

Алгебра Фурье-дуальных операций: логика с исключением¹

Аннотация. В развитие подхода к реализации нечетких логик на нейронных сетях со связями по схеме голографии Фурье, предложена модель логики с исключением, ассоциированным с основным правилом «Обобщенный Modus Ponens». Исключение вызывается из ассоциативной памяти заключением, сформированным основным правилом, и модифицирует первоначальное заключение. Приведены результаты численного моделирования, на основе экспериментальных данных.

Ключевые слова: немонотонные рассуждения, нечеткая логика, логика с исключением, Фурье-дуальность, нейронные сети, голография.

Введение

Важнейшая функция интеллекта – реализация рассуждений, понимаемых как построение последовательности аргументов, вынуждающих принятие некоторого утверждения [1]. Наибольший интерес с точки зрения создания интеллектуальных систем, действующих в сложных и изменяющихся условиях, характеризующихся неполнотой и недостоверностью информации, представляют немонотонные рассуждения, в которых значение заключения может изменяться при поступлении новой информации [1-7]. Один из практически значимых случаев немонотонных рассуждений – логика с исключением, которая может быть получена добавлением к правилу вывода «Modus Ponens» оператора исключения «если не ...» (unless) [2,7].

В настоящее время большинство работ по реализации немонотонных рассуждений выполнено в рамках символического подхода, основанного на использовании логико-алгебраического формализма. Вместе с тем, представляет интерес реализация немонотонных рассуждений и, в частности, логики с исключением, в рамках методов, интегрирующих сильные стороны символического и бионического (нейро-сетевого) подходов,

логической и образной форм мышления [8-10].

Имея в виду интеграцию логической и образной форм мышления, целесообразно определить рамки подхода на основе результатов нейрофизиологических исследований работы мозга [10,11]. Известно, что живыми системами информация из внешнего мира воспринимается сенсорами, затем преобразуется сенсорными трактами, соединяющими сенсоры с соответствующими областями коры головного мозга. Преобразованная сенсорными трактами информация возбуждает в коре головного мозга соответствующие картины распределения нейронных потенциалов или нейронной активности – паттерны внутренней репрезентации воспринимаемой информации (ПВР). Именно эти ПВР и обрабатываются биологической нейронной сетью – мозгом [11]. Исходя из этого, ограничим рамки задачи применением соответствующей логики, как формальной алгебраической модели, к обработке ПВР нейронной сетью, абстрагировавшись на данном этапе от модели преобразования информации в ПВР сенсорами и сенсорными трактами.

В работах [12-14] показано, что двухслойная нейронная сеть (НС) (Рис.1, а) с матрицей

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 09-01-00165-а и 09-02-00223-а).

связей нейронных слоев по схеме голографии Фурье (Рис.1 б), порождает алгебру нечетко-значимой логики. В этой алгебре операция преобразования Фурье задает Фурье-дуальность определяющих модель операций, определенных в классе треугольных норм. Фурье-дуальность порождает нечеткость как свойство модели. Модель свободна от ограничений на унимодальность операндов и, тем самым, описывает обработку сетью многомодальных распределений, в том числе, изображений как аналогов ПВР. На этой основе был сформулирован подход к интеграции логической и образной форм мышления [15], позволивший применить аппарат арифметики нечетких чисел [16] и концепцию логико-лингвистического моделирования Л.Заде [17] к обработке произвольных многомодальных распределений как аналогов ПВР, представляющих смысл значений лингвистических переменных (ЛП).

В развитие этого подхода, в работах [18, 19] был предложен и промоделирован подход к реализации на НС Рис.1 логики с исключением. Подход основан на использовании одного и того же оператора как для основного правила «Обобщенный Modus Ponens», так и для исключения, но при формировании для них (основного правила и исключения) инверсных друг относительно друга шкал. Формирование инверсных шкал обеспечивается на этапе обучения сети. Подход позволяет последовательно обучить сеть сначала основному правилу, а затем исключению, т.е. реализует принцип адаптивности в смысле дообучения сети в процессе функционирования. Однако метод допускает только одновременное предъявление паттернов, представляющих значения посылки (входных ЛП) как основного правила, так и исключения. Это ограничение несущественно в ряде практических применений, например, при выборе маршрута поездки согласно правилу:

«Кратчайший путь между двумя точками есть прямая, **если** на этом пути **нет** «пробок», поскольку информация о текущем значении исключения, т.е. о дорожной обстановке на выбранном маршруте, оперативно поступает от информационной системы в момент принятия решения. Соответственно, паттерны основного правила и исключения предъявляются одновременно.

Вместе с тем, интерес представляет реализация более сложной схемы рассуждений, в рамках которой на вход системы поступает только

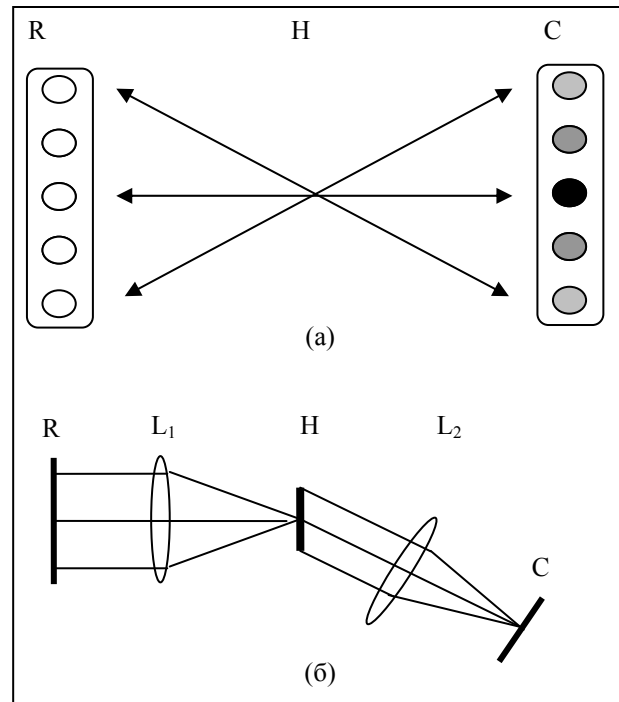


Рис. 1. Принципиальная схема двухслойной нейронной сети с матрицей двунаправленных связей (а) и ее реализация методом голографии Фурье (б)

R – слой репрезентаций, C – слой корреляций, матрица связей нейронных слоев реализуется каскадом двойного преобразования Фурье, включающим две Фурье-преобразующие линзы L_1 , L_2 и голограмму H

один паттерн, представляющий значения входной ЛП основного правила, а значение исключения вызывается из ассоциативной памяти уже заключением, сформированным в рамках основного правила, и, в свою очередь, модифицирует первоначальное заключение. Пример такой схемы рассуждений из повседневной жизни:

«Если яблоко большое, то оно хорошее, **если не** перекормлено нитратами».

В данном примере на вход поступает только информация, воспринимаемая и оцениваемая сенсорами – значения ЛП «размер». Информация об уровне нитратов при покупке яблок обычному покупателю не доступна – для получения такой информации яблоки нужно отправить в лабораторию. Однако текущее значение ЛП исключения может быть оценено косвенно, поскольку информация об опасности нитратов, почерпнутая из СМИ, хранится в памяти и ассоциирована именно с большими яблоками.

