выполнение равенства

$$y^{(1)}=\sum_{l\in I\setminus D}\lambda_l e^l+\sum_{i\in A\setminus\{\alpha\}}\lambda_i e^i+\sum_{j\in B\setminus\{\beta\}}\lambda_j e^j+\sum_{l\in C\setminus\{\gamma\}}\lambda_l e^l+\mu_2 y^{(2)}+\mu_3 y^{(3)},$$

невозможно ни при каком неотрицательном значении μ_3, ибо по компоненте α имеем

$$w_\alpha^{(1)}=-\mu_3 w_\alpha^{(3)}.$$

К аналогичному противоречию можно прийти при рассмотрении векторов $y^{(2)}$ и $y^{(3)}$.

Осталось разобрать ситуацию, когда векторы e^s, $s\in D\setminus\{\alpha,\beta,\gamma\}$ могут быть представлены в виде линейной комбинации. Пусть найдется такое $s\in A$, $s\neq\alpha$, что выполнено равенство

$$e^s=\sum_{l\in I\setminus D}\lambda_l e^l+\sum_{i\in A\setminus\{\alpha,s\}}\lambda_i e^i+\sum_{j\in B\setminus\{\beta\}}\lambda_j e^j+\sum_{l\in C\setminus\{\gamma\}}\lambda_l e^l+\mu_1 y^{(1)}+\mu_2 y^{(2)}+\mu_3 y^{(3)}.$$

Существование такой линейной комбинации с неотрицательными λ_l $\forall l\in I\setminus\{s,\alpha,\beta,\gamma\}$, μ_1,μ_2,μ_3 эквивалентно существованию решений $\omega(i,j,l)\geqq 0_6$ систем линейных уравнений

$$\omega(i,j,l)A(i,j,l)=\tilde{e}^2\quad\forall i\in A\setminus\{\alpha,s\},\quad\forall j\in B\setminus\{\beta\},\quad\forall l\in C\setminus\{\gamma\}, \tag{11}$$

где

$$\omega(i,j,l)=(\lambda_i,\lambda_j,\lambda_l,\mu_1,\mu_2,\mu_3),$$

$$A(i,j,l)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ w_\alpha^{(1)} & w_s^{(1)} & w_i^{(1)} & -w_\beta^{(1)} & -w_j^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_\beta^{(2)} & w_j^{(2)} & -w_\gamma^{(2)} & -w_l^{(2)} \\ -w_\alpha^{(3)} & -w_s^{(3)} & -w_i^{(3)} & 0 & 0 & w_\gamma^{(3)} & w_l^{(3)} \end{pmatrix},$$

а $\widetilde{e}^2$ – единичный вектор пространства R^7. Согласно лемме Фаркаша [10, стр.374] либо система (11) имеет неотрицательное решение, либо имеет решение система неравенств

$$A(i,j,l)\nu \geqq 0_6, \quad \widetilde{e}^2\nu<0 \quad \forall i\in A\setminus\{\alpha,s\}, \quad \forall j\in B\setminus\{\beta\}, \quad \forall l\in C\setminus\{\gamma\}. \tag{12}$$

Рассмотрим систему (12). Покажем, что она имеет решение $\nu^*=\left(1,-\frac{w_\alpha^{(1)}w_\beta^{(2)}w_\gamma^{(3)}}{w_s^{(3)}w_\beta^{(1)}w_\gamma^{(2)}},0,0,0,0,0\right)^T$. Нетрудно видеть, все неравенства, кроме 4-го и 6-го, подсистемы нестрогих неравенств выполняются как равенства. Далее, очевидно, $\nu_2^*<0$. Для остальных составляющих системы (12) получаем

$$w_\alpha^{(1)}-w_s^{(1)}\frac{w_\alpha^{(1)}w_\beta^{(2)}w_\gamma^{(3)}}{w_s^{(3)}w_\beta^{(1)}w_\gamma^{(2)}}=w_\alpha^{(1)}\left(1-\frac{w_s^{(1)}w_\beta^{(2)}w_\gamma^{(3)}}{w_s^{(3)}w_\beta^{(1)}w_\gamma^{(2)}}\right)\geqq 0,$$

$$-w_\alpha^{(3)}+w_s^{(3)}\frac{w_\alpha^{(1)}w_\beta^{(2)}w_\gamma^{(3)}}{w_s^{(3)}w_\beta^{(1)}w_\gamma^{(2)}}=w_\alpha^{(3)}\left(\frac{w_\alpha^{(1)}w_\beta^{(2)}w_\gamma^{(3)}}{w_\alpha^{(3)}w_\beta^{(1)}w_\gamma^{(2)}}-1\right)>0.$$

Данные соотношения выполняются в силу $s\neq\alpha$ и $(\alpha,\beta,\gamma)\in\Omega$.

