

## Об одном методе решения двухальтернативной задачи выбора в условиях существенной неопределенности

**Аннотация.** Предложен оптимизационный метод решения двухальтернативной задачи выбора в условиях существенной размытости единичных оценок информативного параметра и невозможности формализации процесса их получения статистической моделью. В качестве критерия качества использован максимум достоверности принимаемого решения. Найдена функция принадлежности, обеспечивающая экстремум заданного функционала качества по всем имеющимся оценкам информативного параметра. Работоспособность и эффективность предложенного метода подтверждены результатами сравнения и апробации в системе классификации объектов по результатам измерения их радиотехнических параметров.

**Ключевые слова:** классификация, нечеткое множество, функция принадлежности, нечеткое отношение предпочтения.

### Введение

Одной из основных задач, с которой приходится сталкиваться разработчику интеллектуальной системы, является задача автоматической классификации. Необходимость ее решения возникает в самых разнообразных областях знания, в частности экономике, управлении, медицине, радиотехнике. Частным, но крайне важным случаем этой задачи является ее приложение на случай двухальтернативного выбора. Из литературы известны две группы методов ее решения – статистические [1] и нечетко-логические [2, 3]. Применение первых обоснованно в случаях наличия априорной информации о законе распределения вероятностей единичных оценок информативного параметра, либо возможности его формализации по их имеющемуся количеству, применение вторых – в противном случае. Недостаточная размерность множества оценок информативного параметра, сопровождающая множество практических задач, привела к разработке ряда нечетко-логических методов, позволяющих преодолеть эти затруднения, в частности [2] и [3]. Множество оценок информативного параметра в этом случае интерпретируется как геометрическое место точек, степень принадлежности которых к одному из двух классов формализуется двумя кусочно-линейными пересекающимися функциями принадлежности. Задача выбора решается путем формирования множества  $\alpha$  – уровня нечеткого множества отношений предпочтения альтернатив, где  $\alpha$  – порог принятия решения. Известные методы нахождения последних по всему имеющемуся множеству значений информативного признака использующие операции объединения, либо алгебраического сложения нечетких множеств [2–4] не лишены недостатков. Первый обеспечивает устойчивое решение задачи выбора в случае большой размерности множества оценок информативного параметра, позволяющей составить статистическое описание процесса измерений, второй – при нахождении всех имеющихся оценок в зоне доминирования одной из альтернатив. Это обуславливает актуальность поиска решения двухальтернативной задачи выбора в условиях неопределенности относительно размерности и точности оценивания элементов вектора информативных параметров, позволяющего снять эти ограничения. В настоящей работе предпринята попытка поиска такого решения путем нахождения формы функции принадлежности, заданной на множестве

реализовавшихся значений информативного параметра и обеспечивающей максимальную достоверность принимаемого решения в условиях ограниченной статистики наблюдений.

## 1. Постановка и решение задачи

Пусть по результатам независимых измерений сформирован массив характеризующих объект информативных параметров  $[k_i]$ , где  $i$  – порядковый номер измерения,  $i = 1, \dots, N$ . Степени принадлежности объекта к одному из двух классов характеризуются заданными на множестве действительных чисел (универсуме) кусочно-линейными пересекающимися функциями принадлежности, по аналогии с [5] допускающими формализацию в виде

$$\mu_1(k_i) = \begin{cases} 1 & \text{при } k_i \leq p_1 \\ 1 - \frac{k_i - p_1}{p_2 - p_1} & \text{при } p_1 < k_i < p_2; \\ 0 & \text{при } k_i \geq p_2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\mu_2(k_i) = \begin{cases} 1 & \text{при } k_i \geq p_2 \\ \frac{k_i - p_1}{p_2 - p_1} & \text{при } p_1 < k_i < p_2, \\ 0 & \text{при } k_i \leq p_1 \end{cases} \quad (2)$$

где  $p_1$  и  $p_2$  – известные положительные действительные числа ( $p_2 > p_1$ ), характеризующие начальную и конечную точки области пересечения функций  $\mu_1(k_i)$  и  $\mu_2(k_i)$ .

