

Алгоритм сужения множества Парето на основе произвольного конечного набора «квантов» информации¹

Аннотация. В данной работе в рамках аксиоматического подхода, развиваемого автором на протяжении трех последних десятилетий, предполагаются выполненными четыре аксиомы «разумного» выбора, которые очерчивают достаточно широкий класс задач многокритериального выбора. Для сужения множества Парето используется числовая информация об отношении предпочтения ЛПР. Предлагается метод сужения множества Парето, использующий произвольный непротиворечивый конечный набор указанной информации. Метод основан на алгоритме, который генерирует минимальный по числу новый набор критериев, относительного которого новое множество Парето даёт искомое сужение исходного множества Парето.

Ключевые слова: многокритериальный выбор, множество Парето, сужение множества Парето.

Введение

Многие прикладные задачи экономического и технического характера могут быть сформулированы в виде задачи многокритериального выбора с несколькими числовыми функциями. Специфика многокритериальных задач заключается в том, что лицо, принимающее решение (ЛПР), приступая к выбору, как правило, не в состоянии четко выразить свои интересы и предпочтения, на основе которых следует сделать этот выбор. Тем самым, ЛПР, начиная поиск множества (в частном случае – одноэлементного) «наилучших» элементов, не располагает точным определением этого понятия. Чаще всего эти «наилучшие» элементы выявляются в ходе процесса принятия решения на основе имеющейся информации о предпочтениях ЛПР.

Предложено много процедур и методов решения многокритериальных задач в зависимости от типа и характера информации о предпочтениях ЛПР [3, 9]. Эти процедуры чаще всего носят эвристический характер и нередко приводят к принципиально различным «наи-

лучшим» решениям. По мнению подавляющего большинства исследователей «наилучшие» решения следует искать в множестве парето-оптимальных (эффективных, компромиссных) вариантов. Это обстоятельство нашло свое выражение в принципе Эджворта-Парето, сравнительно недавно получившем аксиоматическое обоснование [4]. Тем самым, проблема выбора множества «наилучших» вариантов может быть переформулирована как проблема сужения множества Парето.

Сузить множество Парето (т.е. удалить из рассмотрения некоторые парето-оптимальные элементы), можно только при наличии дополнительной информации о предпочтениях ЛПР. Наиболее надежными и простыми с точки зрения их получения являются сведения о готовности ЛПР идти на определенный компромисс. Этот компромисс нередко заключается в том, что ЛПР соглашается понести некоторые потери по каким-то непринципиальным критериям ради получения определенной выгоды по критериям, которые имеют приоритетное значение для данного ЛПР.

¹ Работа поддержана РФФИ (проект № 11-07-00449а).

Учет подобной информации об отношении предпочтения ЛПП, которое обычно изначально полностью неизвестно самому ЛПП, положено в основу аксиоматического подхода к решению проблемы сужения множества Парето, развиваемого автором почти три последних десятилетия [4]. Сначала было установлено, каким образом следует использовать одно сообщение (один «квант» информации) в виде двух наборов чисел, один из которых указывает верхние допустимые пределы потерь для ЛПП по группе мало значимых критериев, а второй – величины выигрышей для принципиально важных критериев, меньшие или равные которым ЛПП желало бы получить, идя на компромисс. В последующем были исследованы возможности использования тех или иных наборов такого рода сообщений (нескольких «квантов» информации) для сужения множества Парето [1, 2, 5, 6], но задача учёта произвольного набора «квантов» оставалась нерешённой.

Ниже предлагается метод сужения множества Парето, который использует произвольный конечный набор непротиворечивых «квантов» информации. Этот метод впервые был анонсирован в [7], а данная работа представляет её развёрнутый вариант, содержащий подробное обоснование. Предлагаемый метод опирается на алгоритм, который в идейном отношении оказался близким к алгоритму построения двойственного конуса, изложенному в [11].