Соответственно, при оценке яблока как большого, информация об уровне нитратов ассоциативно извлекается из памяти и, в зависимости от актуальности исключения, модифицирует первоначальную оценку. В результате, если яблоко покупается для того, чтобы написать на тюрморт, оценка остается прежней, а если для того, чтобы съесть, то предпочтительным оказывается не большое яблоко, а не слишком большое – небольшой размер является косвенным признаком низкого уровня нитратов.

В настоящей статье, в развитие работ [12-15, 18, 19], предложен подход к реализации на нейронной сети со связями по схеме голографии Фурье, порождающей алгебру Фурье-дуальных определяющих операций, логики с исключением, в которой исключение вызывается из ассоциативной памяти заключением, сформированным основным правилом «Обобщенный Modus Ponens», и модифицирует первоначальное заключение.

1. Подход к задаче и модель

1.1. Подход к моделированию логики с исключением

Под термином логика в настоящей статье будем понимать алгебру логики как модель, включающую универсальное множество и повсюду на нем определенные операции. Монотонная логика высказываний (в классе нечеткозначимых логик) может быть представлена правилом вывода «Обобщенный Modus Ponens» как нечеткий вывод:

Условие: Если А есть Im_A , то В есть Im_B
 Посылка: А есть Im_A'
 Заключение: В есть Im_B' , (1)

где А и В – лингвистические переменные (ЛП), Im_A, Im_A', Im_B, Im_B' – нечеткие множества, представляющие смысл значения соответствующих лингвистических переменных [17].

Продукционное правило логики с исключением может быть получено посредством добавления к этому правилу оператора исключения «если ... не ...» («Unless»):

Условие: Если А есть Im_A' , то В есть Im_B ,
 если Е не есть Im_E , (2)

где Е и Im_E – исключение и смысл его значения, соответственно. Таким образом, задача реализации логики с исключением с точки зрения модели сводится к определению реализуемого выбранным методом формирования связей словес НС оператора «если не». Один из вариантов оператора исключения, предложенный в [20] и развитый в [7], может быть представлен в виде

$$Im_C = (Im_B' \wedge \neg(t Im_E)) \vee (t Im_E \wedge \neg Im_B'), (3)$$

где Im_C – нечеткое множество, представляющее смысл значения заключения, $\wedge$ и $\vee$ обозначают операторы конъюнкции и дизъюнкции, соответственно, $\neg$ – символ нечеткого дополнения, t – параметр актуальности исключения. Оператор (3) может быть реализован и на рассматриваемой модели НС Рис.1, однако он представляется малоинтересным в силу следующих факторов:

1. Операция нечеткого дополнения, используемая в (3), определена поточечно, то есть не учитывает такого важнейшего атрибута информации, отличающего её от шума, как внутренняя коррелированность. Алгебра Фурье-дуальных операций, напротив, учитывает этот атрибут [14].

2. Для каждого элемента модели в алгебре Фурье-дуальных операций может быть определено четыре элемента: отрицательный, дополнительный, противоположный и инверсный, последние два конструктивно определяются через преобразование Фурье. Соответственно, использование этих элементов расширяет возможности и повышает гибкость логики.

Поэтому представляет интерес поиск оператора исключения, специфичного для алгебры Фурье-дуальных операций и, соответственно, реализуемого в рамках модели НС со связями по схеме голографии Фурье. Это возможно в силу того, что как операция нечеткого дополнения $\neg$, использованная в (3), так и операция преобразования Фурье, удовлетворяют аксиоматическому определению операции, задающей дуальность определяющих модель операций.

1.2. Используемые определения и аппарат

Напомним вкратце основные положения рассматриваемого подхода.

Определение 1. Пусть X – универсальное множество, его элементы обозначим x . Обозначим через Im элементы модели, построенной

на универсальном множестве X , и определим множество элементов модели (множество всех подмножеств) $\mathcal{F}(X)$ следующим образом:

$$\mathcal{F}(X) = \{ \text{Im} | \text{Im} : X \rightarrow [0, 1] \}. \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что (4) формально совпадает как с определением нечеткого множества [21], так и с определением изображения или паттерна как зависимости нормированных амплитуд (уровней возбуждения нейронов) от пространственных координат [12]. В последнем случае область определения X как апертура (кадровое окно) имеет размерность 2 (плоскость). Для упрощения дальнейших выкладок примем допущение о разделимости переменных в функциях, описывающих ПВР, и будем рассматривать функции одной переменной $\text{Im}(x)$.

Определение 2. Определим алгебру как модель $\langle \mathcal{F}(X), D, \odot, \oplus, O, U \rangle$, где $\odot$ и $\oplus$ – определяющие модель операции произведения и сложения (абстрактные), D – операция, задающий дуальность определяющих операций $\odot$ и $\oplus$ в форме

$$\begin{aligned} \forall \text{Im}_a(x), \text{Im}_b(x) \in \mathcal{F}(X); \\ D(\text{Im}_a(x) \oplus \text{Im}_b(x)) = D(\text{Im}_a(x)) \odot D(\text{Im}_b(x)), \end{aligned} \quad (5)$$

O и U – специальные константы как наименьший и наибольший элементы $\mathcal{F}(X)$. Использование для обозначения O и U прописных букв означает, что мы не накладываем на эти элементы требования поэлементной определенности.

Определение 3. Следуя [21], определим коммутативную, ассоциативную и неубывающую бинарную операцию $V : [O, U]^2 \rightarrow [O, U]$ с нейтральным элементом $E(x)$, т.е

$$\begin{aligned} \forall \text{Im}(x) \in [O, U]; \\ V(\text{Im}(x), E(x)) = V(E(x), \text{Im}(x)) = \text{Im}(x) \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда, если $E(x) = U(x)$, V определим как абстрактное произведение ($V = \odot$); если $E(x) = O(x)$, V определим как абстрактное сложение ($V = \oplus$). Нетрудно видеть, что определенные таким образом операции суть t -норма и t -конорма, соответственно [22].

Определение 4. Определим D как унарную операцию $[O, U] \rightarrow [O, U]$, удовлетворяющую следующему набору аксиом, включая (5):

$$D(O) = U, D(U) = O \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \forall \text{Im}_a(x), \text{Im}_b(x) \in \mathcal{F}(X); \\ \text{Im}_a(x) \geq \text{Im}_b(x) \Rightarrow D(\text{Im}_a(x)) \leq D(\text{Im}_b(x)) \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь мы предполагаем, что на $\mathcal{F}(X)$ задано отношение порядка, но не конкретизируем его.

$$\forall \text{Im}(x) \in \mathcal{F}(X); D(D(\text{Im}(x))) = \text{Im}(x). \quad (9)$$

Определение 5. Используем классическое определение операции Фурье-преобразования F , связывающей функцию $\text{Im}(x)$, удовлетворяющую условиям Дирихле и абсолютно интегрируемую (x в данном контексте пространственная координата), с ее Фурье-образом $F(v)$:

$$F(\text{Im}(x)) = F(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im}(x) \exp(-j2\pi vx) dx, \quad (10)$$

где j – мнимая единица, v – координата в Фурье-пространстве (частота).