Качество решения задачи классификации охарактеризуем функционалом, характеризующим достоверность принимаемого решения

$$I = \max[\tilde{\mu}_{1\setminus 2}[\mu_{1\setminus 2}(k_1), \dots, \mu_{1\setminus 2}(k_N)], \tilde{\mu}_{2\setminus 1}[\mu_{2\setminus 1}(k_1), \dots, \mu_{2\setminus 1}(k_N)]], \quad (3)$$

где  $\mu_{1\setminus 2}(k_i) = \mu_1(k_i) - \mu_2(k_i)$ ,  $\mu_{2\setminus 1}(k_i) = \mu_2(k_i) - \mu_1(k_i)$ , – соответственно, заданные на множестве действительных чисел (универсуме) функции принадлежности, характеризующие степень предпочтительности первой альтернативы над второй и второй над первой по результатам  $i$  – ого измерения;

$\tilde{\mu}_{1\setminus 2}[\mu_{1\setminus 2}(k_1), \dots, \mu_{1\setminus 2}(k_N)]$ ,  $\tilde{\mu}_{2\setminus 1}[\mu_{2\setminus 1}(k_1), \dots, \mu_{2\setminus 1}(k_N)]$  – соответственно, заданные на множестве реализовавшихся значений  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  (универсуме) функции принадлежности, характеризующие степень предпочтительности первой альтернативы над второй и второй над первой по результатам всех  $i$  – ых измерений, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{1\setminus 2}[\mu_{1\setminus 2}(k_1)] &= \mu_{1\setminus 2}(k_1), \tilde{\mu}_{2\setminus 1}[\mu_{2\setminus 1}(k_1)] = \mu_{2\setminus 1}(k_1); \\ \forall N \geq 2 : \tilde{\mu}_{1\setminus 2}[\mu_{1\setminus 2}(k_1), \dots, \mu_{1\setminus 2}(k_N)] &\geq \tilde{\mu}_{1\setminus 2}[\mu_{1\setminus 2}(k_1), \dots, \mu_{1\setminus 2}(k_{N-1})], \\ \tilde{\mu}_{2\setminus 1}[\mu_{2\setminus 1}(k_1), \dots, \mu_{2\setminus 1}(k_N)] &\geq \tilde{\mu}_{2\setminus 1}[\mu_{2\setminus 1}(k_1), \dots, \mu_{2\setminus 1}(k_N)] \end{aligned} \quad (4)$$

Требуется разработать метод решения двухальтернативной задачи выбора, обеспечивающий максимальное значение (3) в условиях ограниченной статистики наблюдений.

Решение поставленной задачи начнем с формирования требований к функциям принадлежности  $\tilde{\mu}_{1\setminus 2}[\mu_{1\setminus 2}(k_1), \dots, \mu_{1\setminus 2}(k_N)]$  и  $\tilde{\mu}_{2\setminus 1}[\mu_{2\setminus 1}(k_1), \dots, \mu_{2\setminus 1}(k_N)]$ . Исходя из специфики решаемой задачи, они должны обеспечивать:

– возрастание  $I$  с увеличением  $N$  при выполнении условий

$$\forall i \in [1, \dots, N] : \mu_{1\setminus 2}(k_i) > 0, \mu_{2\setminus 1}(k_i) = 0 \quad \text{или} \quad \mu_{2\setminus 1}(k_i) > 0, \mu_{1\setminus 2}(k_i) = 0; \quad (5)$$

– равенство  $I$  нулю при выполнении условий

$$\forall N1, N2 \neq 0, \sum_{i1=1}^{N1} \mu_{1\setminus 2}(k_{i1}) = \sum_{i2=1}^{N2} \mu_{2\setminus 1}(k_{i2}), \quad (6)$$

где  $k_{i1}$ , и  $k_{i2}$ , – соответственно, элементы универсального множества в количествах  $N1$  и  $N2$ , для которых выполняются условия  $k_{i1} \leq \frac{k_1 + k_2}{2}$  и  $k_{i2} > \frac{k_1 + k_2}{2}$ ;

