М.И. Алиев, Э.А. Исаева, И.М. Алиев

Теория вероятностей и теория нечетких множеств Л. Заде: различия и сходство

Аннотация. Логические операции, проводимые искусственным интеллектом, будут опираться на многозначную, а точнее, на нечеткую логику. Здесь уместно будет воспользоваться теорией нечетких множеств (ТНМ) Л.Заде. Физические явления, воспринимаемые искусственным интеллектом, а затем воссоздаваемые им самим для себя, можно рассматривать как события.

Ключевые слова: неточность, случайность, нечеткость, аксиоматика Колмогорова, мера вероятности, индикатор элементарного события, функция принадлежности.

Введение

Когда говорят о теории нечетких множеств Лютфи Заде, ее либо принимают, либо не воспринимают органически. Но что означает ТНМ Заде в философии нашей жизни? Очень многое в современном мире изменило наше мировоззрение, и мы поняли, что многие вещи имеют более глубокое содержание, чем наши упрощения. В особенности это относится к проблемам искусственного интеллекта.

ТНМ Заде имеет непосредственное отношение к этой проблеме [1]. Говоря об искусственном интеллекте, мы понимаем, что речь идет об ЭВМ нового поколения [2]. Но чем будут отличаться эти новые машины от своих предшественников. Разве нынешние машины не решают многие задачи и почему бы их не отнести к искусственному интеллекту. Дело в том, что логические операции, проводимые машинами сегодня, опираются на двузначную логику. Здесь возможны только два результата «да или нет», что, конечно же, не отвечает запросам, присущим интеллекту. Если бы машины смогли воспринять наш мир, они бы восприняли его черно-белым. В этом отношении, теория вероятностей тоже является черно-белой. Ведь в ее основе лежит та же аристотелевская логика. Поэтому, когда говорят о процессах, происходящих в машинах, имеют в виду, что это вероятностные процессы. Эти процессы являются предметом исследования физиков.

Теория вероятностей и ее приложения играют большую роль в исследованиях физиков. В статистической физике и термодинамике случайность, хаос, флуктуации, устойчивость занимают особое место. В данной работе мы хотели бы с более высокой ступени иерархии неопределенностей рассмотреть эти вопросы.

1. Физическое явление с точки зрения теории вероятностей

Физическое явление можно рассматривать, как событие. В теории вероятностей, используя аксиоматику Колмогорова [3], при рассмотрении какого-то события ставят ему в соответствие подмножество элементарных событий $\{\omega\}$. Затем, объединяя уже разные подмножества любых других событий, образуют множество или пространство событий Ω. Так образованное множество Ω считается измеримым множеством без множества меры нуль, т.е. борелевским множеством. Как известно, для борелевских множеств определена функция $L(S)$, так называемая мера Лебега, которая удовлетворяет трем условиям: а) неотрицательна, б) аддитивна, в) для каждого интервала равна его длине [3].

Но в теории вероятностей рассматривается другая функция P(S), которая удовлетворяет только условиям а) и б) и определяется как:

P(S) = f(x)dx, если функция f(x) определена на множестве S;

P(S) = $+\infty$, в остальных случаях,
где f(x) - плотность распределения вероятностей.

В случае, когда множество S есть интервал, то f(x) интегрируема в смысле Римана. А если рассматривается более общий класс множеств, чем интервалы, то f(x) интегрируема в смысле Лебега. В случае, когда вместо L(S) используется другая мера P(S), то f(x) интегрируема в смысле Лебега-Стилтьеса. Как мы видим, в теории вероятностей заведомо выбираются такие меры P(S), которые равны 1. Эти меры – вероятностные меры. Соответствующая функция распределения вероятностей *F(x)* в одномерном пространстве R_1 определяется как:

F(x) = P(ξ< x), где ξ – случайная величина,

$0 \le F(x) \le 1$, $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

Все вышесказанное вытекает из хорошо известных теорий (аксиоматики Колмогорова, теории множеств и теории меры) [3,4].

2. Физическое явление с точки зрения теории нечетких множеств

Однако существуют, и они остались вне выбора теории вероятностей, другие меры, для которых P(S) больше или меньше 1. Эти меры рассматриваются и изучаются в теории нечетких множеств (ТНМ) Л. Заде.

