Б.А. Кулик, А.А. Зуенко, А.Я. Фридман

Дедуктивные и пересматриваемые рассуждения на основе единого алгебраического подхода[1]

Аннотация. В работе продемонстрировано применение единого классического подхода к моделированию и анализу как дедуктивных, так и пересматриваемых рассуждений на основе разработанной авторами алгебры кортежей. Предлагается метод анализа пересматриваемых рассуждений, в котором «неклассическая» составляющая переносится в семантику, а сам логический анализ осуществляется без нарушения законов классической логики.

Ключевые слова: пересматриваемые рассуждения, алгебра кортежей, коллизии, анализ гипотез.

Введение

Теория логического вывода уже несколько десятилетий считается завершенной, чего нельзя сказать о теориях пересматриваемых рассуждений. Считается, что для анализа пересматриваемых рассуждений более предпочтительны неклассические логики (логика умолчаний, немонотонная логика и т.д.). В последние годы появились исследования, в которых системы пересматриваемой аргументации описываются с помощью языка логики первого порядка [1]. Однако при этом необходимо вводить в систему рассуждений пересматриваемые правила вывода, что, казалось бы, не позволяет отнести эту систему анализа рассуждений к классической системе.

В большинстве публикаций о пересматриваемых рассуждениях используются термины из арсенала неклассических логик. На взгляд авторов, для многих подобных примеров можно найти интерпретацию, которая сводит «неклассическую» составляющую в теории пересматриваемых рассуждений к нулю. Например, если трактовать пересматриваемые правила вывода как гипотезы, то удается без нарушения законов классической логики выполнять классический логический анализ разных систем, в том числе систем с гипотезами, и осуществлять сравнительный семантический анализ полученных результатов.

Один из доводов в пользу применения неклассических логик для анализа пересматриваемых рассуждений состоит в том, что в классической теории логического вывода единственным критерием некорректности является формальное противоречие, когда из посылок выводимо некоторое следствие и его отрицание. В то же время в повседневной практике рассуждений известны и часто применяются другие критерии некорректности. В основном они относятся к семантике рассуждений (искажение смысла, несоответствие выводимых следствий бесспорным фактам и т.д.). Ниже предлагается для выявления подобных некорректностей использовать вместо неклассических логик разработанный авторами метод на основе коллизий.

В настоящей работе представлена система пересматриваемых рассуждений, в которой «неклассическая» составляющая переносится в семантику, а сам логический анализ осуществляется без нарушений законов классической логики. В качестве аппарата используется алгебра кортежей (АК) [2, 3]. Выбор обусловлен не только предпочтениями авторов, но и тем, что при ис-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 11-08-00641, 12-07-00550-а, 12-07-00689-а, 13-07-00318-а), ОНИТ РАН (проект 2.3 в рамках текущей Программы фундаментальных научных исследований) и Президиума РАН (проект 4.3 Программы № 16).

пользовании алгебраического подхода упрощается интерпретация и семантический анализ моделируемой ситуации.

1. Особенности дедуктивного анализа в АК

1.1. Основные термины и структуры АК

По АК имеется много публикаций, наиболее подробная – работа [2], поэтому здесь дано лишь краткое описание основных терминов и структур. АК базируется на свойствах декартовых произведений и представляет собой алгебру многоместных отношений.

Отношения в АК можно представить с помощью четырех типов структур (о них далее), называемых *АК-объектами.* Каждый АК-объект погружен в определенное пространство *атрибутов*. Имена АК-объектов содержат идентификатор, к которому добавляется заключенная в прямые скобки последовательность имен атрибутов, определяющих *схему отношения*, в которой задан этот АК-объект. Например, запись $R[XYZ]$ означает, что пространство атрибутов АК-объекта R есть X, Y и Z.

АК-объекты являются сжатым отображением многоместных отношений. При необходимости их можно с помощью определенных алгоритмов преобразовать в обычные многоместные отношения, состоящие из множеств кортежей элементов (в АК эти кортежи называются *элементарными кортежами*). Декартово произведение доменов атрибутов, содержащихся в схеме отношения данного АК-объекта, называется *частным универсумом*.