1. Основные определения

Рассмотрим модель многокритериального выбора [4], которая содержит множество исходных вариантов X , числовой векторный критерий $y = f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ и асимметричное бинарное отношение предпочтения $\succ_X$, заданное на множестве X . На практике множество X и векторный критерий f обычно известны, тогда как об отношении предпочтения $\succ_X$ если и есть какая-то информация, то она носит лишь частичный, фрагментарный характер.

Пусть $Y = f(X)$, а $\succ_Y$ есть бинарное отношение, заданное на множестве Y и индуцированное отношением $\succ_X$ следующим образом:

$x_1 \succ_X x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \succ_Y f(x_2)$ для всех $x_1 \in \tilde{x}_1, x_2 \in \tilde{x}_2; \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{X}$, где $\tilde{X}$ – совокуп-

ность классов эквивалентности, порожденных отношением эквивалентности $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ на множестве X .

Множества выбираемых («наилучших») вариантов и векторов обозначим $C(X)$ и $C(Y) = f(C(X))$ соответственно. Это те множества, которые подлежат нахождению в процессе выбора. Множество парето-оптимальных вариантов относительно векторного критерия f на множестве X далее обозначается $P_f(X)$.

На протяжении всей статьи считаются принятыми четыре аксиомы «разумного» выбора, сформулированные в [4]. В этих аксиомах зафиксированы те требования к отношению предпочтения ЛПП, которые предполагаются выполненными. Эти требования необременительны, и задают довольно широкий класс бинарных отношений, которые в целом характеризуют поведение ЛПП в процессе принятия решений как «разумное». В одной из указанных аксиом вводится транзитивное продолжение $\succ_Y$ отношения предпочтения $\succ_Y$ на всё пространство R^m , которое на Y совпадает с $\succ_Y$.

Определение. Пусть $A, B \subset I$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$. Будем говорить, что задан «квант» информации об отношении предпочтения с группами A и B и двумя наборами положительных параметров w_i^* для всех $i \in A$ и w_j^* для всех $j \in B$, если для любой пары векторов $y', y'' \in R^m$, для которых верно

$$y'_i - y''_i = w_i^* > 0 \text{ для всех } i \in A$$

$$y''_j - y'_j = w_j^* > 0 \text{ для всех } j \in B$$

$$y'_s = y''_s \text{ для всех } s \in I \setminus (A \cup B)$$

имеет место соотношение $y' \succ y''$.

На геометрическом языке в условиях выполнения упомянутых аксиом наличие «кванта» информации об отношении предпочтения ЛПП означает [4] выполнение соотношения $y' - y'' = u \succ_Y 0$ при некотором $u \in N^m$, где N^m – множество m -мерных векторов, имеющих по крайней мере одну строго положительную и одну строго отрицательную компоненты. Отрицательные величины (взятые по абсолютной величине) характеризуют максимальные пределы уступок, на которые готово пойти ЛПП

по соответствующим этим величинам критериям, что получить выигрыш (прибавки) не менее величин, равным положительным компонентам вектора u по соответствующим им критериям. В целом наличие указанного «кванта» информации свидетельствует о готовности ЛПР идти на определённый компромисс. Чем больше абсолютные величины отрицательных компонент и чем меньше положительные компоненты, тем более гибко ЛПР ведёт себя в процессе принятия решений; в таком случае оно может рассчитывать на более высокую степень сужения множества Парето. На практике подобного рода «квант» информации обычно выявляется в результате прямого опроса ЛПР.

При решении прикладных задач нередко удаётся извлечь целый набор подобных «квантов» информации. Задание набора «квантов» информации равносильно выполнению соотношений $u^i \succ_y 0$, $i = 1, \dots, k$. Автором ранее были получены необходимые и достаточные условия непротиворечивости произвольного подобного набора [4]. В соответствии с одним из этих условий проверка непротиворечивости сводится к решению в неотрицательных числах определённой однородной системы линейных алгебраических уравнений. Согласно геометрическому критерию, набор векторов $u^1, \dots, u^k \in N^m$ будет непротиворечивым тогда и только тогда, когда векторы $u^1, \dots, u^k$ вместе с единичными ортами $e^1, \dots, e^m$ критериального пространства R^m порождают острый конус.