Называются они, как мера возможностей П(S)>1 и мера необходимостей N(S) < 1. Понятно, что, рассматривая одновременно все эти три меры П, P, N, мы выходим за рамки ограничений теории вероятностей. Подобно тому, как в теории вероятностей для вероятностной меры P(S) вводится функция ее возможностей

$F_П(x)$ = П(η< x), где η - нечеткая величина,

$0 \le F_П(x) \le 2$,

$F_П(-\infty) = 0$, $F_П(+\infty) = 2$ (число 2 взято нами произвольно)
и функцию распределения необходимостей

$F_N(x)$ = П(η< x), где ξ - нечеткая величина,

$0 \le F_N(x) \le 0{,}5$,

$F_N(-\infty) = 0$, $F_N(+\infty) = 0{,}5$ (число 0,5 тоже взято нами произвольно)

Эти функции могут вводиться и по-другому, как это, например, сделано в [5]. В этой работе помимо элементарных событий (точек множества Ω) вводятся так называемые «фокальные элементы». Они являются попарно-различимыми подмножествами $E_1, E_2, \dots E_n$ множества Ω, которые отражают неточность наблюдений. В этом случае вероятность $m(E_i)$ понимается, как значение вероятности совокупности элементарных событий, составляющих E_i. В этой ситуации вероятность события *A* можно охарактеризовать лишь неточно, как величину, содержащуюся в интервале $\{P_*(A), P^*(A)\}$ с границами:

$$P_*(A) = \sum_{E_j \subseteq A} m(E_j) = \sum_j m(E_i) = N_{E_j}(A) \text{ -}$$

это величина есть необходимость,

$$P^*(A) = \sum_{E_j \cap A = \otimes} m(E_j) = \sum_j m(E_i) = \Pi_{E_j}(A) \text{ -}$$

это величина есть возможность события *A*.

Отметим, что в ТНМ два противоположных события А и В связаны друг с другом, помимо имеющейся связи в теории вероятностей P(A) + P(B) = 1, еще и как П(A) + N(B) = 1.

Известно, что для применения теории вероятностей и статистики необходимо, чтобы частота события $\nu = \frac{n}{N}$, где *n* – число появления интересующего нас события в результате N экспериментов, имела тенденцию при больших значениях N принимать постоянное значение, т.е. имела бы место статистическая устойчивость. Если выполняется эта устойчивость, тогда *n* – случайная величина. Если же нет этой устойчивости, то *n* – нечеткая величина и здесь теория вероятностей и статистика использована быть не может.

Л.Заде и Р. Беллман [6] не раз отмечали, что источником неточности является не только случайность, но и нечеткость. Именно для учета неточности, связанной с нечеткостью используется ТНМ Заде.

3. Статистика и теория нечетких множеств

Как известно, все эксперименты делятся на три группы [7]:

1) Хорошие эксперименты, в которых есть полная устойчивость исхода опыта. Это – ред-

кий случай детерминированности. Здесь все ясно и без теории вероятностей.

2) Не очень хорошие эксперименты, в которых есть статистическая устойчивость исхода. Здесь используется теория вероятностей и статистика.

3) Плохие эксперименты, в которых нет статистической устойчивости исхода. Здесь может быть использована ТНМ Заде.

Наличие статистической устойчивости редко можно вполне гарантировать. Тем не менее, многие эксперименты на квантово-механическом уровне относят ко второй группе. Здесь можно было бы вспомнить изречение Л. Заде: «Если для достижения цели у Вас в руках лишь молоток, то все вокруг представляется гвоздями».

Эксперименты на квантово-механическом уровне сами по себе уже относятся к третьей группе, т.е. плохим экспериментам из-за самой присущей квантовому миру неопределенности. Поэтому и был создан аппарат квантовой механики с понятиями теории вероятностей с особыми изощрениями и абстракциями. Но применение ТНМ Заде могло бы быть более целесообразным.

Казалось бы, что повседневные эксперименты, эксперименты на макроскопическом уровне относятся к первой или второй группам, хорошим экспериментам. Но это не вполне гарантировано. Например, в статье [8] показано, что методы статистической обработки не приспособлены к анализу «тонкой» структуры распределения результатов эксперимента. В эксперименте изучаются флуктуации в макроскопических процессах и авторы подводят нас к тому, что понятия «вероятность» и «случайность» еще не предопределяют ответ на вопрос, как будут распределены флуктуации. Здесь можно вспомнить, как Беллман и Заде [4] предсказывали и предупреждали: «По-нашему убеждению необходимо различать случайность и нечеткость, причем последняя является основным источником неточности во многих процессах принятия решения». Таким образом, применение ТНМ Заде в физике является актуальной задачей.