Однотипные АК-объекты – это структуры, заданные в одном пространстве атрибутов. В АК можно выполнять все теоретико-множественные операции не только с однотипными отношениями, но и с отношениями, имеющими разные схемы.

АК-объекты (C-кортеж, C-система, D-кортеж, D-система) формируются в виде матриц из подмножеств доменов атрибутов, называемых *компонентами*. В их число входят две *фиктивные компоненты*: *полная компонента* (обозначается «*») – это множество, равное домену соответствующего (по месту ее расположения в кортеже) атрибута; *пустое множество* – $\varnothing$.

Перейдем к описанию основных структур АК – C-систем и D-систем. *C-система* записывается в виде матрицы, состоящей из компонент-множеств и ограниченной прямыми скобками. Например,

$$R[XYZ] = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix}$$

есть C-система, ее можно преобразовать в обычное отношение следующим образом: $(A_1 \times A_2 \times A_3) \cup (B_1 \times B_2 \times B_3)$. С помощью C-систем удобно представлять дизъюнктивные нормальные формы конечных предикатов. C-систему, состоящую из одной строки, будем называть *C-кортежем* (аналог вектора-строки в алгебре матриц). В логике C-кортежу соответствует отдельный конъюнкт.

С помощью *D-систем* в АК моделируются конъюнктивные нормальные формы конечных предикатов. D-система обозначается матрицей компонент-множеств, ограниченной перевернутыми прямыми скобками. D-системы позволяют легко вычислять дополнение C-систем. Например, дополнением C-системы

$$T[XYZ]=\begin{bmatrix} A & * & C \\ D & E & * \end{bmatrix}$$

является D-система $\overline{T}\,[XYZ]= \left]\begin{matrix} \overline{A} & \varnothing & \overline{C} \\ \overline{D} & \overline{E} & \varnothing \end{matrix}\right[$.

D-систему $\overline{T}$ можно представить в виде обычного отношения по формуле:

$$((\overline{A} \times Y \times Z) \cup (X \times Y \times \overline{C})) \cap ((\overline{D} \times Y \times Z) \cup (X \times \overline{E} \times Z)).$$

D-систему, состоящую из одной строки, будем называть *D-кортежем*. В логике D-кортежу соответствует отдельный дизъюнкт.

Правила выполнения операций объединения и пересечения для C- и D-структур имеют свою специфику, они подробно описаны в [2, 3].

Отметим, что в АК для выполнения всех теоретико-множественных операций и проверок отношений (равенства, включения и т.д.) нет необходимости преобразовывать АК-объекты во множество элементарных кортежей – все операции выполняются с матричными формами. Наличие или отсутствие заданного элементарного кортежа для любого типа АК-объектов проверяется с помощью алгоритмов полиномиальной сложности [2].

Для выполнения операций с АК-объектами, имеющими разные схемы отношений, вводятся *операции с атрибутами,* в частности, *добавление фиктивного атрибута* (+*Atr*) и *элиминация атрибута* (–*Atr*). Операция +*Atr* соответствует *правилу обобщения* в исчислении предикатов, поэтому семантика отношений при ее выполнении не нарушается. Операция производится добавлением имени нового атрибута в схему отношения АК-объекта и нового столбца с фиктивными компонентами – в матричное представление. Например, пусть

$$R_k[XZ] = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{bmatrix}.$$

Если это отношение моделирует предикат $R_k(x, z)$, то добавление фиктивного атрибута Y в $R_k[XZ]$ соответствует формуле $\forall y(R_k(x, z))$. В АК добавление атрибута Y дает:

$$+Y(R_k[XZ]) = \begin{bmatrix} A_1 & * & A_3 \\ B_1 & * & B_3 \end{bmatrix}.$$

Операция +*Atr* часто используется для приведения разнотипных АК-объектов к одной схеме отношения, после чего можно, применяя стандартные алгоритмы АК, выполнять все необходимые операции и проверки. С учетом этого введены *обобщенные операции* ($\cap_G$, $\cup_G$ и операция дополнения), которые семантически соответствуют логическим связкам конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Доказано, что алгебра отношений с обобщенными операциями изоморфна обычной алгебре множеств. Тем самым в теории отношений было снято ограничение, что законы алгебры множеств выполняются только для отношений, определенных на одном и том же декартовом произведении.