Таким образом, получаем, что система (11) не имеет неотрицательного решения. Это, в свою очередь, означает невозможность представления вектора e^s, при некотором $s\in A$, $s\neq\alpha$, в виде неотрицательной линейной комбинации остальных векторов из набора (10). Аналогичные рассуждения можно провести, рассматривая случаи, когда $s\in B$, $s\neq\beta$, и $s\in C$, $s\neq\gamma$, и получить в обоих ситуациях невозможность такого представления. Тем самым образующими конуса $M_{\alpha\beta\gamma}$ являются векторы из набора (10).

Установим, что $e^\alpha,e^\beta,e^\gamma\in M_{\alpha\beta\gamma}$. Сделаем это на примере вектора e^α, для векторов e^β и e^γ устанавливается аналогичным образом. Другими словами, необходимо показать существование таких неотрицательных λ_l $\forall l\in I\setminus\{\alpha,\beta,\gamma\}$, μ_1,μ_2,μ_3, что

$$e^\alpha=\sum_{l\in I\setminus D}\lambda_l e^l+\sum_{i\in A\setminus\{\alpha\}}\lambda_i e^i+\sum_{j\in B\setminus\{\beta\}}\lambda_j e^j+\sum_{l\in C\setminus\{\gamma\}}\lambda_l e^l+\mu_1 y^{(1)}+\mu_2 y^{(2)}+\mu_3 y^{(3)}. \tag{13}$$

Это равносильно существованию решения $\eta(i,j,l)\geqq 0$ систем линейных уравнений

$$B(i,j,l)\eta(i,j,l)=\hat{e}^1 \quad \forall i\in A\setminus\{\alpha\}, \quad \forall j\in B\setminus\{\beta\}, \quad \forall l\in C\setminus\{\gamma\}, \tag{14}$$

где

$$B(i,j,l)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & w_\alpha^{(1)} & 0 & -w_\alpha^{(3)} \\ 1 & 0 & 0 & w_i^{(1)} & 0 & -w_i^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & -w_\beta^{(1)} & w_\beta^{(2)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -w_j^{(1)} & w_j^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -w_\gamma^{(2)} & w_\gamma^{(3)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -w_l^{(2)} & w_l^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \eta(i,j,l)=\begin{pmatrix} \lambda_i \\ \lambda_j \\ \lambda_l \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix},$$

$\hat{e}^1$ – единичный вектор пространства R^6. Рассмотрим определитель системы (14):

$$|B(i,j,l)|=|W(\alpha,\beta,\gamma)|>0 \quad \forall i\in A\setminus\{\alpha\}, \quad \forall j\in B\setminus\{\beta\}, \quad \forall l\in C\setminus\{\gamma\}.$$

Поскольку определитель $|B(i,j,l)|$ отличен от нуля, система (14) разрешима. Для определения компонент вектора $\eta(i,j,l)$ воспользуемся формулой Крамера, согласно которой

$$\lambda_i=-\frac{|W(i,\beta,\gamma)|}{|W(\alpha,\beta,\gamma)|}\geqq 0 \quad \forall i\in A\setminus\{\alpha\},\ \lambda_j=\frac{w_\gamma^{(3)}\left(w_j^{(1)}w_\beta^{(2)}-w_\beta^{(1)}w_j^{(2)}\right)}{|W(\alpha,\beta,\gamma)|}>0 \quad \forall j\in B\setminus\{\beta\},$$

$$\lambda_l=\frac{w_\beta^{(1)}\left(w_l^{(2)}w_\gamma^{(3)}-w_\gamma^{(2)}w_l^{(3)}\right)}{|W(\alpha,\beta,\gamma)|}>0 \quad \forall l\in C\setminus\{\gamma\},\ \mu_1=\frac{w_\beta^{(2)}w_\gamma^{(3)}}{|W(\alpha,\beta,\gamma)|}>0,$$

$$\mu_2=\frac{w_\beta^{(1)}w_\gamma^{(3)}}{|W(\alpha,\beta,\gamma)|}>0,\ \mu_3=\frac{w_\beta^{(1)}w_\gamma^{(2)}}{|W(\alpha,\beta,\gamma)|}>0.$$