– возрастание  $I$  с ростом  $N1$  при выполнении условий

$$\forall N1, N2 \neq 0, k_{i1} : \mu_{1\setminus 2}(k_{i1}) > 0, \sum_{i1=1}^{N1} \mu_{1\setminus 2}(k_{i1}) \geq \sum_{i2=1}^{N2} \mu_{2\setminus 1}(k_{i2}), N2 = const; \quad (7)$$

– возрастание  $I$  с ростом  $N2$  при выполнении условий

$$\forall N1, N2 \neq 0, k_{i2} : \mu_{2\setminus 1}(k_{i2}) > 0, \sum_{i2=1}^{N2} \mu_{2\setminus 1}(k_{i2}) \geq \sum_{i1=1}^{N1} \mu_{1\setminus 2}(k_{i1}), N1 = const. \quad (8)$$

В качестве функций, априорно в наибольшей мере удовлетворяющих условиям (5) – (8) рассмотрим три следующие заданные на множестве реализовавшихся значений  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  (универсуме) функции принадлежности  $\tilde{\mu}_{1\setminus 2}^j[\mu_{1\setminus 2}(k_1), \dots, \mu_{1\setminus 2}(k_N)]$  и  $\tilde{\mu}_{2\setminus 1}^j[\mu_{1\setminus 2}(k_1), \dots, \mu_{1\setminus 2}(k_N)]$ ,  $j = 1, 2, 3$ :

– в соответствии с [4]:

$$\tilde{\mu}_{1\setminus 2}^1[\mu_{1\setminus 2}(k_1), \dots, \mu_{1\setminus 2}(k_N)] = \max \left[ C \{ \mu_1(k_{i1}) - \mu_2(k_{i1}) \} - C \{ \mu_2(k_{i2}) - \mu_1(k_{i2}) \}, 0 \right]; \quad (9)$$

$$\tilde{\mu}_{2\setminus 1}^1[\mu_{1\setminus 2}(k_1), \dots, \mu_{1\setminus 2}(k_N)] = \max \left[ C \{ \mu_2(k_{i2}) - \mu_1(k_{i2}) \} - C \{ \mu_1(k_{i1}) - \mu_2(k_{i1}) \}, 0 \right]; \quad (10)$$

– предложенную авторами:

$$\tilde{\mu}_{1\setminus 2}^2[\mu_{1\setminus 2}(k_1), \dots, \mu_{1\setminus 2}(k_N)] = \max \left\{ \frac{\sum_{i1=1}^{N1} \mu_{1\setminus 2}(k_{i1}) - \sum_{i2=1}^{N2} \mu_{2\setminus 1}(k_{i2})}{\sum_{i1=1}^{N1} \mu_{1\setminus 2}(k_{i1})}, 0 \right\}; \quad (11)$$

$$\tilde{\mu}_{2\setminus 1}^2[\mu_{1\setminus 2}(k_1), \dots, \mu_{1\setminus 2}(k_N)] = \max \left\{ \frac{\sum_{i2=1}^{N2} \mu_{2\setminus 1}(k_{i2}) - \sum_{i1=1}^{N1} \mu_{1\setminus 2}(k_{i1})}{\sum_{i2=1}^{N2} \mu_{2\setminus 1}(k_{i2})}, 0 \right\}; \quad (12)$$

– в соответствии с [2]:

$$\tilde{\mu}_{1\setminus 2}^3[\mu_{1\setminus 2}(k_1), \dots, \mu_{1\setminus 2}(k_N)] = \max_{k_{i1}} \mu_{1\setminus 2}(k_{i1}); \quad (13)$$

$$\tilde{\mu}_{2\setminus 1}^3[\mu_{1\setminus 2}(k_1), \dots, \mu_{1\setminus 2}(k_N)] = \max_{k_{i2}} \mu_{2\setminus 1}(k_{i2}), \quad (14)$$

Здесь через  $C$  обозначена операция алгебраического сложения нечетких множеств, выполняемая по правилу  $\mu_1 \oplus \mu_2 = \mu_1 + \mu_2 - \mu_1 \cdot \mu_2$ .