1.2. Теоретико-множественные свойства логического вывода

В теоретических основах АК [2] разработаны алгебраические методы решения следующих задач дедуктивного анализа:

• проверка корректности определенного следствия B для заданных посылок A_i;

• вывод возможных следствий из заданных посылок A_i с учетом семантических ограничений (например, наличие в следствии определенных переменных или их сочетаний, минимизация состава значащих переменных в следствии и т.д.).

Решение таких задач в АК основано не на правилах вывода, оптимальный порядок применения которых заранее трудно предсказать, а на определенных типовых алгоритмах. Формулы классической логики, представляющие посылки и следствия, выражаются в виде АК-объектов, с которыми можно выполнять обобщенные операции и осуществлять проверку обобщенных соотношений равенства ($=_G$) и включения ($\subseteq_G$). Переход к алгебраическому представлению становится понятным, если учесть, что АК-объекты моделируют область истинности логических формул. Тогда алгоритм проверки правильности следствия B для заданных посылок A_i при использовании разнотипных структур АК заключается в вычислении обобщенных пересечений и проверке обобщенного включения:

$$(A_1 \cap_G \ldots \cap_G A_n) \subseteq_G B. \quad (1)$$

Установлено, что все правила логического вывода в математической логике и в натуральном исчислении Генцена [4] при преобразовании посылок и заключения в структуры АК удовлетворяют соотношению (1). Согласно (1), вывод совокупности следствий $\{B_j\}$ из посылок A_i в АК можно выполнять, используя соотношение: для любого B_j справедливо $A \subseteq B_j$, где $A = A_1 \cap_G \ldots \cap_G A_n$. Значит, корректное следствие из системы посылок A_i моделируется АК-объектом, являющимся надмножеством A. Для его построения пригодны несколько методов. Здесь приведем лишь некоторые из них.

1) Вычисление проекций АК-объекта A наиболее просто выполнить, когда A является C-системой. Тогда B_j получаются элиминацией атрибутов из A. Этот метод позволяет формировать следствия с заданным набором атрибутов.

2) Если A представлено D-системой, то возможны два метода. В первом A преобразуется в C-систему, после чего следствия формируются по предыдущему методу. Недостаток в том, что алгоритм преобразования D-системы в C-систему в общем случае экспоненциален по сложности, и при большой размерности A требуются значительные вычислительные ресурсы.

3) Для A, выраженного D-системой, второй, полиномиальный по сложности, метод нахождения следствий состоит в удалении некоторых строк из матричного представления A. Для получившихся B_j обязательно выполняется соотношение $A \subseteq B_j$, однако в этом методе нелегко

сформировать следствия с заданным набором атрибутов.

Рассмотрим пример. Даны посылки $x \vee y$ и $y \rightarrow z$. Можно ли из этих посылок вывести формулу, содержащую только переменные x и z? Переведем посылки в структуры АК:

$$A_1[XY] =]\{1\}\ \{1\}[;\quad A_2[YZ] =]\{0\}\ \{1\}[.$$

Вычислим

$$A[XYZ]=A_1[XY] \cap_G A_2[YZ] =$$

$$=]\{1\}\ \{1\}\ \varnothing[\cap_G]\varnothing\ \{0\}\ \{1\}[= \left]\begin{matrix} \{1\} & \{1\} & \varnothing \\ \varnothing & \{0\} & \{1\} \end{matrix}\right[.$$

Теперь необходимо вычислить проекцию $[XZ]$ для $A[XYZ]$. Поскольку A – D-система, то вначале преобразуем D-систему в C-систему согласно методу 2.