Рассматриваемая далее задача состоит в получении на основе имеющихся «квантов» информации определённого подмножества множества Парето $P_f(X)$, которое представляет собой более точную оценку для неизвестного множества выбираемых вариантов (или векторов), чем исходное множество Парето. В целом ряде частных случаев эта задача решена [1-6] в том смысле, что по данному непротиворечивому набору определённых «квантов» указан вид нового векторного критерия, множество Парето относительно которого и является искомой оценкой сверху. Однако в общем случае, когда имеется произвольный конечный набор непротиворечивых «квантов» эта задача оставалась открытой. Ниже предлагается алгоритм её решения.

2. Описание алгоритма

На вход алгоритма подаётся конечный набор векторов $a^1, \dots, a^k \in N^m$, образующий в пространстве R^m острый m -мерный конус, а на выходе (в памяти) образуется новый векторный критерий, множество Парето относительно которого будет представлять собой сужение исходного множества Парето на основе данного набора «квантов» информации.

Шаг 1 (открытие цикла по перебору векторов). Открыть цикл по переменной i от 1 до C_k^{m-1} генерирования всех возможных поднаборов из $m-1$ векторов набора $a^1, \dots, a^k$.

Шаг 2 (проверка на линейную независимость). Если текущий i -й поднабор $a^{i1}, \dots, a^{i(m-1)}$, выбранный из $a^1, \dots, a^k$, линейно зависим, то следует увеличить номер i на единицу и вернуться к началу шага 2. Когда увеличение номера i невозможно, т.е. $i = C_k^{m-1}$, необходимо перейти к шагу 5. В противном случае, т.е. когда указанный поднабор линейно независим, выполнить шаг 3.

Шаг 3 (построение ортогонального вектора). Образовать из вектор-столбцов поднабора $a^{i1}, \dots, a^{i(m-1)}$ квадратную матрицу D m -го порядка, приписав к указанным столбцам справа любой вектор из множества $I_i = \{a^1, \dots, a^k\} \setminus \{a^{i1}, \dots, a^{i(m-1)}\}$, образующий вместе с $a^{i1}, \dots, a^{i(m-1)}$ линейно независимую систему (такой вектор всегда существует). Найти последний столбец обратной матрицы $(D^T)^{-1}$, где T – символ транспонирования. Найденный вектор-столбец (обозначим его y^i) следует запомнить.

Замечание 1. Имеются и другие способы построения вектора y^i на шаге 3. Например, для его отыскания можно решить однородную систему линейных уравнений $Ay = 0$, где A – матрица, составленная из вектор-строк $a^{i1}, \dots, a^{i(m-1)}$. Указанная система имеет одномерное решение, определяемое с точностью до произвольного множителя. Необходимо взять такой знак этого множителя, чтобы выбранный ненулевой вектор y^i при его скалярном умно-

жении на хотя бы один из векторов набора I_i давал положительное число.

Шаг 4 (проверка вектора y^i на принадлежность искомому множеству $b^1, \dots, b^n$). Вычислить скалярные произведения $\langle a^j, y^i \rangle$ для всех векторов $a^j \in I_i$. Если хотя бы одно такое скалярное произведение окажется отрицательным, то удалить из памяти вектор y^i . Увеличить номер i на единицу и перейти на шаг 2 (когда такое увеличение невозможно, – перейти на шаг 5).

Замечание 2. Для сокращения перебора и исключения записи в памяти одинаковых (с точностью до положительного множителя) искомым векторов для каждого записанного в память y^i , на шаге 4 следует запоминать соответствующий ему набор Y_i из всех векторов $a^1, \dots, a^k$, ортогональных вектору y^i (т.е. тех a^j , для которых $\langle a^j, y^i \rangle = 0$). А на шаге 2 всякий раз в случае, когда текущий поднабор $a^{i^1}, \dots, a^{i^{(m-1)}}$ оказывается подмножеством хотя бы одного образованного ранее множества Y_i , пропускать такой поднабор, сразу увеличивая номер i на единицу.