4. Индикатор и функция принадлежности

В данной статье мы хотели бы уделить внимание таким понятиям, как вероятность события, индикатор события, случайная величина, случайная функция и посмотреть на них с точки зрения ТНМ Заде.

Известно, что по аксиоматике Колмогорова элементами или точками вероятностного пространства Ω являются не просто события A, B, ..., которые в будущем произойдут или не произойдут, а элементарные события ω_1, ω_2, ω_3, ..., т.е. $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ...\}$[3]. В этом случае различные подмножества Ω являются событиями A, B, C, ..., которым в теории вероятностей ставится в соответствие так называемый индикатор события $I(\omega)$:

$$I(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \bar{\omega} \in A \\ 0, & \text{если} \quad \bar{\omega} \notin A \end{cases}$$

где A – событие, которое рассматривается нами.

В ТНМ Заде имеется функция принадлежности элемента x множеству M – $\mu(x)$:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, \text{если} & x \in M \\ 0, \text{если} & x \notin M \\ [0,1] & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Как мы видим, аналогом индикатора $I(\omega)$ из теории вероятностей является функция принадлежностей $\mu(x)$ из ТНМ Заде.

В теории вероятностей, как известно, помимо самих элементарных событий $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, ..., рассматриваются также и операции над ними, которые образуют класс F событий (алгебра событий). Поэтому, когда говорят, что задано вероятностное пространство, то имеют в виду, что задана и алгебра в ней, которая записывается, как $\Omega = \{\omega, F, P\}$. Если пространство Ω состоит из n элементарных событий $\omega_1, \omega_2, ... \omega_n$, тогда F состоит из $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ...C_n^n$ событий. Из всего класса F событий теория вероятностей выбирает лишь те, которые образуют полную группу попарно несовместимых, равновероятных событий. Вероятность в этом случае определяется лишь для тех исходов эксперимента, которые могут быть представлены в виде объединений из них.

В более простой форме классическая теоретико-вероятностная модель такова. Полная группа попарно несовместимых равновероятных событий A_1, A_2, ...A_n считаются точками ω_1, ω_2, ... ω_n нового пространства элементарных событий $\Omega = \{\omega_1\}+\{\omega_2\}+...\{\omega_n\}$, где $\{\omega_n\}$- множество событий, образующих одну точку. Однако, как мы видим, вне этого пространства остались невыбранные из класса F попарно совместимые события A_1^*, A_2^* ... A_n^*. Именно они могут стать областью для применения ТНМ. Эти события A_1^*, A_2^* ... A_n^* могут стать точками ω_1^*, ω_2^* ... ω_n^* нового нечеткого пространства Ω^*, $\Omega^*=\{\omega_1^*\}+\{\omega_2^*\}+...\{\omega_n^*\}$, в котором мы не уверены, что точка ω^* принадлежит или не принадлежит ему, а можем говорить лишь о степени ее принадлежности к этому пространству. Объединяя эти два пространства, вероятностное и нечеткое, Ω и Ω^*, мы получим новое пространство – пространство возможных событий или возможностное пространство $\Omega^* = \Omega \bigcup \Omega^*$, полное описание которого дается с помощью скобки (Ω^{**}, F, П), где П – мера возможности события, F – алгебра событий. Понятно, что в этом новом пространстве те исходы опыта, которые не могут быть рассмотрены в теории вероятностей, теперь уже могут быть рассмотрены. Как было сказано здесь, в эксперименте, в котором есть статистическая устойчивость, принимает постоянное значение в силу того, что это событие может быть представлено в виде объединения или суммы $A = A_1 + A_2 + ... A_к$ равновероятных, попарно-несовместимых событий. В этом случае вероятности $P(A_i) = \frac{1}{n}$, а $P(A) = \frac{k}{n}$. В эксперименте, в котором нет статистической устойчивости, исход не может быть представлен в виде суммы $A_1 + A_2 + ... A_к$. Поэтому, здесь не может быть использована теория вероятностей, а применяется теория нечетких множеств Заде.