В результате имеем:

$$A[XYZ] = \begin{bmatrix} \{1\} & \{0\} & * \\ * & \{1\} & \{1\} \end{bmatrix}.$$

Для нахождения проекции, содержащей атрибуты X и Z, элиминируем из $A[XYZ]$ атрибут Y. Тогда получим:

$$B[XZ] = \begin{bmatrix} \{1\} & * \\ * & \{1\} \end{bmatrix},$$

что соответствует логической формуле $x \vee z$. Таким образом, доказана справедливость вывода $(x \vee y) \wedge (y \rightarrow z) \models x \vee z$.

Доказательства корректности рассмотренных методов получения следствий приведены в [2]. Предложенная система вывода позволяет легко строить следствия, содержащие только заданный набор атрибутов (переменных), либо обосновывать невозможность такого построения. Решение такой же задачи с использованием правил вывода осуществимо лишь полным перебором вариантов.

С помощью соотношения (1) можно определить число всех возможных следствий из набора посылок. Предположим, что система посылок A_i, выраженных АК-объектами, задана в пространстве атрибутов $X_1, X_2,\ldots,X_n$ с конечным числом значений в каждом, и каждый АК-объект в этом пространстве состоит из компонент, представленных определенными множествами. Методы, изложенные в [2], позволяют рассчитать число элементов (элементарных кортежей) $|\boldsymbol{U}|$ в универсуме $\boldsymbol{U} = X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ и в АК-объекте A, полученном как результат обобщенного пересечения посылок A_i.

Теорема 1. Число возможных следствий из посылок A_i равно 2^N, где $N = |\boldsymbol{U}| - |A|$, а $A = A_1 \cap_G \ldots \cap_G A_n$.

Доказательство. Из (1) ясно, что любой АК-объект $B = A \cup S$, где S – произвольное подмножество множества элементарных кортежей в $\boldsymbol{U} \setminus A$, есть следствие множества посылок A_i. Значит, общее число следствий в точности равно числу всех подмножеств множества $\boldsymbol{U} \setminus A$. Из равенства $|\boldsymbol{U} \setminus A| = |\boldsymbol{U}| - |A|$ следует справедливость утверждения. *Конец доказательства*.

Рассмотрим некоторые возможности применения методов АК в базах знаний, где часто используются посылки или правила, сформулированные в форме утверждений типа «если…, то…». Знания такого формата тоже можно выразить в виде АК-объектов. Например, пусть в некоторой системе сформулировано правило:

R_k: Если параметр X принимает значение a или b, а параметр Y – значение f, то система переходит в состояние h.

Если известны множества всех значений атрибутов $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{d, e, f\}$ и состояний системы $Z = \{g, h\}$, то заданное правило можно выразить АК-объектом с помощью следующих вычислений. Условие правила выражается C-кортежем $C[XY] = [\{a, b\}\ \{f\}]$, а заключение – C-кортежем $D[Z] = [\{h\}]$, и вычисляется $R_k[XYZ] = \overline{C[XY]} \cup_G D[Z] =]\{c\}\ \{d, e\}\ \varnothing[\cup [*\ *\ \{h\}]$.

После преобразования D-кортежа $\overline{C[XY]}$ в C-систему получим:

$$R_k[XYZ] = \begin{bmatrix} \{c\} & * & * \\ \{a,b\} & \{d,e\} & * \\ * & * & \{h\} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим, как работает правило. Если в базу данных поступили факты $X = b$ и $Y = f$, то для применения правила $R_k[XYZ]$ формируется C-кортеж $C_1[XY] = [\{b\}\ \{f\}]$ и находится обобщенное пересечение $C_1[XY] \cap_G R_k[XYZ] = [\{b\}\ \{f\}\ \{h\}]$, из которого однозначно определяется состояние системы. Для фактов, не соответствующих условию правила $R_k[XYZ]$, например, $X = b$ и $Y = d$, применение этого правила даст неопределенный результат:

$$C_2[XY] = [\{b\}\ \{d\}];\ C_2[XY] \cap_G R_k[XYZ] = [\{b\}\ \{d\}\ *].$$

Особенности и наглядность алгебраического подхода к логическому выводу позволяют предложить методы качественной оценки получаемых следствий. В формуле (1) АК-объект