Нетрудно видеть, что в силу хорошо известных свойств Фурье-преобразования операция F удовлетворяет аксиоматическому определению операции, задающей дуальность определяющих модель операций. Граничные условия для преобразования Фурье имеют вид:

$$F(\delta(x)) = \text{Const}(v)$$

$$F(\text{Const}(x)) = \delta(v)$$

где $\delta(x)$ – δ -функция Дирака, определяемая следующим образом:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{при } x = 0 \\ 0 & \text{при } x \neq 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

Операция F удовлетворяет аксиоме (8) в случае нормальных унимодальных функций $A(x)$ и $B(x)$

$$\forall A(x), B(x) : X \rightarrow [0, 1]; \forall \alpha \in [0, 1];$$

$$A_\alpha(x) \geq B_\alpha(x) \Leftrightarrow |\text{Re}(F_\alpha(A(x)))| \leq |\text{Re}(F_\alpha(B(x)))|,$$

где нижний индекс α при операнде, например, A_α обозначает α -срез A . Если функции не уни-
модальные, то последнее условие имеет силу не
для распределений в целом, а для элементов
разрешения изображений и глобальных макси-
мумов автокорреляционных функций в форме
 $\forall \alpha \in [0, 1]$;

$$\begin{aligned} (\text{Im}_a(x) \otimes \text{Im}_a(x))_\alpha &\geq (\text{Im}_b(x) \otimes \text{Im}_b(x))_\alpha \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |\text{Re}(F_\alpha(\text{Im}_a(x)))| &\leq |\text{Re}(F_\alpha(\text{Im}_b(x)))|, \end{aligned}$$

где символ $\otimes$ обозначает операцию корреляции.

Аксиома инволютивности (9) удовлетворя-
ется при использовании пары прямого и обрат-
ного преобразований Фурье, отличающихся
лишь знаком под экспонентой. При двукратном
применении прямого преобразования Фурье
(10) имеет место инверсия координат
 $F(F(\text{Im}(x))) = \text{Im}(-x)$, учет которой экви-
валентен выполнению условия (9).

Таким образом, в алгебре Фурье-дуальных
определяющих операций в качестве минималь-
ного элемента $O(x)$ выступает δ -функция, а
максимального - $\text{Const}(x) = 1$.

Имея в виду оптическую реализацию, в ка-
честве операции произведения примем обычное
умножение $\odot = \cdot$. Тогда операцией абстрактно-
го сложения Фурье-дуальной умножению, бу-
дет операция свертки, реализуемая методом
двойного преобразования Фурье (Рис.1 б)

$$\begin{aligned} F((\text{Im}_a(x) \oplus \text{Im}_b(x))) &= \\ = F(\text{Im}_a(x)) F(\text{Im}_b(x)) &= F(\text{Im}_a(x) * \text{Im}_b(x)), \end{aligned} \quad (11)$$

где символ $*$ обозначает операцию свертки
двух функций

$$\text{Im}_a(x) * \text{Im}_b(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im}_a(x) \text{Im}_b(\Delta - x) dx.$$

Здесь, как и в дальнейшем изложении, в целях
упрощения выкладок мы пренебрегли инверси-
ей координат, возникающей вследствие дву-
кратного применения прямого преобразования
Фурье.

В контексте задачи конструктивного опре-
деления оператора исключения, важно, что для
любого элемента модели $\text{Im}(x)$ можно опреде-
лить четыре связанных с ним элемента: дуаль-
ный, дополнительный, инверсный и противо-

положный. С учетом метода реализации
нечетких логик [12-15], нас интересует проти-
воположный элемент Im° , определяемый сле-
дующим образом:

$$\text{Im}^\circ(x) = \text{Im}(-x) \quad (12)$$

Пользуясь свойством симметрии преобразо-
вания Фурье, получим конструктивное опреде-
ление противоположного элемента через пре-
образование Фурье, позволяющее реализовать
его в модели НС Рис.1:

$$F(\text{Im}(-x)) = F^*(\text{Im}(x)), \quad (13)$$

где астериск – символ комплексного сопряже-
ния. Отсюда, используя определение вычитания
 $\ominus$ как сложения с аддитивно противополож-
ным элементом [16], получим:

$$\begin{aligned} \text{Im}_a(x) \ominus \text{Im}_b(x) &= \text{Im}_a(x) \oplus \text{Im}_b^\circ(x) = \\ = F(F(\text{Im}_a(x)) F(\text{Im}_b^\circ(x))) &= \text{Im}_a(x) \otimes \text{Im}_b(x) \end{aligned} \quad (14)$$

т.е. операция корреляции $\otimes$ в алгебре Фурье-
дуальных операций является вычитанием.

Поскольку в статье модель рассматривается
в увязке с её физической реализацией, то в ряде
выкладок будем использовать актуальные при
описании физической схемы символы операций
свертки и корреляции $*$ и $\otimes$, дублируя их сим-
волами алгебраических операций сложения $\oplus$ и
вычитания $\ominus$, соответственно.

1.3. Модель логики с исключением и ее нейросетевая реализация. Обучение сети

Рассмотрим логику, реализуемую НС Рис.1.
Для наглядности используем простейший при-
мер: «Если яблоко большое, то оно хорошее,
если не перекормлено нитратами».

В примере используется всего две входных
ЛП – одна (ЛП «размер») для основного прави-
ла «Обобщенный Modus Ponens» и одна для ис-
ключения («уровень нитратов»). Число ЛП ог-
раничено только из соображений упрощения
дальнейших выкладок; количество ЛП может
быть больше.

Первый этап – обучение сети основному
правилу «Обобщенный Modus Ponens». Со-
гласно подхода [12-15], сеть обучается паттер-
нами - представляющим значение ЛП «размер
яблока», ассоциируемое с самой низкой оцен-

кой качества (минимальное значение ЛП «качество»). В нашем примере это паттерн, представляющий самое маленькое яблоко Im_{Small} и паттерн, представляющий минимальное значение ЛП «качество», Im_{Bad} . Последний паттерн, согласно [12-15] является минимальным элементом алгебры $Im_{Bad}(x) = O(x) = \delta(x)$. Матрица весов связей этих паттернов, формируемая методом голографии Фурье в точном соответствии с правилом Хэбба, реализуется каскадом двойного преобразования Фурье с голограммой H_{GMP} (Рис.1), описываемой выражением

$$H_{GMP} = F^*(Im_{Small})F(Im_{Bad}) = F^*(Im_{Small})F(\delta) = F^*(Im_{Small}). \quad (15)$$

Здесь, как и в дальнейших выкладках, мы в целях упрощения выражений пренебрегли влиянием нелинейного оператора регистрирующей среды. Учет этого оператора, позволяющего настроить логику «под пользователя» или «под задачу» [12-15], практически важен при моделировании, как компьютерном, так и физическом, но для простоты изложения модели в первом приближении можно принять его линейным.

Второй этап - обучение сети дополнительному правилу – исключению. Для этого сети предъявляется паттерн Im_{Big} (большое яблоко), представляющий значение ЛП «размер яблока», ассоциируемое с максимальным значение исключения, в нашем примере – с высоким уровнем содержания нитратов. Поскольку в рамках основного правила «Обобщенный Modus Ponens» это значение ЛП «размер» ассоциировалось с высокой оценкой качества, то в слое С формируется заключение - паттерн $Out_{GMPGood}$, представляющий значение ЛП «качество» - «хорошее»

$$Out_{GMPGood} = Im_{Big} \otimes Im_{Small} * \delta = Im_{Big} \ominus Im_{Small}. \quad (16)$$

В дальнейшем изложении паттерны, представляющие значения заключений, в том числе, промежуточных, будем обозначать Out с соответствующими нижними индексами.