Зная (9) – (14), определим искомые нечеткие отношения предпочтения в виде

$$\tilde{\mu}_{1\backslash 2}[\mu_{1\backslash 2}(k_1), \dots, \mu_{1\backslash 2}(k_N)] = \max \begin{bmatrix} \mu_{1\backslash 2}^1[\mu_{1\backslash 2}(k_1), \dots, \mu_{1\backslash 2}(k_N)], \\ \mu_{1\backslash 2}^2[\mu_{1\backslash 2}(k_1), \dots, \mu_{1\backslash 2}(k_N)], \\ \mu_{1\backslash 2}^3[\mu_{1\backslash 2}(k_1), \dots, \mu_{1\backslash 2}(k_N)] \end{bmatrix}; \quad (15)$$

$$\tilde{\mu}_{2\backslash 1}[\mu_{2\backslash 1}(k_1), \dots, \mu_{2\backslash 1}(k_N)] = \max \begin{bmatrix} \mu_{2\backslash 1}^1[\mu_{2\backslash 1}(k_1), \dots, \mu_{2\backslash 1}(k_N)], \\ \mu_{2\backslash 1}^2[\mu_{2\backslash 1}(k_1), \dots, \mu_{2\backslash 1}(k_N)], \\ \mu_{2\backslash 1}^3[\mu_{2\backslash 1}(k_1), \dots, \mu_{2\backslash 1}(k_N)] \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Решение задачи выбора произведем путем выполнения пороговой процедуры по алгоритму:

первый класс

$$\tilde{\mu}_{1\backslash 2}[\mu_{1\backslash 2}(k_1), \dots, \mu_{1\backslash 2}(k_N)] \geq \alpha; \quad (17)$$

второй класс

$$\tilde{\mu}_{2\backslash 1}[\mu_{2\backslash 1}(k_1), \dots, \mu_{2\backslash 1}(k_N)] \geq \alpha; \quad (18)$$

невозможность решения

$$\tilde{\mu}_{1\backslash 2}[\mu_{1\backslash 2}(k_1), \dots, \mu_{1\backslash 2}(k_N)] < \alpha, \mu_{2\backslash 1}[\mu_{2\backslash 1}(k_1), \dots, \mu_{2\backslash 1}(k_N)] < \alpha. \quad (19)$$

## 2. Результаты сравнения

Для проверки работоспособности и оценки эффективности разработанного метода было проведено его сравнение с нечетко-логическими методами классификации [1, 4], в которых определение отношений предпочтения производилось в соответствии с (13), (14) и (9), (10). В качестве сравниваемого параметра использовались достоверности принятых решений, вычисляемые в соответствии с (3). Сравнение проводилось для трех гипотетических, но близких к реальности ситуаций, при которых  $i = 5$ , а  $\mu_1(k_{i1}) - \mu_2(k_{i1})$  и  $\mu_2(k_{i2}) - \mu_1(k_{i2})$ , соответственно, принимали значения 0,5, 0,4, 0,3, 0,2, 0,1 и 0,0, 0,0, 0,0, 0,0, 0,0; 0,6, 0,5, 0,4, 0,0, 0,0 и 0,0, 0,0, 0,0, 0,1, 0,2; 0,8, 0,5, 0,3, 0,0, 0,0 и 0,0, 0,0, 0,0, 0,3, 0,2. В результате сравнения получены следующие значения достоверностей решения задачи выбора:

- в первом случае – 1, 0,85 и 0,5;
- во втором случае – 0,78, 0,6 и 0,6;
- в третьем случае – 0,8, 0,49 и 0,8.