$A = A_1 \cap_G \ldots \cap_G A_n$ можно считать *наименьшим* (по объему понятий) *следствием*, поскольку любое уменьшение объема A ведет к невыводимости полученного АК-объекта из $\{A_i\}$. Для вывода следствия, отличающегося от наименьшего, необходимо увеличить объем A – это согласуется также с правилом введения дизъюнкции в натуральном исчислении [4]. Однако многое из того, что выходит за пределы A, повышает неопределенность выводимых знаний. Например, в наименьшем следствии содержится однозначное утверждение «Студент Петров заслуживает пятерки по математике», но формально правильным следствием будет и утверждение «Студент Петров заслуживает пятерки по математике или студент Петров заслуживает удовлетворительной оценки по математике». Расширение A при формировании следствий из посылок $\{A_i\}$, по-видимому, может быть полезно, когда нужно выполнить индуктивное обобщение по некоторым атрибутам – в АК для этого вычисляются проекции A. Так, в приведенном выше примере вывода формулы $x \vee z$ из формул $x \vee y$ и $y \to z$ в АК-объекте

$$A[XYZ] = \begin{bmatrix} \{1\} & \{0\} & * \\ * & \{1\} & \{1\} \end{bmatrix}$$

для каждого из значений атрибута Y представлены не все варианты соотношения $x \vee z$, а при элиминации атрибута Y получается полный набор вариантов.

2. Коллизии в рассуждениях

При переходе к рассуждениям, в которых существен анализ некорректностей (например, несоответствие результатов фактам или общепринятым утверждениям), оказывается, что некорректности в современной классической логике регламентируются только формальной противоречивостью, когда из посылок выводится одновременно следствие и его отрицание. Это слишком сильное ограничение, и многие ситуации, которые в повседневной практике рассматриваются как противоречие или парадокс, не являются формальным противоречием.

Примером может быть вывод из некоторых заданных посылок двух утверждений: «Все страусы летают» и «Все страусы не летают». Здесь нет формального противоречия, поскольку формальное отрицание первого утверждения – это высказывание “Существуют страусы, которые не летают”. В то же время анализ показывает, что из заданных посылок выводится утверждение о том, что страусов не существует. Но действительно ли для анализа ситуаций такого рода следует использовать неклассическую логику? По мнению авторов, предпочтительнее проверять систему рассуждений не на формальную противоречивость, а анализировать с точки зрения нарушения тех или иных семантических ограничений. В частности, для данного примера семантическая некорректность рассуждения очевидна, поскольку существование страусов не подлежит сомнению.

Если рассматривать не отдельные суждения, а схемы суждений вида “Все S есть P” и “Все S не есть P”, то в зависимости от конкретного смысла понятий S и P возможны различные варианты: a) оба высказывания истинны при пустоте понятия S; b) одно из них ложно; c) оба ложны. Получается, что сделать вывод о несовместности системы посылок, из которых выводятся два рассмотренных утверждения, можно только исходя из анализа смысла суждений.

В качестве обобщенного признака семантической некорректности мы предлагаем использовать термин «коллизия». Он впервые применен при анализе рассуждений типа полисиллогистики [5]. Тогда были определены три типа коллизий (парадокса, цикла и неадекватности).

Коллизия парадокса распознается как вывод из посылок суждения типа "все A не есть A", откуда следует, что $A = \varnothing$.

Коллизия цикла характеризует ситуацию, когда из посылок выводится соотношение типа $A \subseteq B \subseteq \ldots \subseteq A$, что означает эквивалентность терминов, входящих в данный цикл.

Третий тип коллизий распознается не на самой модели, а только в сравнении с моделируемым объектом. Если можно установить, что полученные следствия не соответствуют некоторым бесспорным фактам или обоснованным утверждениям, то данная семантическая некорректность называется *коллизией неадекватности*.

В отличие от формального противоречия, коллизия не всегда означает семантическую некорректность. Например, для некоторой моделируемой системы полученное в результате вывода равенство $R = \varnothing$ интерпретируется как отрицание существования объекта R, без которого функционирование данной системы не-возможно. В другой системе, где существование R не обязательно, это же равенство дает новую информацию о моделируемой системе. В первом случае система посылок требует изменений, во втором – полученный результат уточняет наше знание. Аналогично коллизия цикла в одних случаях указывает на семантическую некорректность (некоторые объекты, входящие в цикл, для данной системы не должны быть эквивалентными), в других – уточняет соотношения между объектами.