Приведем простой пример. Для игральной кости с пронумерованными шестью гранями, вероятностное пространство состоит из шести элементарных событий (ω_1 – выпадет грань 1, ω_2 – выпадет грань 2, ... ω_6 -выпадет грань 6), индикатор событий $I(\omega)$ которых равен 1, если выпадает элементарное событие и $I(\omega)=0$, если не выпадает. Алгебра нашего вероятностного пространства F оперирует $2^6 = 64$ событиями. Из этих событий выбираются 6 равновероятных, попарно несовместимых событий {1}, {2},…{6}, которые образуют полную группу попарно несовместимых, равновероятных событий. Любой исход в эксперименте, например исход{1, 5}- выпадет либо грань{1}, либо грань {5} обладает статистической устойчивостью, а именно частота исхода $\nu = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Вообразим теперь, что из 64 событий мы можем выбрать лишь 3 равновероятных, попарно несовместимых событий, которые образуют полную группу. Например, $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 4\}$, $A_3 = \{5, 6\}$. Но здесь не все исходы эксперимента могут быть представлены в виде суммы $A_1+A_2 + ...A_к$. Например, для исхода $A=\{1,2,3,4\}=A_1+A_2$. Понятно, что в этом случае $I(\omega_1)=1$, $I(\omega_2)=1$, $I(\omega_3)=0$ и вероятность $P(A) = \frac{2}{3}$. А как быть для исхода A={1,5}? Понятно, что в этом случае он не может быть представлен в виде суммы вышеприведенных элементарных событий и поэтому не могут быть определены индикаторы элементарных событий $I(\omega_1)$, $I(\omega_2)$. Здесь мы должны перейти с понятия индикатора на понятие функции принадлежности $\mu(\omega)$ в теории нечетких множеств Л.Заде [3]. После этого мы можем дополнить наше вероятностное пространство $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ попарно совместимыми нечеткими событиями или элементами $w_1^* = \{1, 3\}$, $w_2^* = \{4, 6\}$ и т.д. В теории нечетких множеств Заде эти элементы имеют отношение к фокальным элементам, которые корректно определены в [3]. В теории вероятностей математическое ожидание, т.е. среднее индикатора $I(\omega)$ есть вероятность события P(A):

$$E(I(\omega)) = 1 * P(A) + 0 * P(\overline{A}) = P(A).$$

Аналогично, математическое ожидание, т.е. среднее функции принадлежности $\mu(\omega)$ есть возможность события П(A):

$$E(\mu(\omega)) = \mu(\omega_1)\Pi(A_1) + \mu(\omega_2)\Pi(A_2) + ... = \Pi(A)$$

5. Случайность с точки зрения ТНМ Заде и нечеткость в экспериментах

В теории вероятностей центральное место занимает понятие случайной величины X [3, 4]. В ее определении большую роль занимает выше проводимое пространство элементарных событий Ω и множество всех событий A, которое называется Ω-полем $\mathcal{A}$. Случайная величина X есть функция, действующая из пространства Ω в некоторое пространство состояний, которое может быть множеством действительных чисел R, т.е. $X: \Omega \rightarrow R$.Случайная величина должна обладать свойством:

$$A = \{\omega / X(\omega) \le x\} \in \mathcal{A}, \ \forall x \in R,$$

где А – событие, A – множество всех событий или же $\sigma-$ поле A, ω – элементарное событие.

Если пространство элементарных событий Ω недоступно прямому наблюдению, то информация в ней может быть получена с помощью выше приведенной функции $X: \Omega \rightarrow R$.

Случайная величина X есть своего рода «измерительный прибор» [9]. Однако не всякое событие в пространстве Ω может быть обнаружено «измерительным прибором X». Иначе говоря, не всякое событие $A \in A$ представимо в виде $A=X^{-1}(B)$. Поэтому σ - поле $A(x)$ есть подполе поля событий A, т.е. $A(x) \subset A$ [1]. Очень интересно посмотреть на такие события с точки зрения ТНМ Заде и ввести понятие нечеткой величины X^*. Аналогично случайной величине X, в определении нечеткой величины X^* главную роль будет занимать нечеткое пространство $\Omega^* = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\ \}$ и множество всех событий A − σ - поле A. Подобно случайной величине, нечеткая величина X^* тоже есть функция, действующая из пространства Ω^* в некоторое пространство состояний, например, в множество действительных чисел R, т.е. $X^*: \Omega^* \rightarrow R$. Она обладает свойством:

$$A = \{\omega / X^*(\omega) \leq x\} \in A, \ \forall x \in R .$$

Аналогично X, нечеткая величина X^* тоже своего рода «измерительный прибор». Ясно, что два измерительных прибора всегда лучше, чем один. Высказанные мысли можно связать со статьей [8], где говорится, что результаты экспериментов в условиях любых процессов разной природы имеют «тонкую» структуру распределения, т.е. имеет место странный разброс результатов. Были построены гистограммы результатов эксперимента. Например, для радиоактивного распада на абсциссе откладывалось число распадов i_n, а на ординате - сумма числа интервалов времени $N(i_n)$. С точки зрения статистической физики максиму гистограммы должен соответствовать среднему числу распадов $\overline{n}$, а зависимость высоты столбика от числа i_n должна монотонно падать с ростом отклонений i_n от $\overline{n}$, т.е. большие флуктуации маловероятны. Но на самом деле число наблюдающихся флуктуаций в зависимости от величины отклонения то увеличивалось, то уменьшалось, и вообще, вело себя не монотонно, а точнее на фоне монотонного падения наблюдалась четкая периодическая картина. В послесловии к статье ставится вопрос: «Почему теория не может объяснить подобное явление?» и автор подводит к тому, что понятия «вероятность» и «случайность» еще не предопределяют ответ на вопрос, как будут распределены флуктуации. Случайность и вероятность тесно связаны с понятием «хаос», которое само требует уточнения. В послесловии к статье [8] делается два вывода:

1. Гистограммы содержат новую информацию о характере случайного процесса, о которой раньше никто не задумывался.

2. Постулат измерения в квантовой механике, по меньшей мере, не полон. Действительно, когда мы говорим, что «α – распад происходит случайно, так, что вероятность ее застать и т.д.», необходимо уточнить какого характера эта случайность и какого типа «хаос» лежит в ее основе. Без этого уточнения мы теряем возможность предсказывать ряд наблюдаемых явлений.

Сами авторы статьи в ее заключении отмечают, что когда физики, химики, биологи при своих измерениях получают «разброс результатов», то они всевозможными способами борются с ними, считая это ошибкой. А именно берут в руки снова паяльники, отвертки, очищают реактивы и т.д., не сомневаясь при этом в «твердом знании основ науки». Однако в «разбросе результатов» следует искать тонкие закономерности и, к сожалению, методы статистической обработки результатов, основанные на центральных предельных теоремах, не приспособлены к анализу тонкой структуры распределения результатов. Авторы статьи не сомневаются во вполне случайном во времени характере процессов, например процесса радиоактивного распада и в подчинении его статистике Пуассона. Просто существующие критерии согласия гипотез в математической статистике не чувствительны к тонкой структуре распределений и просто ее не замечают. По-видимому, странный разброс результатов, о котором говорят авторы, связан не только со случайностью, но и с нечеткостью процесса, причем именно тонкая структура разброса связана с нечеткостью.

Как мы отмечали выше, нечеткая величина есть «измерительный прибор», и здесь с его помощью, хотим мы этого или нет, выявляется тонкая структура распределения результатов эксперимента. Попытаемся лучше осмыслить сказанное.

Рассматриваемые в статье [8] различные процессы разной природы являлись случайными (или стохастическими) процессами. Например, процесс радиоактивного распада – это одна из разновидностей стохастического процесса – Пуассоновский процесс [3]. Стохастический процесс – это функция двух аргументов: индекса времени t и элементарного события ω, т.е. $X_t(\omega)$. Если время t зафиксировано, то $X_\bullet(\omega)$ есть случайная величина. Если зафиксировано элементарное событие ω, то $X_t(\bullet)$ есть действительная функция на временной оси t. Аналогичное можно сказать и о нечетком процессе $X_t^*(\omega^*)$. Если t фиксировано, то $X_\bullet^*(\omega^*)$ – нечеткая величина, о которой уже было сказано выше. Если зафиксировано нечеткое элементарное событие ω^*, то $X_t^*(\bullet)$ есть действительная функция на оси t . Имея данные из вышеупомянутой статьи, можно сказать, что на гистограммах, откладываемые по ординате суммы числа интервалов времени соответствуют значениям действительных функций $X_t(\bullet)$ и $X_t^*(\bullet)$. Таким образом, результаты эксперимента связаны не только со случайностью процесса $X_t(\omega)$, но и с нечеткостью процесса $X_t^*(\omega^*)$ тоже.