Полученный результат говорит об оптимальном характере выбранной функции. Моделирование большого числа практических ситуаций показало, что для всех рассмотренных случаев выполняется условия  $\tilde{\mu}_{1\backslash 2}[\mu_{1\backslash 2}(k_1), \dots, \mu_{1\backslash 2}(k_N)] \geq \tilde{\mu}_{1\backslash 2}^1[\mu_{1\backslash 2}(k_1), \dots, \mu_{1\backslash 2}(k_N)]$  и  $\tilde{\mu}_{2\backslash 1}^2[\mu_{2\backslash 1}(k_1), \dots, \mu_{2\backslash 1}(k_N)] \geq \tilde{\mu}_{2\backslash 1}^1[\mu_{2\backslash 1}(k_1), \dots, \mu_{2\backslash 1}(k_N)]$ , что позволяет упростить (15), (16) и записать их в виде

$$\tilde{\mu}_{1\backslash 2}[\mu_{1\backslash 2}(k_1), \dots, \mu_{1\backslash 2}(k_N)] = \max \begin{bmatrix} \mu_{1\backslash 2}^2[\mu_{1\backslash 2}(k_1), \dots, \mu_{1\backslash 2}(k_N)], \\ \mu_{1\backslash 2}^3[\mu_{1\backslash 2}(k_1), \dots, \mu_{1\backslash 2}(k_N)] \end{bmatrix}; \quad (18)$$

$$\tilde{\mu}_{2\backslash 1}[\mu_{2\backslash 1}(k_1), \dots, \mu_{2\backslash 1}(k_N)] = \max \begin{bmatrix} \mu_{2\backslash 1}^2[\mu_{2\backslash 1}(k_1), \dots, \mu_{2\backslash 1}(k_N)], \\ \mu_{2\backslash 1}^3[\mu_{2\backslash 1}(k_1), \dots, \mu_{2\backslash 1}(k_N)] \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Разработанный подход был апробирован при решении задачи классификации объекта по результатам радиотехнических измерений и продемонстрировал надежную работу в условиях ограниченной статистики наблюдений.

Полученные результаты позволили определить область применения разработанного метода – это системы классификации, работающие в условиях существенной размытости единичных оценок информативного параметра и невозможности формализации процесса их получения статистической моделью.

## Заключение

1. Разработан оптимизационный метод решения двухальтернативной задачи выбора в условиях существенной размытости единичных оценок информативного параметра и невозможности формализации процесса их получения статистической моделью.

2. Найдена функция принадлежности, обеспечивающая экстремум выбранного функционала качества по всем имеющимся оценкам информативного параметра.

3. Сравнение с аналогами показало в среднем почти 1,4 кратное превосходство разработанного метода по достоверности классификации.

4. Областью применения разработанного метода являются системы классификации объектов наблюдения в условиях неопределенности с повышенными требованиями к достоверности принятого решения.

## Литература

1. Дуда Р., Харт П. Распознавание образов и анализ сцен. М.: Мир, 1976.
2. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981.
3. H. Ishibuchi, T. Nakashima and T. Murata. Performance evaluation of fuzzy classifier system for multidimensional pattern classification problems, IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, may 1999, vol. 29, p. 601 – 618.
4. Зайцева Т.В. и др. Алгоритм перевода коэффициентов нечеткой логики в коэффициенты уверенности при разработке экспертной системы в среде GURU, М.: Вопросы радиоэлектроники, вып.1, 2012, С 112 – 119.
5. Музыченко Н.Ю. Синтез оптимального линейного измерителя при наблюдениях на фоне коррелированных шумов на базе нечетко-логических алгоритмов // Радиотехника и электроника, 2010, Т. 55, № 7, С. 808 – 811.
6. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и ее применение к принятию приближенных решений, М.: Мир, 1976.

**Музыченко Николай Юрьевич.** Ведущий научный сотрудник НИИ радиосвязи (г. Ростов–на–Дону). Окончил Таганрогский радиотехнический институт в 1979 году. Кандидат технических наук. Автор 33 печатных работ. Область научных интересов: идентификация объектов в условиях существенной неопределенности параметров, характеризующих эти объекты. E-mail: muzichenko\_n@mail.ru

**Тюрин Дмитрий Александрович.** Начальник сектора НИИ радиосвязи (г. Ростов–на–Дону). Окончил Донской государственный технический университет в 1998 году. Автор двух печатных работ. Область научных интересов: идентификация объектов в условиях существенной неопределенности параметров, характеризующих эти объекты. E-mail: dimat@aanet.ru