Рассмотрим пример распознавания коллизии парадокса в структурах АК. В закрытом ящике находятся предметы, описываемые формой (шар или куб), цветом (белый или красный) и материалом (пластмасса или дерево) Необходимо определить, какие типы предметов могут находиться в ящике, если известно: 1) все шары красного цвета; 2) все деревянные предметы окрашены в белый цвет; 3) все пластмассовые предметы не являются шарами.

Обозначим S – шары, W – белые; P – пластмассовые предметы. Запишем условия задачи на языке логики высказываний: 1) $S \to \overline{W}$; 2) $\overline{P} \to W$; 3) $P \to \overline{S}$.

Теперь выразим посылки на языке АК, сопоставляя переменным S, W, Z атрибуты X_S, Y_W, Z_P соответственно:

$$T[X_S Y_W Z_P] = \left]\begin{matrix} \{0\} & \{0\} & \varnothing \\ \varnothing & \{1\} & \{1\} \\ \{0\} & \varnothing & \{0\} \end{matrix}\right[.$$

После преобразования T в C-систему найдем:

$$T[X_S Y_W Z_P] = \begin{bmatrix} \{0\} & \{1\} & * \\ \{0\} & \{0\} & \{1\} \end{bmatrix}.$$

В результате получена C-система, где первый столбец содержит только одноэлементную компоненту $\{0\}$. Это и есть признак коллизии парадокса $S \supset \overline{S}$. Действительно, выражению $(S \supset \overline{S}) = \overline{S} \vee \overline{S} = \overline{S}$ в АК сопоставляется C-кортеж $R[X_S Y_W Z_P] = [\{0\} * *]$, а значит, коллизия $S \supset \overline{S}$ есть следствие исходной системы посылок.

Выявление коллизии парадокса в приведенной системе рассуждений означает, что в ящике нет шаров, а все предметы имеют форму куба.

Понятие коллизии было распространено и на логические системы, выходящие за рамки силлогистики [2]. Примерами коллизий в этих системах могут быть следующие ситуации:

• при вводе новых знаний различные атрибуты становятся тождественными по составу элементов, что в некоторых случаях противоречит семантике системы (аналог коллизии цикла);

• несоответствие полученных результатов трудно формализуемым ограничениям, описанным или подразумеваемым при постановке задачи (например, ограничения требуют, чтобы в разных атрибутах с одинаковыми доменами не содержались одни и те же значения).

Трудно предусмотреть заранее все возможные разновидности коллизий – в некоторых системах они могут быть уникальными. Предложим следующее краткое их определение в АК.

Коллизия – это свойство АК-объекта, наличие которого в зависимости от смыслового значения атрибутов, входящих в АК-объект, может свидетельствовать о семантической некорректности рассуждения.

Роль коллизий в АК сходна с конфликтами «опровержение» и «подрыв» [1, 6]. В [1] даны их определения, из которых ясно, что «…при *опровержении* некоторые полученные аргументы опровергают выводы ранее полученных рассуждений», а при *подрыве* один аргумент отрицает связь между посылками и заключением другого аргумента.

Рассмотрим пример из [1]. Для роста ВВП нужно увеличивать объемы производства. Один из способов увеличения – привлечение иностранных инвестиций. Однако это ведет к потере контроля государства над деятельностью предприятия, что недопустимо для предприятий, занятых в военно-промышленном комплексе. Имеются компании ВАЗ и “Сокол”, последняя из них является предприятием ВПК. Возможно ли привлечение иностранного капитала в эти компании?

Анализ примера показывает, что «аргумент ***~Иностранные_инвестиции (Сокол)*** поражает аргумент ***Иностранные_инвестиции (Сокол)***» (первый аргумент имплицирует второй). Отсюда следует, что речь в данном случае идет о коллизии парадокса. Но содержание коллизий значительно шире. Они во многих случаях позволяют уточнить ситуацию, вызывающую опровержение или подрыв, или обнаружить семантические некорректности, не соответствующие формальным схемам опровержения и подрыва.