Далее необходимо связать паттерн $Out_{GMPGood}$, представляющий значение заключения (16) с паттерном, представляющим ассоциированное с ним значение ЛП исключения Im_E . Требования к паттерну Im_E определим ниже, в разделе 1.5. Для репрезентации значений

входной ЛП исключения введем в модель НС третий нейронный слой Е. Для реализации инверсной зависимости влияния значений входных ЛП основного правила и исключения на формируемый вывод, свяжем слои С и Е преобразованием Фурье. Принципиальная схема сети приведена на Рис.2 а, на Рис.2 б – её оптическая реализация на этапе обучения сети исключению. В НС Рис.2 матрица связей H_E слоев С и Е описывается следующим образом:

$$H_E = F(Im_E)Out_{GMPGood}^* + F^*(Im_E)Out_{GMPGood}. \quad (17)$$

В (17) мы используем традиционную для оптики нотацию, два слагаемых присутствуют здесь в силу технологии записи голограмм, описание которой, малоинтересное читателям журнала, опустим. Отметим лишь, что соответствующие слагаемые при восстановлении голограммы распространяются (дифрагируют на голограмме) под разными углами, т.е. в разных направлениях (Рис.3) – первое слагаемое распространяется в +1 порядок дифракции, второе – в -1. Тем самым, восстановленные паттерны на некотором расстоянии за голограммой пространственно разделяются и могут быть использованы независимо, как по отдельности, так и в комбинации.

На этом этап обучения сети, состоящий, в свою очередь, из двух этапов – обучения основному правилу и дообучения исключению, завершен. Отметим, что в модели нет скрытых слоев – связи как слоев R и С, так и С с Е устанавливаются явно, в соответствии с правилом Хэбба, эталонные значения векторов, описывающих состояния всех трех слоев, известны на этапе обучения.

1.4. Модель логики с исключением и ее нейросетевая реализация. Работа сети

При предъявлении обученной сети в слое R паттерна, представляющего текущее входное значение ЛП «размер» Im_{Size} , в слое С формируется паттерн Out_{GMP} , представляющий значение ЛП «качество», полученное в рамках основного правила «Обобщенный Modus Ponens»:

$$Out_{GMP} = Im_{Size} \otimes Im_{Small} * \delta = Im_{Size} \ominus Im_{Small}. \quad (18)$$

Этот паттерн, проходя через матрицу связей слоев С и Е, т.е. голограмму (17), формирует

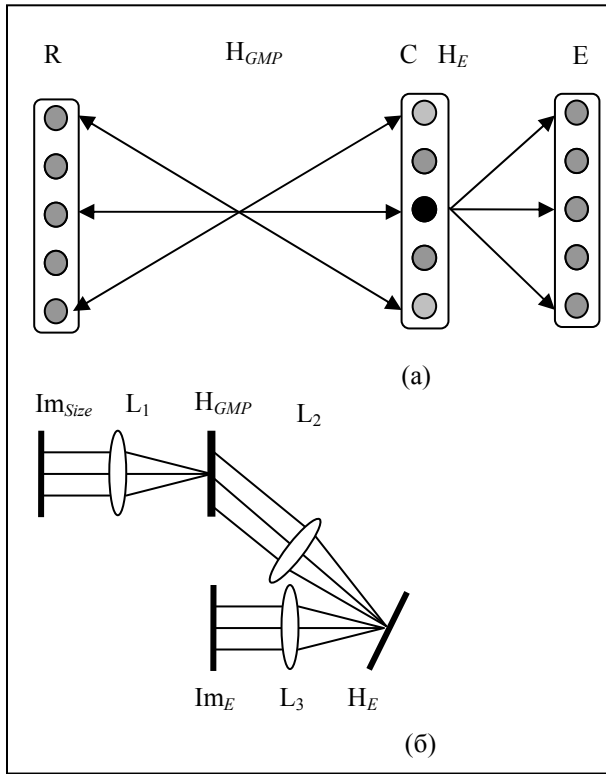


Рис. 2. Схема трехслойной нейронной сети на этапе обучения исключению (а) и ее реализация методом голографии Фурье (б)

R – слой репрезентаций, C – слой корреляций, в котором формируется паттерн заключения основного правила Out_{GMP} , E – слой исключений для репрезентации паттернов Im_E , матрица связей нейронных слоев C и E реализуется каскадом преобразования Фурье, включающим линзу L_3 и голограмму H_E , расположенную в слое C. Положение на Рис.2 б плоскости Im_E (слоя E) слева от голограммы H_E в то время, как на Рис.2 а он справа, обусловлено технологией записи голограммы и структуры связей не изменяет.

сразу за голограммой H_E распределение (порядки дифракции отмечены верхними индексами)

$$\begin{aligned} Out_{HE} &= Out_{HE}^{+1} + Out_{HE}^{-1} = \\ &= Out_{GMP} \left(F(Im_E) Out_{GMPGood}^* + F^*(Im_E) Out_{GMPGood} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрим два основных метода формирования и, соответственно, использования паттернов, представляющих заключение логики с исключением, которые и определяют итоговую модель НС:

1. Использование непосредственно паттернов (19). С этими паттернами удобно работать не непосредственно в плоскости голограммы H_E , а в плоскости Out_{HE} посредством добавле-

ния в оптическую схему проекционных оптических систем L_4 , L_5 . На Рис.3 отмечены две плоскости $Out_{HE} - Out_{HE}^{+1}$ и Out_{HE}^{-1} , где верхние индексы, обозначают порядки дифракции.

2. Использование паттернов, связанных с (19) преобразованием Фурье, которое реализуется линзой L_4 .

$$\begin{aligned} Out_{FE} &= Out_{FE}^{+1} + Out_{FE}^{-1} = \\ &= F \left(Out_{GMP} \left(F(Im_E) Out_{GMPGood}^* + F^*(Im_E) Out_{GMPGood} \right) \right) = \\ &= Im_E \oplus \left[F(Out_{GMP}) \ominus F(Out_{GMPGood}) \right] + \\ &\quad + \left[F(Out_{GMP}) \oplus F(Out_{GMPGood}) \right] \ominus Im_E \end{aligned} \quad (20)$$

Паттерны формируются в плоскости Out_{FE}^{+1} и Out_{FE}^{-1} , обозначенных на Рис.3 пунктиром, каждая в соответствующем порядке дифракции. Поскольку слой Out_{FE} связан со слоем Out_{GMP} преобразованием Фурье, то соответствующая ему шкала инверсна относительно шкалы в слое Out_{GMP} .

Уделим основное внимание второму варианту, ограничив дальнейшее рассмотрение паттерном Out_{FE}^{+1} , локализуемым в +1 порядке дифракции голограммы H_E (первое слагаемое в (20)); построение для Out_{FE}^{-1} при необходимости легко может быть проведено по аналогии.

Если на вход поступает максимальное значение входной ЛП $Im_{Size} = Im_{Big}$, то

$$\begin{aligned} Out_{FE}^{+1} &= Im_E \oplus \left[F(Out_{GMPGood}) \ominus F(Out_{GMPGood}) \right] = \\ &= Im_E \oplus O = Im_E. \end{aligned}$$

Если на вход поступает значение входной ЛП, меньшее значения «большое», например «среднее» или «маленькое», то

$$\begin{aligned} Out_{FE}^{+1} &= \\ &= Im_E \oplus \left[F(Out_{GMP}) \ominus F(Out_{GMPGood}) \right] > Im_E. \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, имеем инверсную зависимость значения Out_{FE}^{+1} от Im_{Size} – в рамках нашего примера максимальному размеру яблока соответствует минимальная оценка качества яблока, с уменьшением размера оценка возрастает.