Шаг 5 (формирование нового векторного критерия). В результате выполнения полного цикла по переменной i в памяти будут записаны вектор-столбцы, которые в ходе выполнения алгоритма запоминались как y^i . Обозначим все эти векторы через $b^1, \dots, b^n$. Наконец, необходимо построить векторный критерий по формуле $g(x) = (\langle b^1, f(x) \rangle, \dots, \langle b^n, f(x) \rangle)$.

Нижеследующая теорема указывает способ применения описанного алгоритма.

Теорема. Пусть выполнены четыре аксиомы «разумного» выбора [4] и задан непротиворечивый набор «квантов» информации в виде векторов $u^i \in R^m$, для которых имеет место соотношение $u^i \succ_Y 0$, $i = 1, \dots, k$. Тогда для любого множества выбираемых вариантов $C(Y)$ выполняются включения

$$C(Y) \subset \hat{P}(Y) \subset P(Y). \quad (1)$$

Здесь $\hat{P}(Y) = f(P_g(X))$ – образ множества парето-оптимальных вариантов на исходном множестве X относительно нового n -мерного векторного критерия $g(x)$ ($n \geq m$), построенного в результате применения алгоритма к набору,

состоящему из векторов $u^1, \dots, u^k$, задающих «кванты» информации, вместе с t единичными ортами пространства R^m .

Согласно теореме, применяя алгоритм, следует построить новый векторный критерий g , множество Парето относительно которого даст оценку сверху (1) для неизвестного множества выбираемых вариантов $C(Y)$ с учетом выявленного набора «квантов» информации. В общем случае эта оценка будет более точной, чем исходное множество Парето $P(Y)$.

3. Пример

Пусть $m = 3$, $k = 2$, $u^1 = (-2, 3, 1) \succ 0$, $u^2 = (4, -1, 1) \succ 0$. Нетрудно проверить ([4], стр. 127), что информация об отношении предпочтения, заданная указанными двумя «квантами», является непротиворечивой. Применим описанный алгоритм для формирования нового векторного критерия. В соответствии с теоремой на вход алгоритма следует подать набор из пяти векторов $\{e^1, e^2, e^3, u^1, u^2\}$, где $e^1 = (1, 0, 0)$, $e^2 = (0, 1, 0)$, $e^3 = (0, 0, 1)$. Длина цикла алгоритма будет равна $C_s^2 = 10$.

Рассмотрим первый поднабор из двух векторов $\{e^1, e^2\}$. Очевидно, ортогональным к этим векторам является вектор $\{e^3\}$, причем $\langle e^3, u^1 \rangle = \langle e^3, u^2 \rangle = \langle e^3, e^3 \rangle = 1 > 0$. Следовательно, на основании утверждения вектор $y^1 = e^3$ следует запомнить.

Перейдем ко второму поднабору $\{e^1, e^3\}$. Вектор e^2 ортогонален обоим векторам рассматриваемого поднабора, но $\langle e^2, u^2 \rangle = -1 < 0$. Это означает, что вектор e^2 запоминать не следует.

Теперь рассмотрим $\{e^2, e^3\}$. Здесь для ортогонального вектора e^1 выполняется $\langle e^1, u^1 \rangle = -2 < 0$, поэтому данный вектор тоже должен быть пропущен.

Для набора $\{e^1, u^1\}$ в качестве ортогонального вектора можно взять, например, $(0, 1, -3)$. Поскольку $\langle (0, 1, -3), u^2 \rangle = -4 < 0$, данный вектор также пропускаем.