Заключение

Отсюда следует различие между случайностью и нечеткостью процесса в том, что со случайностью связана вероятностная мера P, а с нечеткостью – мера возможности П и мера необходимости N. Поэтому в стохастических процессах имеет смысл рассматривать эти две новые меры – возможности и необходимости.

Во многих физических процессах, в том числе и стохастических, большое внимание уделяется вопросу устойчивости состояний. Математиками в этих задачах изучается функция Ляпунова [2]. Понятно, что для устойчивости состояний необходимы дополнительные ограничения, что может найти свое отражение в новой мере – в мере необходимости из ТНМ Л.Заде. Об этой мере было сказано выше, а именно $N(A)+N(B) < 1$.

В итоге нам хотелось бы представить таблицу, в которой были бы отражены некоторые понятия физики и математики, описываемые с помощью теории вероятностей и теории нечетких множеств Л. Заде.

Физика и математика	*Теория вероятностей и ТНМ Л. Заде*
Энтропия (S)	Мера неопределенности (g)
Случайная величина или событие X(ω)	Мера вероятности P
Случайная функция или стохастический процесс $X_t(\omega)$	Мера возможности П
Устойчивость состояния (функция Ляпунова)	Мера необходимости N
Элементарное событие ω	Индикатор *I* и функция принадлежности μ

Литература

1. Заде Л.А. Роль мягких вычислений и нечеткой логики в понимании, конструировании и развитии информационных интеллектуальных систем. // Новости искусственного интеллекта, №2-3, 2001, (44-45), с.7 - 15
2. Алиев М.И., Алиев И.М., Исаева Э.А. Флуктуации с точки зрения теории нечетких множеств Л.Заде. // Искусственный Интеллект и принятие решений, 2009, №2, с.70-75
3. Колмогоров А.Н. // Основные понятия теории вероятностей, М.: Наука, 1974
4. Крамер Г.// Математические методы статистики, М.: Мир, 1976
5. Дюбуа А., Прад А. Теория возможностей: // Приложения к представлению знаний в информатике, М.: Радио и связь, 1990, 290с.
6. Bellman R.E., Zadeh L.A.// Making in Fuzzy Environment, Management Science, 17, №.4, 1970, p.141-164
7. Тутубалин В.Н.// Теория вероятностей, М.: Изд. МГУ, 1972, 209с.
8. Шноль С.Е. и др. Флуктуации в макросистемах. // УФН, 1998,т.168, №10, с.1129-1140
9. Aliyev M.I., Isayeva E.A., Aliyev I.M. Random and fuzzy magnitudes as some kind of measuring devices. // Proceeding of ICAFS-2010 (Ninth International conference on Application of Fuzzy System and Soft Computing), Prague, Czech Republic, August 26-27, 2010, p.275-277.

Алиев Максуд Исфандиярович. Заведующий отделом Института физики Национальной академии наук Азербайджана (НАНА). Окончил Бакинский государственный университет в 1950 г. Академик НАНА, доктор физико-математических наук, профессор. Автор более 310 статей и одной монографии. Область научных интересов: физика полупроводников, теория нечетких множеств Л. Заде. E-mail: maksud@physics.ab.az

Исаева Эльмира Абдуллаевна. Ведущий научный сотрудник Института физики Национальной академии наук Азербайджана. Окончила Бакинский государственный университет в 1986 г. Кандидат физико-математических наук, доцент. Автор более 50 научных статей. Область научных интересов: физика полупроводников, теория нечетких множеств Л. Заде. E-mail: elmira@physics.ab.az

Алиев Исфандияр Максуд оглы. Ведущий научный сотрудник Института физики Национальной академии наук Азербайджана. Окончил Бакинский государственный университет в 1976 г. Доктор физико-математических наук, профессор. Автор более 110 научных статей. Область научных интересов: физика полупроводников, теория нечетких множеств Л. Заде. E-mail: isfanaliyev@gmail.com