Поскольку восстановленный паттерн Out_{FE}^{+1} должен быть подвергнут процедуре дефазификации, то естественным представляется требование на унимодальность Im_E .

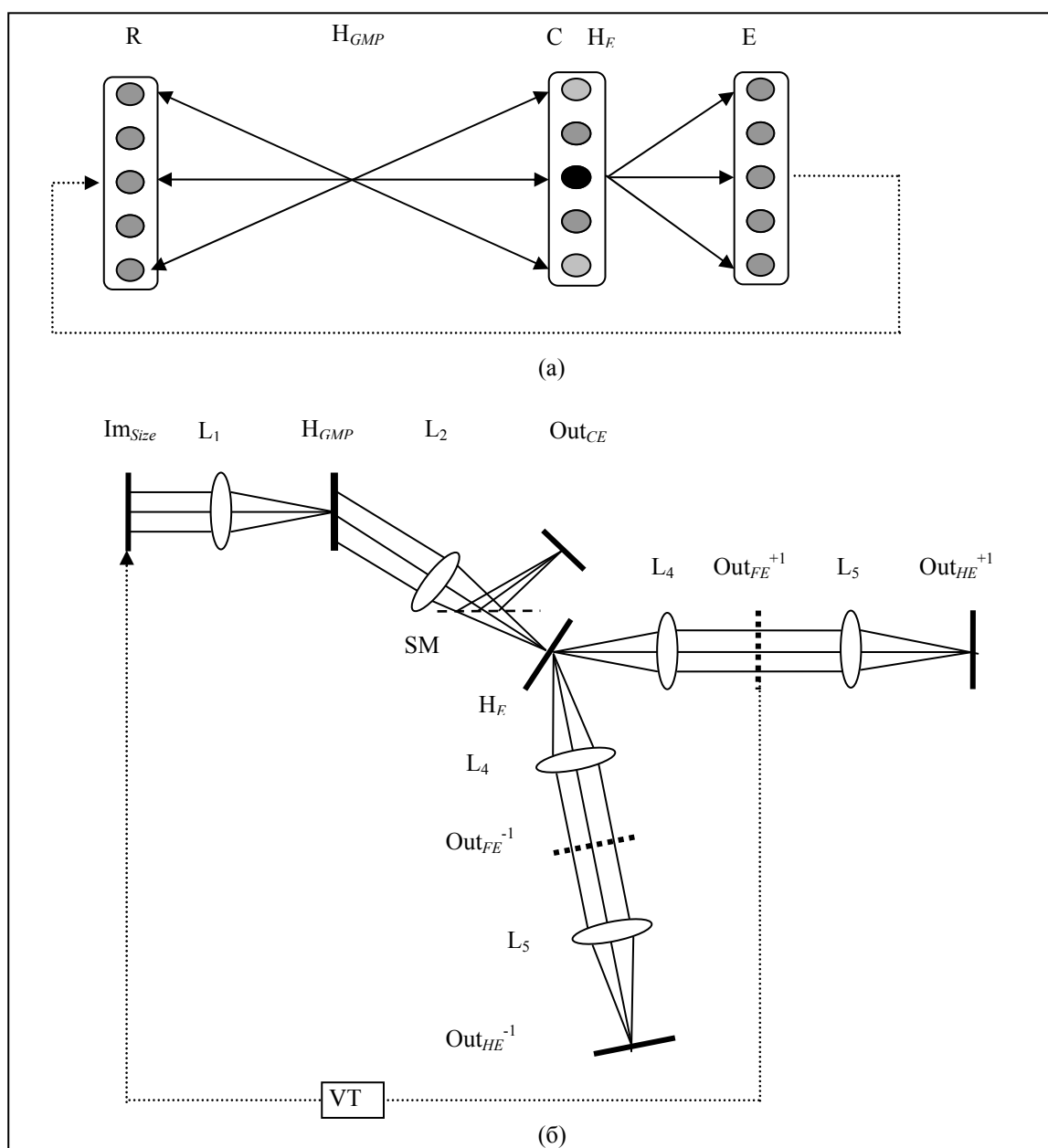


Рис. 3. Схема трехслойной нейронной сети со связями по схеме голографии Фурье на этапе формирования заключения (а) и ее оптическая реализация (б)

Im_{Size} – паттерн, представляющий входное значение ЛП «размер» в слое репрезентаций, H_{GMP} – голограмма, реализующая матрицу связей для основного правила, H_E голограмма в слое C, реализующая матрицу связей слоев исключения E и заключения основного правила Out_{GMP} , Out_{HE} – паттерны, описываемые выражением (19), Out_{FE} – паттерны, описываемые выражением (20), верхние индексы соответствуют +1 и -1 порядкам дифракции, VT – видеотракт, подающий выход слоя E на вход слоя R, SM – полупрозрачное зеркало, формирующее оптическую плоскость локализации паттерна заключения Out_{CE} .

Приведенная схема позволяет реализовать как основное правило вывода, так и логику с исключением независимо. Для этого в оптической схеме Рис.3 полупрозрачным зеркалом формируется дополнительный канал вывода паттерна Out_{GMP} . Сам паттерн Out_{GMP} , представ-

ляющий заключение монотонной логики, от паттерна Out_{FE}^{+1} , полученного в рамках немонотонной логики, не зависит. Оба паттерна могут использоваться как независимо, так и агрегироваться различными методами в тракте их последующей обработки, который в модель собствен-

но НС не входит. Однако представляет интерес поиск возможности реализации именно НС модели, в которой первоначальное заключение, полученное в рамках монотонной логики, модифицируется заключением, полученным при вызове из ассоциативной памяти исключения.

1.5. Модель логики с исключением и ее нейросетевая реализация. Модификация первоначального заключения

Для решения поставленной задачи определим паттерн, представляющий максимальное значение исключения, как элемент множества паттернов, представляющих значения ЛП «размер»:

$$\text{Im}_E \in \{\text{Im}_{Size}\}. \quad (22)$$

Тогда выражение для Out_{FE}^{+1} примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{Out}_{FE}^{+1} &= F(\text{Out}_{GMP}(F(\text{Im}_E)\text{Out}_{GMPGood}^*)) = \\ &= \text{Im}_E \oplus [F(\text{Out}_{GMP}) \ominus F(\text{Out}_{GMPGood})]. \end{aligned}$$

Подадим этот паттерн в слой R. Связь выхода слоя Out_{FE}^{+1} со слоем R может быть реализована в случае оптической реализации НС Рис.3, например, видеотрактом VT. Тогда паттерн Out_{CE} , формируемый в слое C, будет описываться следующим образом

$$\begin{aligned} \text{Out}_{CE} &= \text{Out}_{FE}^{+1} \otimes \text{Im}_{Small} = \\ &= \text{Im}_E * [F(\text{Out}_{GMP}) \otimes F(\text{Out}_{GMPGood})] \otimes \text{Im}_{Small} = \\ &= (\text{Im}_E \ominus \text{Im}_{Small}) \oplus [F(\text{Out}_{GMP}) \ominus F(\text{ImOut}_{GMPGood})] \end{aligned} \quad (23)$$