Для набора $\{e^2, u^1\}$ можно выбрать ортогональный вектор $y^2 = (1, 0, 2)$, который следует запомнить. Далее аналогично, нетрудно проверить, что для набора $\{e^3, u^1\}$ можно запомнить, например, вектор $y^3 = (3, 2, 0)$, для набора $\{e^1, u^2\}$ – вектор $y^4 = (0, 1, 1)$, для набора $\{e^2, u^2\}$ ортогональный вектор (например, $(1, 0, -4)$), следует пропустить, для набора $\{e^3, u^2\}$ – запомнить вектор $y^5 = (1, 4, 0)$ и, наконец, после рассмотрения набора $\{u^1, u^2\}$ запоминать ничего не следует.

В итоге найдены пять векторов $y^1, \dots, y^5$. Им отвечает новый векторный критерий g с компонентами $g_1(x) = f_3(x)$, $g_2(x) = f_1(x) + 2f_3(x)$, $g_3(x) = 3f_1(x) + 2f_2(x)$, $g_4(x) = f_2(x) + f_3(x)$, $g_5(x) = f_1(x) + 4f_2(x)$. Согласно сформулированной выше теореме, множество Парето относительно этого 5-мерного критерия будет являться более точной оценкой для неизвестного множества выбираемых векторов (вариантов), чем исходное множество Парето.

Чтобы получить конкретный результат, выберем в качестве Y , например, следующее конечное множество $Y = \{y^1, y^2, y^3, y^4\}$, где $y^1 = (1, 4.5, 2)$, $y^2 = (2, 3, 1)$, $y^3 = (3, 2, 1.5)$, $y^4 = (5, 1.5, 2)$

Нетрудно видеть, что все эти векторы парето-оптимальны. Простые вычисления показывают, что $g(Y) = \{(2.5, 12.6, 5.19), (1.4, 12.4, 14), (1.5, 6.13, 3.5, 11), (2.9, 18, 3.5, 11)\}$

В этом множестве второй и третий векторы не являются парето-оптимальными. Следовательно, $\hat{P}(Y) = f(P_g(X)) = \{y^1, y^4\}$, т.е. после использования имеющейся информации множество Парето сократилось в 2 раза.

Тот же самый результат для рассмотренной задачи другим способом получен в книге [4]. Следует, однако, заметить, что применённый в этой книге подход пригоден только в случае конечного множества Y , тогда как изложенный выше метод носит универсальный характер и его можно использовать для любого, в том числе и бесконечного, множества Y .

4. Доказательство теоремы

Для удобства обозначим набор векторов $e^1, \dots, e^m, u^1, \dots, u^k$, который поступает на вход алгоритма, через $a^1, \dots, a^{m+k}$ и введём обозначение M для конуса, порождённого этим набором векторов: $M = \text{cone}\{a^1, \dots, a^{m+k}\}$. Поскольку имеющийся набор «квантов» информации непротиворечивый, введённый конус является острым и m -мерным [4]. Введём двойственный конус

$$M^o = \{y \in R^m \mid \langle a^j, y \rangle \geq 0, \quad j = 1, \dots, m+k\}.$$

Он также имеет размерность m и является острым [8].

Утверждение. Вектор $y^i \in M^o$ задает крайний луч² двойственного конуса тогда и только тогда, когда в наборе $a^1, \dots, a^{m+k}$ найдутся $m-1$ линейно-независимых векторов, скалярные произведения которых на вектор y^i равны нулю, а скалярные произведения всех остальных векторов указанного набора на вектор y^i неотрицательны.