Покажем, что числитель в выражениях для λ_j и λ_l положителен при всех $j\in B\setminus\{\beta\}$ и $l\in C\setminus\{\gamma\}$. Поскольку $(\alpha,\beta,\gamma)\in\Omega$, верно соотношение

$$\frac{w_\alpha^{(3)}w_\beta^{(1)}w_\gamma^{(2)}}{w_\alpha^{(1)}w_\beta^{(2)}w_\gamma^{(3)}}<1\leqq\frac{w_\alpha^{(3)}w_j^{(1)}w_\gamma^{(2)}}{w_\alpha^{(1)}w_j^{(2)}w_\gamma^{(3)}} \quad \forall j\in B\setminus\{\beta\},$$

что влечет выполнение $\left(w_j^{(1)}w_\beta^{(2)}-w_\beta^{(1)}w_j^{(2)}\right)>0$. Также нетрудно получить неравенство $\left(w_l^{(2)}w_\gamma^{(3)}-w_\gamma^{(2)}w_l^{(3)}\right)>0$. Итак, существуют такие неотрицательные числа $\lambda_l\ \forall l\in I\setminus\{\alpha,\beta,\gamma\}$, μ_1,μ_2,μ_3, что справедливо равенство (13). С учетом $e^\alpha,e^\beta,e^\gamma\in M_{\alpha\beta\gamma}$ приходим к включению $M_{\alpha\beta\gamma}\subseteq K$.

Докажем теперь, что включение $y\in M_{\alpha\beta\gamma}\cup\{0_m\}$ имеет место тогда и только тогда, когда совместна система неравенств

$$w_\beta^{(2)}w_\gamma^{(3)}y_\alpha+w_\alpha^{(3)}w_\gamma^{(2)}y_\beta+w_\alpha^{(3)}w_\beta^{(2)}y_\gamma\geqq 0, \tag{15}$$

$$w_\beta^{(1)}w_\gamma^{(3)}y_\alpha+w_\alpha^{(1)}w_\gamma^{(3)}y_\beta+w_\alpha^{(3)}w_\beta^{(1)}y_\gamma\geqq 0, \tag{16}$$

$$w_\beta^{(1)}w_\gamma^{(2)}y_\alpha+w_\alpha^{(1)}w_\gamma^{(2)}y_\beta+w_\alpha^{(1)}w_\beta^{(2)}y_\gamma\geqq 0, \tag{17}$$

$$\left|W(\alpha,\beta,\gamma)\right|y_i-\left|W(i,\beta,\gamma)\right|y_\alpha+w_\gamma^{(2)}\left(w_i^{(3)}w_\alpha^{(1)}-w_\alpha^{(3)}w_i^{(1)}\right)y_\beta+ \\ +w_\beta^{(2)}\left(w_i^{(3)}w_\alpha^{(1)}-w_\alpha^{(3)}w_i^{(1)}\right)y_\gamma \geqq 0 \quad \forall i\in A\setminus\{\alpha\}, \tag{18}$$

$$\left|W(\alpha,\beta,\gamma)\right|y_j+w_\gamma^{(3)}\left(w_j^{(1)}w_\beta^{(2)}-w_\beta^{(1)}w_j^{(2)}\right)y_\alpha-\left|W(\alpha,j,\gamma)\right|y_\beta+ \\ +w_\alpha^{(3)}\left(w_j^{(1)}w_\beta^{(2)}-w_\beta^{(1)}w_j^{(2)}\right)y_\gamma \geqq 0 \quad \forall j\in B\setminus\{\beta\}, \tag{19}$$

$$\left|W(\alpha,\beta,\gamma)\right|y_l+w_\beta^{(1)}\left(w_l^{(2)}w_\gamma^{(3)}-w_\gamma^{(2)}w_l^{(3)}\right)y_\alpha+ \\ +w_\alpha^{(1)}\left(w_l^{(2)}w_\gamma^{(3)}-w_\gamma^{(2)}w_l^{(3)}\right)y_\beta-\left|W(\alpha,\beta,l)\right|y_\gamma \geqq 0 \quad \forall l\in C\setminus\{\gamma\}, \tag{20}$$