Если выполнено условие (22), то Out_{CE} будет унимодальным распределением и, следовательно, пригоден для использования в качестве логического заключения. По условиям задачи реализации немонотонной логики, паттерн Out_{CE} должен представлять модифицированное исключением первоначальное заключение. В рамках приведенного примера оценка большого яблока как хорошего, первоначально полученная в рамках основного правила «Обобщенный Modus Ponens», должна быть заменена на более низкую оценку. В идеале должно выполняться условие:

$$\text{Im}_{Size} = \text{Im}_{Big} \Rightarrow \text{Out}_{CE} < \text{Out}_{GMPGood}.$$

Выполнимость этого условия определяется как паттерном Im_E , который должен быть использован при обучении НС исключению, так и

членом в квадратных скобках в (23). Отсюда общее требование к паттерну Im_E :

$$\text{Im}_E < \text{Im}_{Big}$$

Если наложить более жесткое ограничение

$$\text{Im}_{Size} = \text{Im}_{Big} \Rightarrow \text{Out}_{CE} = O_{CE}$$

где O_{CE} - минимальный элемент множества элементов модели $\{\text{Out}_{CE}\}$, то получим

$$\text{Im}_E = \text{Im}_{Small}.$$

Выбор паттерна исключения из диапазона $\text{Im}_E < \text{Im}_{Small}$

хотя и возможен, но должен производиться с осторожностью, так как этот вариант сопряжен с рядом проблем – как технических, так и принципиальных. В первую очередь здесь следует упомянуть опасность разрушения внутренней коррелированности паттерна и, как следствие, падения величины отношения сигнал-шум с превращением, в пределе, информации в шум [23-24].

Выражение в квадратных скобках в (23) от Im_E не зависит, но может быть параметризовано условиями записи голограмм H_{GMP} и H_E . Детально этот вопрос, касающийся технологии записи голограмм, в данной статье не обсуждается.

1.6. Численное моделирование логики с исключением

Моделировался ранее приведенный условный пример логики с исключением, реализуемый на НС Рис.3 Экспозиционные характеристики реальных голографических сред, используемых для записи матриц весов связей нейронных слоев, предполагались линейными. В качестве паттерна Im_E взят паттерн $\text{Im}_E = \text{Im}_{Small}$. Дефаззификация заключения, в соответствии с моделью [14,15], проводилась измерением ширины унимодального отклика Out_{CE} по заданному уровню (α -срез).

На Рис.4 и Рис.5 приведены градуировочные кривые для различных уровней α -среза Out_{GMP} (сплошные линии) связывающие значения ЛП «размер» со значениями ЛП «качество» в рамках основного правила вывода «Обобщенный Modus Ponens», т.е. описывающие монотонную логику. Там же приведены соответствующие семейства градуировочных кривых для немонотонной логики Out_{CE} , различающихся условиями записи голограммы H_E . По осям Y приведены как значения ЛП «качество», так и

соответствующим им для каждого уровня среза абсолютные значения величин α -срезов Out_{GMP} . Характеристики паттерна Im_{Small} для обеих групп зависимостей (рисунков) одинаковы – экспоненциальный спектр с показателем степени аргумента 1.2, различия между Рис.4 и Рис.5 обусловлены разными последовательностями

$\{Im_{Size}\}$, которые порождались применением к амплитудному спектру $F(Im_{Small})$ функции размытия (уширения спектра) Гаусса. В первом случае (Рис.4) полуширины амплитудных спектров по уровню 0.606 составляли $\{26, 30, 25, 22\}$, где первый элемент соответствует $F_{0.606}(Im_{Small})$, во втором (Рис.5) – $\{26, 38, 30, 29.5\}$.

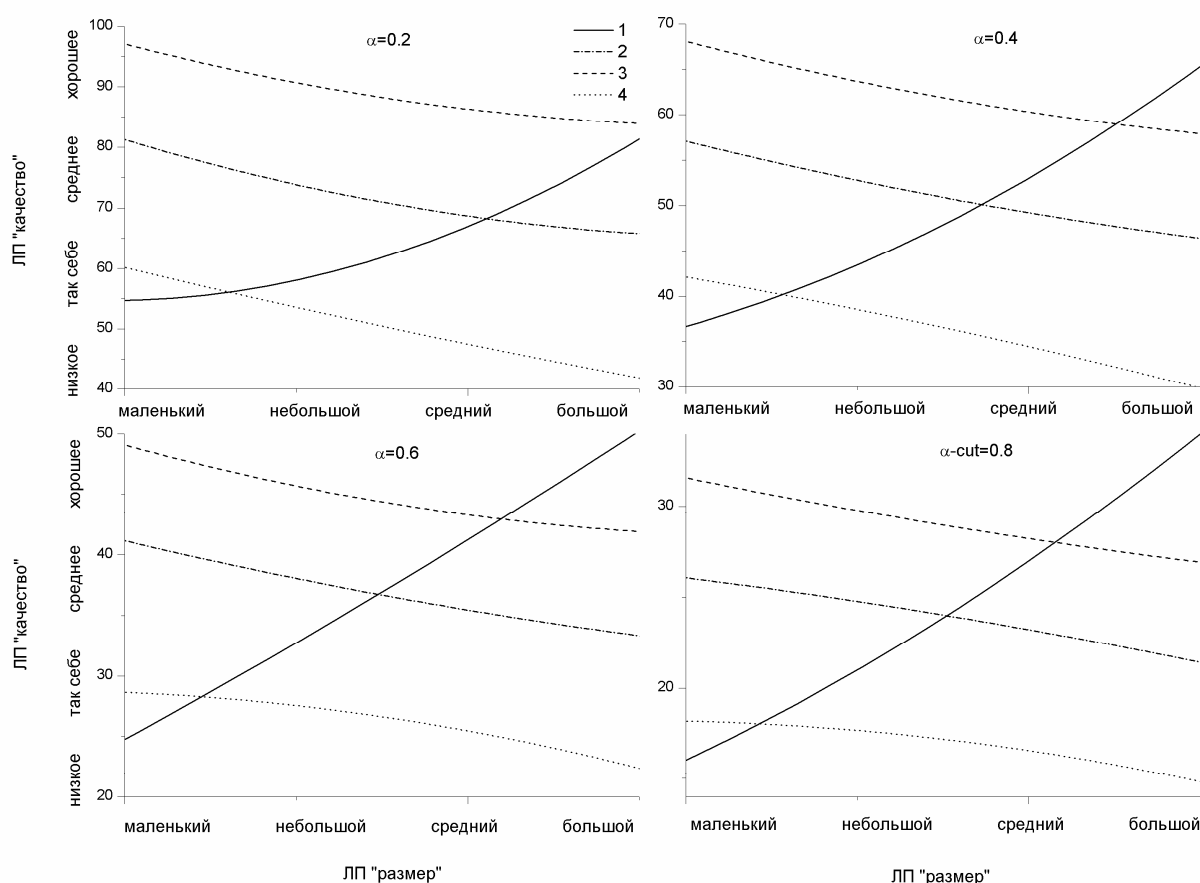


Рис.4. Градуировочные кривые для различных уровней среза, связывающие значения входной лингвистической переменной «размер» со значениями лингвистической переменной «качество» для различных уровней α -среза

1 (сплошные кривые) – монотонная логика («Обобщенный Modus Ponens»),

2 (штрих) – немонотонная логика, матрица связей $H_E = F(Im_E) Out_{GMPGood}^*$,

3 (штрих-пунктир) – немонотонная логика, матрица связей $H_E = \frac{F(Im_E) Out_{GMPGood}^*}{|F(Im_E)|}$

(запись голограммы с «разбелением» спектра исключения),

4 (пунктир) – немонотонная логика, матрица связей $H_E = \frac{F(Im_E) Out_{GMPGood}^*}{|F(Im_E)| |Out_{GMPGood}|}$

(запись голограммы с «разбелением» как спектра исключения, так и заключения $Out_{GMPGood}$).