Доказательство утверждения. Достаточность. Обозначим линейно-независимые векторы через $a^{i^1}, \dots, a^{i(m-1)}$. Пусть

$$\begin{aligned} \langle a^{ij}, y^i \rangle &= 0, \quad j = 1, \dots, m-1, \\ \langle a^{ij}, y^i \rangle &\geq 0, \quad j = m, \dots, m+k. \end{aligned} \quad (2)$$

Предположим напротив, что вектор y^i не задает крайний луч двойственного конуса. В таком случае найдутся два неколлинеарных вектора $z^1, z^2 \in M^o$ и два положительных числа α_1, α_2 , таких что $y^i = \alpha_1 z^1 + \alpha_2 z^2$. В силу $z^1, z^2 \in M^o$ имеем

$$\langle a^{ij}, z^1 \rangle \geq 0, \quad \langle a^{ij}, z^2 \rangle \geq 0, \quad j = 1, \dots, m-1. \quad (3)$$

Из равенств в (2) следует

$$\begin{aligned} \langle a^{ij}, y^i \rangle &= \alpha_1 \langle a^{ij}, z^1 \rangle + \alpha_2 \langle a^{ij}, z^2 \rangle = 0, \\ j &= 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Отсюда с учётом положительности α_1, α_2 и неравенств (3) получаем равенства

$$\alpha_1 \langle a^{ij}, z^1 \rangle = \alpha_2 \langle a^{ij}, z^2 \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, m-1.$$

² Ненулевой вектор конуса задаёт крайний луч (крайнее направление) этого конуса, если его невозможно представить в виде линейной комбинации двух неколлинеарных векторов данного конуса с положительными коэффициентами.

Полученное означает, что линейная оболочка $L(z^1, z^2)$ неколлинеарных векторов z^1, z^2 входит в ортогональное дополнение линейной оболочки векторов $a^{i1}, \dots, a^{i(m-1)}$, т.е. $L(z^1, z^2) \subset L^\perp(a^{i1}, \dots, a^{i(m-1)})$, причём $\dim L(z^1, z^2) = 2$. Отсюда немедленно следует неравенство $\dim L^\perp(a^{i1}, \dots, a^{i(m-1)}) \geq 2$, которое несовместимо с линейной независимостью набора m -мерных векторов $a^{i1}, \dots, a^{i(m-1)}$.

Необходимость. Пусть вектор y^i задаёт крайний луч конуса M^o . Для этого вектора выполнены неравенства $\langle a^{ij}, y^i \rangle \geq 0$, $j = 1, \dots, m+k$. В соответствии с [10] между крайними лучами острого m -мерного двойственного конуса M^o и $(m-1)$ -мерными гранями острого m -мерного конуса M существует взаимно однозначное соответствие. А именно, каждый вектор, задающий крайнее направление двойственного конуса, является внутренней нормалью для некоторой $(m-1)$ -мерной грани исходного конуса, и наоборот.

Зафиксируем линейно-независимый набор $a^{i1}, \dots, a^{i(m-1)}$ из $m-1$ векторов $a^1, \dots, a^{m+k}$, порождающий $(m-1)$ -мерную грань конуса M , нормалью для которой является вектор y^i . Допустим напротив, что для набора $a^{i1}, \dots, a^{i(m-1)}$ соотношения (2) не выполнены. Это означает нарушение неравенств, т.е. найдётся $j \in \{m, \dots, m+k\}$, при котором верно $\langle a^{ij}, y^i \rangle < 0$. Последнее неравенство несовместимо с тем, что $y^i \in M^o$. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения.

Продолжим доказательство теоремы. В условиях выполнения аксиом «разумного» выбора, отношение предпочтения $\succ$, о котором говорилось выше, является конусным с острым выпуклым конусом, содержащим неотрицательный ортант R_+^m пространства R^m , т.е. $R_+^m = \{y \in R^m \mid y \geq 0, y \neq 0\}$ [4]. Пусть K – конус отношения $\succ$. Таким образом, $R^m \subset M \subset K$, и все участвующие здесь конусы являются острыми, выпуклыми и m -мерными. Соответствующие этим конусам множества недоминируемых векторов вложены друг в друга обратным образом

$$\text{Ndom}_\succ Y \subset \text{Ndom}_M Y \subset P(Y). \quad (4)$$

Здесь $P(Y)$ – множество Парето, т.е. множество недоминируемых векторов относительно конусного отношения с конусом R_+^m ; $\text{Ndom}_\succ Y = \{y^* \in R^m \mid \text{не существует } y \in Y, \text{ для которых } y \succ y^*\}$ – множество недоминируемых векторов относительно конусного отношения $\succ$, а $\text{Ndom}_M Y$ – множество недоминируемых векторов относительно конусного отношения $\succ_M$ с конусом M .