$$y_s \geqq 0 \quad \forall s\in I\setminus D. \tag{21}$$

Включение $y\in M_{\alpha\beta\gamma}\cup\{0_m\}$ эквивалентно существованию таких $\lambda_l \geqq 0$ для всех $l\in I\setminus\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $\mu_1 \geqq 0$, $\mu_2 \geqq 0$, $\mu_3 \geqq 0$, при которых выполнено $y=\sum\limits_{s\in I\setminus\{\alpha,\beta,\gamma\}}\lambda_s e^s+\mu_1 y^{(1)}+\mu_2 y^{(2)}+\mu_3 y^{(3)}$. Если расписать последнее векторное равенство покомпонентно, получим

$$y_i=\lambda_i+\mu_1 w_i^{(1)}-\mu_3 w_i^{(3)} \quad \forall i\in A\setminus\{\alpha\}, \tag{22}$$

$$y_j=\lambda_j-\mu_1 w_j^{(1)}+\mu_2 w_j^{(2)} \quad \forall j\in B\setminus\{\beta\}, \tag{23}$$

$$y_l=\lambda_l-\mu_2 w_l^{(2)}+\mu_3 w_l^{(3)} \quad \forall l\in C\setminus\{\gamma\}, \tag{24}$$

$$y_\alpha=\mu_1 w_\alpha^{(1)}-\mu_3 w_\alpha^{(3)}, \tag{25}$$

$$y_\beta=-\mu_1 w_\beta^{(1)}+\mu_2 w_\beta^{(2)}, \tag{26}$$

$$y_\gamma=-\mu_2 w_\gamma^{(2)}+\mu_3 w_\gamma^{(3)}, \tag{27}$$

$$y_s=\lambda_s \quad \forall s\in I\setminus D. \tag{28}$$

Пусть $y\in M_{\alpha\beta\gamma}\cup\{0_m\}$, тогда справедливы равенства (22)-(28). Покажем выполнение неравенств (15)-(21). Очевидно, что неравенство (21) вытекает из неравенства (28). Разрешим равенства (25)-(27) относительно μ_1, μ_2, μ_3:

$$\mu_1=\frac{w_\beta^{(2)}w_\gamma^{(3)}y_\alpha+w_\alpha^{(3)}w_\gamma^{(2)}y_\beta+w_\alpha^{(3)}w_\beta^{(2)}y_\gamma}{\left|W(\alpha,\beta,\gamma)\right|},$$

$$\mu_2=\frac{w_\beta^{(1)}w_\gamma^{(3)}y_\alpha+w_\alpha^{(1)}w_\gamma^{(3)}y_\beta+w_\alpha^{(3)}w_\beta^{(1)}y_\gamma}{\left|W(\alpha,\beta,\gamma)\right|},$$

$$\mu_3=\frac{w_\beta^{(1)}w_\gamma^{(2)}y_\alpha+w_\alpha^{(1)}w_\gamma^{(2)}y_\beta+w_\alpha^{(1)}w_\beta^{(2)}y_\gamma}{\left|W(\alpha,\beta,\gamma)\right|}.$$

Исходя из $(\alpha,\beta,\gamma)\in\Omega$, получаем справедливость неравенств (15)-(17).

Подставив полученные выражения для μ_1 и μ_3 в соотношение (22), придем в силу условия $\lambda_i \geqq 0$ для всех $i \in A \setminus \{\alpha\}$ к неравенству (18). Аналогичным образом из равенства (23), соотношений для μ_1 и μ_2, получаем неравенство (19), а из равенства (24), используя выражения для μ_2 и μ_3, – неравенство (20).

Пусть теперь выполнены неравенства (15)-(21), докажем, что верны равенства (22)-(28). Положим $\lambda_s = y_s$ для любых $s \in I \setminus D$, откуда, исходя из (21), верно $\lambda_s \geqq 0$. Обозначим левые части неравенств (15)-(17) за μ_1', μ_2' и μ_3' соответственно.