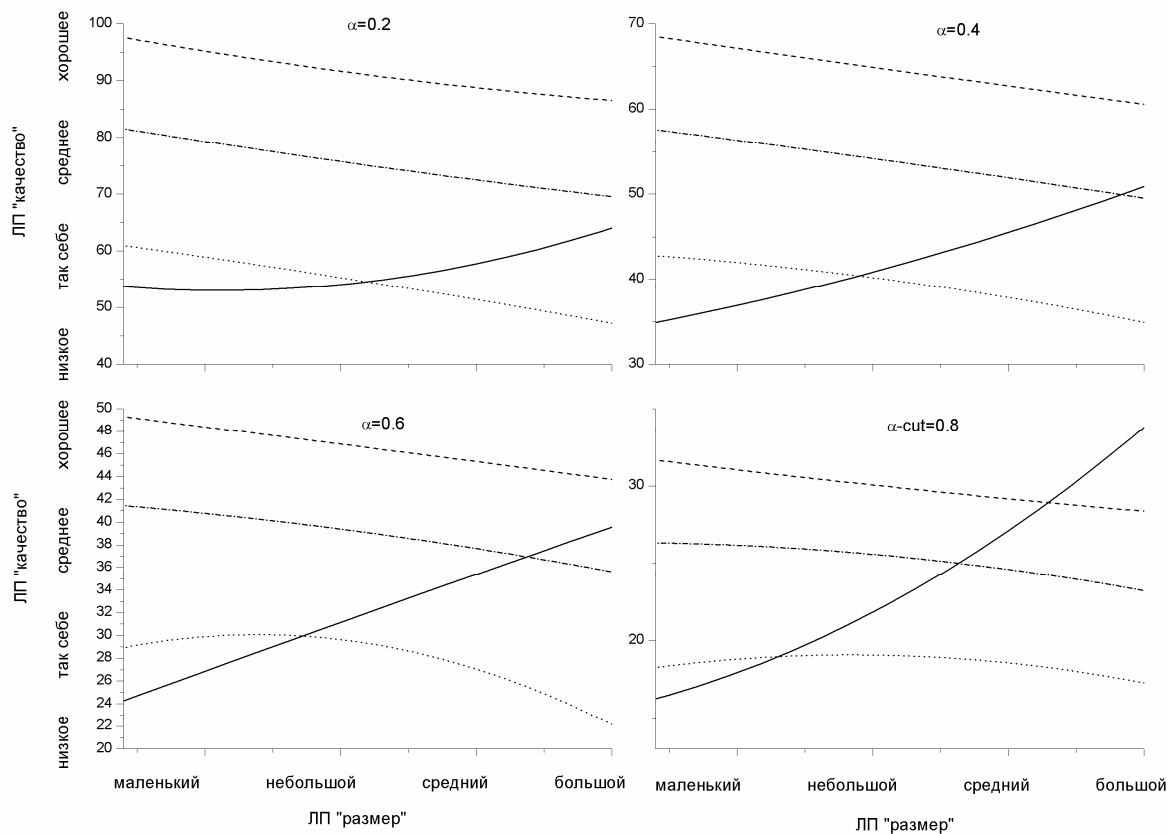


Рис.5. Градуировочные кривые для различных уровней среза, связывающие значения входной лингвистической переменной «размер» со значениями лингвистической переменной «качество» для различных уровней α -среза

- 1 (сплошные кривые) – монотонная логика («Обобщенный Modus Ponens»),
- 2 (штрих) – немонотонная логика, матрица связей $H_E = F(\text{Im}_E) \text{Out}_{\text{GMPGood}}^*$,
- 3 (штрих-пунктир) – немонотонная логика, матрица связей $H_E = \frac{F(\text{Im}_E) \text{Out}_{\text{GMPGood}}^*}{|F(\text{Im}_E)|}$
(запись голограммы с «разбеливанием» спектра исключения),
- 4 (пунктир) – немонотонная логика, матрица связей $H_E = \frac{F(\text{Im}_E) \text{Out}_{\text{GMPGood}}^*}{|F(\text{Im}_E)| |\text{Out}_{\text{GMPGood}}|}$
(запись голограммы с «разбеливанием» как спектра исключения, так и заключения $\text{Out}_{\text{GMPGood}}$).

Из Рис.4 видно, что во всех случаях описанная модель формирует инверсную зависимость значения заключения от значения входной ЛП «размер» - чем меньше яблоко, тем выше оценка его качества. При этом модификация первоначального заключения исключением зависит как от метода записи матрицы весов связей исключения (голограммы H_E), так и от уровня α -среза, что дает инструменты настройки реализуемой логики.

Для уровня среза $\alpha=0.2$ в случае записи голограммы H_E согласно (17) в результате учета

исключения возрастает оценка также и «большого яблока», т.е. формируется новая шкала. Соответственно, необходим контроль того, в рамках какой логики (монотонной или с исключением) формируется заключение и использование в каждом случае своей шкалы.

В остальных случаях градуировочные кривые, описывающие монотонную логику и логику с исключением, пересекаются. Справа от точки пересечения кривых учет исключения ведет к снижению первоначальной оценки, слева – к повышению. При этом почти для всех

логик с исключением (соответствующих кривых) максимальное значение ЛП «качество» ниже, чем оно же для монотонной логики. В рамках нашего примера учет информации об опасности нитратов ведет к тому, что оценка маленького яблока оказывается выше, чем большого, но все равно ниже, чем первоначальная оценка большого – предпочтение маленького яблока оказывается вынужденным.

Если значения ЛП «размер» представлены другой последовательностью $\{Im_{Size}\}$ (Рис.5), то, также в зависимости от уровня среза, модифицированная исключением оценка может оказаться выше первоначальной оценки большого яблока как самого хорошего. Например, для уровней среза $\alpha=0.4$ и $\alpha=0.6$ матрицы связей исключения, записанные по правилу

$$H_E = \frac{F(Im_E)Out_{GMPGood}^*}{|F(Im_E)|},$$

обеспечивают снижение первоначальной оценки для «большого» яблока, а оценки «маленького» и «небольшого» оказываются выше первоначальной оценки «большого». В этих случаях введение новой шкалы не требуется. Таким образом, метод порождения последовательности $\{Im_{Size}\}$, в совокупности с методами записи матриц связей, также дает инструмент настройки логики.

На Рис.5 обращают на себя внимание кривые 4 для значений $\alpha=0.6$ и $\alpha=0.8$, представляющие вариант логики компромисса, в рамках которой происходит не просто инвертирование шкалы, а поиск компромисса, в результате которого наилучшим оценивается некоторое среднее значение входной ЛП.

Нетрудно видеть, что поскольку как первоначальное заключение в рамках монотонной логики $Out_{GMPSize}$, так и заключение в рамках немонотонной логики Out_{NM} формируются в одном слое (Рис.3), то возможны различные варианты их агрегации, обсуждение которых выходит за рамки данной статьи.