Согласно доказанному выше утверждению, описанный алгоритм строит векторы $b^1, \dots, b^n$, которые порождают крайние лучи двойственного для M конуса M^o . Таким образом, соотношение $y \succ_M y^*$ имеет место тогда и только тогда, когда $\langle b^j, y \rangle \geq \langle b^j, y^* \rangle$, $j = 1, \dots, n$. Отсюда следует, что в (4) $\text{Ndom}_M Y = \hat{P}(Y)$, причём g – в точности та самая вектор-функция, которая описана в условиях теоремы. Теперь с учётом того, что в условиях выполнения аксиом «разумного» выбора для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ верно включение $C(Y) \subset \text{Ndom}_\succ Y$ [4], из (4) вытекают требуемые включения (1).

Заключение

Рассматривается развиваемый автором аксиоматический подход к сужению множества Парето на основе числовой информации об отношении предпочтения ЛПР в виде так называемых «квантов». В рамках этого подхода предложен алгоритм, позволяющий для сужения множества Парето использовать произвольный непротиворечивый конечный набор «квантов» информации. В соответствии с этим алгоритмом на основе имеющейся информации формируется новый векторный критерий, множество Парето относительного которого является более точной оценкой сверху для неизвестного множества выбираемых вариантов, чем исходное множество Парето. Рассмотрен иллюстративный пример и приведено обоснование указанного алгоритма.

Литература

1. Захаров А.О. Сужение множества Парето на основе взаимно зависимой информации замкнутого типа // Искусственный интеллект и принятие решений. 2011, № 11, С. 95-109.
2. Климова О.Н. Сужение множества Парето на основе наборов взаимно зависимой информации о нечетком отношении предпочтения // Искусственный интеллект и принятие решений. 2009, № 2, С. 34-44.
3. Ногин В.Д. Проблема сужения множества Парето: подходы к решению // Искусственный интеллект и принятие решений. 2008, № 1, С. 98-112.
4. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход (2 изд., испр. и доп.). М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
5. Ногин В.Д. Сужение множества Парето на основе информации о предпочтениях ЛПР точно-множественного типа // Искусственный интеллект и принятие решений. 2009, № 1, С. 5-16.
6. Ногин В.Д. Сужение множества Парето на основе информации о предпочтениях ЛПР множественно-точечного типа // Искусственный интеллект и принятие решений. 2010, № 2, С. 54-63.
7. Ногин В.Д., Басков О.В. Сужение множества Парето на основе произвольного конечного набора числовой информации об отношении предпочтения // Доклады РАН, 2011, Т. 438, С. 1-4.
8. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ, М.: Мир, 1973.
9. Петровский А.Б. Теория принятия решений. М.: Издательский центр «Академия», 2009.
10. Схрейвер А. Теория целочисленного и линейного программирования. М.: «Мир», Т. 2, 1991.
11. Tamura K. A method for constructing the polar cone of a polyhedral cone, with applications to linear multicriteria decision problems // Journal of Optimization Theory and Applications, 1976, V. 19, № 4, P. 547-564.

Ногин Владимир Дмитриевич. Профессор кафедры теории управления факультета прикладной математики-процессов управления (ПМ-ПУ) Санкт-Петербургского государственного университета. Окончил ЛГУ в 1971 году. Доктор физико-математических наук, профессор. Действительный член Международной академии наук высшей школы. Автор свыше 120 печатных трудов из них 2-х монографий. Область научных интересов: принятие решений при многих критериях, многокритериальная оптимизация.

E-mail: noghin@gmail.com. Персональная страница в Интернет: <http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/nogin/>