Рассмотрим следующее выражение:

$$\mu_1' w_\alpha^{(1)} - \mu_3' w_\alpha^{(3)} = \left|W(\alpha,\beta,\gamma)\right| y_\alpha .$$

Разделив предыдущее равенство на $\left|W(\alpha,\beta,\gamma)\right| \neq 0$ и положив $\mu_1 = \mu_1' / \left|W(\alpha,\beta,\gamma)\right|$ и $\mu_3 = \mu_3' / \left|W(\alpha,\beta,\gamma)\right|$, получим равенство (25). При этом $\mu_1 \geqq 0$, $\mu_3 \geqq 0$ в силу (15), (17) и $(\alpha,\beta,\gamma) \in \Omega$. Аналогично, выражение

$$-\mu_1' w_\beta^{(1)} + \mu_2' w_\beta^{(2)} = \left|W(\alpha,\beta,\gamma)\right| y_\beta$$

делим на $\left|W(\alpha,\beta,\gamma)\right|$ и, положив $\mu_2 = \mu_2' / \left|W(\alpha,\beta,\gamma)\right|$, получаем равенство (26). Из (16) и $(\alpha,\beta,\gamma) \in \Omega$ следует, что $\mu_2 \geqq 0$. Точно так же можно убедиться в справедливости равенства (27).

Разделим неравенство (18) на $\left|W(\alpha,\beta,\gamma)\right|$ и, обозначив правую часть символом λ_i, перегруппируем слагаемые. В результате, согласно введенным обозначениям, получим равенство (22). Производя над неравенствами (19) и (20) аналогичные преобразования, можно показать справедливость равенств (23) и (24) при $\lambda_j \geqq 0$ при всех $j \in B \setminus \{\beta\}$ и $\lambda_l \geqq 0$ при всех $l \in C \setminus \{\gamma\}$, соответственно.

Итак, доказано, что включение $y \in M_{\alpha\beta\gamma} \cup \{0_m\}$ равносильно системе неравенств (15)-(21). Причем, конус $M_{\alpha\beta\gamma}$ совпадает с множеством решений системы (15)-(21), если, по крайней мере, одно из неравенств строгое. Согласно доказанному выше справедливы включения $R_+^m \subseteq M_{\alpha\beta\gamma} \subseteq K$, которые, в силу произвольности выбора α, β и γ, имеют место при любых $(\alpha,\beta,\gamma) \in \Omega$. Из всего полученного следует:

$$Ndom(Y) \subseteq \hat{P}_{\alpha\beta\gamma}(Y) \subseteq P(Y) \quad \forall (\alpha,\beta,\gamma) \in \Omega ,$$

где $\hat{P}_{\alpha\beta\gamma}(Y)$ – множество недоминируемых векторов множества Y относительно конусного отношения с конусом $M_{\alpha\beta\gamma}$, т.е. $\hat{P}_{\alpha\beta\gamma}(Y) = \left\{ y^* \in Y \mid \ \overline{\exists} y \in Y : y - y^* \in M_{\alpha\beta\gamma} \right\}$.

Завершающая часть доказательства почти дословно повторяет соответствующую часть доказательства теоремы 3.5 [6] с очевидными изменениями в формулах, поэтому здесь опускается.

Литература

1. Figueira J., Greco S., Ehrgott M. Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys. Boston: Springer, 2005. 1045 p.
2. Ногин В.Д. Проблема сужения множества Парето: подходы к решению // Искусственный интеллект и принятие решений, 2008. № 1. С. 98-112.
3. Т.Л. Саати. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети. Пер. с англ. / Науч. ред. А.В. Андрейчиков, О.Н. Андрейчикова. – М.: Издательство ЛКИ, 2008. 360 с.
4. Петровский А.Б. Теория принятия решений. М.: Изд. центр «Академия», 2009. 400 с.
5. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация: теория, расчет и приложения. Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1992. 504 с.
6. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. Изд. 2, испр. и доп. М.: Физматлит, 2005. 176 с.
7. Ногин В.Д. Сужение множества Парето на основе информации о предпочтениях ЛПР точечно-множественного типа // Искусственный интеллект и принятие решений, 2009. № 1. С. 98-109.
8. Климова О.Н., Ногин В.Д. Учёт взаимно зависимой информации об относительной важности критериев в процессе принятия решений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ, 2006. Т. 46. № 12. С. 2179-2191.
9. Захаров А.О. Сужение множества Парето на основе замкнутой информации об отношении предпочтения ЛПР // Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: «Прикладная математика. Информатика. Процессы управления», 2009. вып. 4. С. 69-83.
10. Кузютин В.Ф., Зенкевич Н.А., Еремеев В.В. Геометрия: Учебник для вузов. СПб: Издательство «Лань», 2003. 416 с.

Захаров Алексей Олегович. Аспирант кафедры теории управления факультета прикладной математики-процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. Автор 3 работ. Область научных интересов: многокритериальная оптимизация. E-mail: zakh.alexey@gmail.com.