Заключение

Таким образом, операция преобразования Фурье, задающая дуальность определяющих модель операций, может быть использована для построения оператора исключения и, тем самым, логики с исключением как частного слу-

чая немонотонной логики. В силу того, что алгебра Фурье-дуальных операций является алгеброй нечетко-значимой логики, и логика с исключением также принадлежит к классу нечетко-значимых логик. Использование вычитания (абстрактного) в качестве основной операции позволяет снять ограничения на представление смысла значений лингвистических переменных унимодальными множествами и применить данную логику к обработке произвольных многомодальных распределений, в том числе, аналогов паттернов внутренней репрезентации информации – картин нейронной активности коры мозга.

В силу того, что Фурье-образ действительной функции почти всегда функция комплексная, а единственной на сегодня технологией записи и восстановления комплексных полей, удовлетворяющей критерию неформализуемой обработки (model-free method), является голография, Фурье-дуальность операций определяет необходимость голографической технологии реализации алгебры. Поэтому для реализации логики с исключением предложена модель трехслойной нейронной сети со связями между слоями по схеме голографии Фурье. Данная модель нейронной сети дает ряд инструментов настройки логики, методом численного моделирования показаны возможности настройки логики за счет выбора метода порождения последовательности элементов модели, метода записи матрицы связей (голограммы) исключения и выбора уровня α -среза. Как было показано О.П. Кузнецовым с соавторами [26], равно как и в наших предыдущих работах [14, 15], условия записи голограмм H_{GMP} и H_E , с учетом нелинейности экспозиционных характеристик реальных регистрирующих сред, параметризуют реализуемую модель. Тем самым, выбор условий записи голограмм дает дополнительные инструменты настройки реализуемой логики «под пользователя» или «под задачу».

Автор считает приятным долгом выразить благодарность проф. О.П. Кузнецову и проф. И.Б. Фоминых за обсуждения и критические замечания, способствовавшие формированию развиваемого подхода, а также А.М. Алексееву за критическое обсуждение представленной модели.

Литература

1. Вагин В.Н., Головина Е.Ю., Загорянская А.А., Фомина М.В. Достоверный и правдоподобный вывод в интеллектуальных системах, второе изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
2. R. Reiter. A logic for default reasoning. // *Artificial Intelligence*, V. 13 (1-2), 81-132. (April 1980).
3. Antoniou G., *Nonmonotonic reasoning*, MIT Press, Cambridge, MA. (1997).
4. Benferhat S., Dubois D., and Prade H., "Nonmonotonic reasoning, conditional objects and possibility theory", *Artificial Intelligence*, 92(1-2), 259-276 (1997).
5. Lukasiewicz, T., "Weak nonmonotonic probabilistic logics" *Artificial Intelligence*, V.168 (1-2), 119-161 (2005).
6. Виньков М. М., Фоминых И.Б., Немонотонные рассуждения в динамических интеллектуальных системах, // *Новости Искусственного Интеллекта*, 2005, №4, с.12-23.
7. Астанин С.В., Калашникова Т.Г., Модель немонотонных рассуждений на основе нечеткой логики // *Известия ТРТУ. Интеллектуальные САПР "Материалы Международной НТК "Интеллектуальные САПР". - Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000, № 2. - С. 81-84.*
8. Голицын Г.А., Фоминых И.Б. Нейронные сети и экспертные системы: перспективы интеграции// *Новости искусственного интеллекта*. — М.: АИИ, 1996, №4. С.121-145.
9. Фоминых И.Б., Интегрированные модели и технологии решения творческих задач.// *Труды VI Международной конференции «Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте»*, Коломна, 16-19 мая 2011, т.1, с.149-157.
10. Кузнецов О.П. Быстрые процессы мозга и обработка образов.// *Новости искусственного интеллекта*. 1998, №2.
11. Борисюк Г.Н., Борисюк Р.М., Казанович Я.Б., Иваницкий Г.Р., «Модели динамики нейронной активности при обработке информации мозгом – итоги «десятилетия» // *Успехи Физических наук*, 2002, т.172, №10, с.1189-1214.
12. Павлов А.В., Математические модели оптических методов обработки информации // *Известия Академии Наук. Теория и системы управления*, 2000, 3, с.111-118.
13. Павлов А.В., Реализация логико-лингвистических моделей методом Фурье-голографии.// *Известия Академии Наук. Теория и системы управления*, 2003, 2, с.118-125.
14. А.В.Павлов, Об алгебраических основаниях голографической парадигмы в искусственном интеллекте: алгебра Фурье-дуальных операторов, V-я Международная научно-практическая конференция «Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте» (28-30 мая 2009 г., Коломна) *Труды конференции*.Т.1, с.140-148. М.Физматлит.2009
15. Павлов А.В., Подход к интеграции логического и образного мышления методом Фурье-голографии // *Новости Искусственного Интеллекта*, 2006, №4.
16. Dubois D., Prade H. Fuzzy numbers: an overview, in: Ed. by Bezdek J.C., *Analysis of Fuzzy Information*, Boca Raton, FL. 1987. v.1.
17. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений // *Математика. Новое в зарубежной науке*. Вып.3. 1976.
18. А.В.Павлов, А.М.Алексеев, «Реализация нечеткой логики с исключениями методом Фурье-голографии», Международные научно-технические конференции IEEE AIS'07 CAD-2007, 3-10 сентября 2007, Дивногорское, Россия. *Труды Конференций*, Т.2., с. 155-160, М.Физматлит.
19. Алексеев А.М., Павлов А.В. Реализация нечеткой логики с исключениями методом Фурье-голографии // *Оптический журнал*, 2008, Том 75, №4, с.41-46.
20. M.Shansi, K.Raju, and P.S.Avadhani. Reasoning with Fuzzy Censors // *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.* – 1994. – V.24, #7. – pp.1061-1064.
21. Radko Mesiar, Endre Pap, Different interpretations of triangular norms and related operations. // *Fuzzy Sets and Systems*. – 1998.- V.96, pp.183-189/
22. Новак В., Перфильева И., Мочкорж И., Математические принципы нечеткой логики. М. Физматлит. 2006.352с.
23. Кулешов А.М., Шубников Е.И., Смаева С.А., Об оптимальности голографического согласованного фильтра.// *Оптика и спектроскопия*, 1986, Т.60, №6, с.1273-1276.
24. Александрова С.А., Кулешов А.М., Влияние режекции низких пространственных частот спектра на параметры сигнала в голографическом корреляторе // *Оптика и спектроскопия*, 1990, Т.68, №3, с.652-655.
25. А.М.Алексеев, А.В.Павлов, Об аппроксимации передаточной функции 4f схемы голографии Фурье при реализации нечетко-значимых логик. // *Оптика и спектроскопия*. 2009, т.107, № 6, с.1038-1043.
26. Кузнецов О.П., Марковский А.В., Шипилина Л.Б. Голографические механизмы обработки образной информации. – М.: Ин-т проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, 2007. 82 С.

Павлов Александр Владимирович. Доцент Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. Окончил Ленинградский институт точной механики и оптики в 1980 году. Кандидат технических наук, с.н.с. Автор 100 печатных работ. Область научных интересов: искусственный интеллект, оптика, голография, оптические информационные технологии. E-mail: Pavlov@phoi.ifmo.ru