Данный пример может также служить иллюстрацией преобразования неклассической схемы вывода в классическую. Авторы [1] предлагают в качестве пересматриваемого правила вывода использовать предложение, которое на естественном языке формулируется так: «если необходимо увеличить производство предприятия, то нужно привлечь иностранные инвестиции». Назвав данное правило гипотезой, а негативный результат его применения к определенному предприятию – коллизией, получим, что все операции логического вывода соответствуют классической схеме вывода, а возникающие при этом конфликты относятся уже к семантическому анализу.

Рассмотрим еще один пример из [7]. Речь там идет о так называемом парадоксе Никсона, в котором утверждается, что президент Никсон был одновременно квакером (т.е. по умолчанию пацифистом) и республиканцем (т.е. по умолчанию не пацифистом). В [7] этот парадокс выражен с помощью заданных по умолчанию правил типа P: $J_1,\ldots,J_n$ / C, где P – предпосылка, C – заключение, а $J_1,\ldots,J_n$ – обоснования: если можно доказать, что любое из них ложно, то заключение вывести нельзя. Тогда парадокс выражается с помощью одного утверждения (S) и двух правил с умолчаниями – (R1) и (R2):

(S) $Republican(Nixon) \wedge Quaker(Nixon)$

(R1) $Republican(x)$: $\neg Pacifist(x)$ / $\neg Pacifist(x)$

(R2) $Quaker(x)$: $Pacifist(x)$ / $Pacifist(x)$

В то же время, если использовать рассмотренный выше подход, этот парадокс можно сформулировать как утверждение (S), а вместо правил вывода с умолчаниями проверить гипотезу: (H) $(Republican(x) \supset \neg Pacifist(x)) \wedge (Quaker(x) \supset Pacifist(x))$.

Выразим посылку (S) и гипотезу (H) посредством АК-объектов и найдем их обобщенное пересечение, выбрав следующие атрибуты; *N – Nixon, R – Republican*, *Q – Quaker*, *P – Pacifist*. Учитывая, что предложение (S) можно выразить в виде формулы $(Nixon \supset Republican) \wedge (Nixon \supset Quaker)$, получим следующие АК-объекты для (S) и (H):

$$\mathrm{S}[NRQ] = \left]\begin{matrix} \{0\} & \{1\} & \varnothing \\ \{0\} & \varnothing & \{1\} \end{matrix}\right[;$$

$$\mathrm{H}[RQP] = \left]\begin{matrix} \{0\} & \varnothing & \{0\} \\ \varnothing & \{0\} & \{1\} \end{matrix}\right[.$$

Далее выполним вычисления:

$\mathrm{S}[NRQ] \cap_G \mathrm{H}[RQP] =$

$$= \left]\begin{matrix} \{0\} & \{1\} & \varnothing & \varnothing \\ \{0\} & \varnothing & \{1\} & \varnothing \end{matrix}\right[\cap \left]\begin{matrix} \varnothing & \{0\} & \varnothing & \{0\} \\ \varnothing & \varnothing & \{0\} & \{1\} \end{matrix}\right[=$$

$$= \begin{bmatrix} \{0\} & \{0\} & * & \{1\} \\ \{0\} & * & \{0\} & \{0\} \end{bmatrix}.$$

В полученной *C*-системе атрибут *Nixon* представлен только негативными значениями, что соответствует коллизии парадокса для этого атрибута. Появление коллизии свидетельствует о семантической некорректности, поэтому возникает необходимость уточнить правильность утверждения (S) или гипотезы (H), используя дополнительную информацию, т.е., по сути, выполнить семантический анализ ситуации.

Целесообразность использования коллизий в пересматриваемых рассуждениях диктуется следующими соображениями:

1) по содержанию коллизии более широки и более конкретны по сравнению с ситуациями, моделируемые средствами немонотонных логик, поэтому их использование позволяет осуществить семантический анализ информации в большем объеме;

2) соединение различных логик в одну систему логического анализа связано с рядом трудностей. В частности, отмечается [7], что для систем с большим числом правил по умолчанию трудно определить приемлемое множество таких правил, что ведет к потере модульности;

3) трудности использования немонотонных логик для анализа пересматриваемых рассуждений привели многих исследователей к выводу о необходимости «продумать, как внедрить средства формирования рассуждений по умолчанию в теорию вероятностей» [7]. В АК эта проблема в общем случае решена: разработаны методы погружения логических моделей в вероятностное пространство [2, 8].

3. Анализ гипотез и абдуктивных заключений

Использование коллизий позволяет дать формальное определение гипотез в терминах АК. Пусть задана система посылок $A_1, \ldots, A_n$, представленных АК-объектами, и вычислен АК-объект $A = A_1 \cap_G \ldots \cap_G A_n$.

Гипотезой называется АК-объект H, удовлетворяющий условию: $A \subseteq_G H$ не подтверждается (в противном случае в соответствии с (1) H есть следствие);

Гипотеза *корректна*, если:

• $A \cap_G H \neq \varnothing$ (новая система посылок непротиворечива);

• выявление коллизий в новой системе посылок не свидетельствует о ее семантической некорректности.

Рассмотрим пример. В занимательной книге известного логика Раймонда Смаллиана [9] есть серия задач об узнике, который должен был, используя определенные подсказки, узнать, в какой из комнат находится принцесса, и открыть эту комнату. Однако, по крайней мере, в одной из комнат находился тигр, встреча с которым явно нежелательна. В то же время встреча с принцессой сулит узнику не только освобождение, но и возможность жениться на принцессе. Решаемой ниже задачи в книге Р. Смаллиана нет, но ситуация аналогичная.

Перед узником три комнаты. В одной из них – тигр, в другой – принцесса, а третья пуста. Даны две подсказки: одна из них истинная, а другая - ложная, но какая именно – неизвестно.

Подсказка 1: во второй комнате нет тигра, а третья комната не пуста.

Подсказка 2: первая комната не пуста, а во второй нет тигра.

Будем считать, что коллизия возникает, когда в разных комнатах оказывается одинаковое содержимое (например, тигры находятся в первой и третьей комнатах). Выразим подсказки в виде C-кортежей. Для этого введем обозначения: P – в комнате принцесса; T – в комнате тигр; E – комната пуста. Тогда подсказки M_1 и M_2 моделируются C-кортежами:

$$M_1 = [* \ \{P, E\} \ \{P, T\}];\ M_2 = [\{P, T\} \ \{P, E\} \ *].$$

Для решения задачи достаточно исследовать две гипотезы:

Гипотеза 1: M_1 – истинно; M_2 – ложно;

Гипотеза 2: M_1 – ложно; M_2 – истинно.

Рассмотрим первую из них. Ее можно описать следующими выражениями:

$$\overline{M_2} =]\{E\} \ \{T\} \ \varnothing[= \begin{bmatrix} \{E\} & * & * \\ * & \{T\} & * \end{bmatrix};$$

$$M_1 \cap \overline{M_2} = [* \ \{P, E\} \ \{P, T\}] \cap \begin{bmatrix} \{E\} & * & * \\ * & \{T\} & * \end{bmatrix} =$$
$$= [\{E\} \ \{P, E\} \ \{P, T\}].$$

Если вычислить декартово произведение $\{E\}\times\{P, E\}\times\{P, T\}$, то увидим, что из четырех полученных элементарных кортежей только один – (E, P, T) не является коллизией. Следовательно, принцесса во второй комнате.

Теперь проверим вторую гипотезу.

$$\overline{M_1} =]\varnothing \ \{T\} \ \{E\}[= \begin{bmatrix} * & \{T\} & * \\ * & * & \{E\} \end{bmatrix}.$$

$$\overline{M_1} \cap M_2 = \begin{bmatrix} * & \{T\} & * \\ * & * & \{E\} \end{bmatrix} \cap [\{P, T\} \ \{P, E\} \ *] =$$
$$=[\{P, T\} \ \{P, E\} \ \{E\}].$$

Здесь условиям задачи удовлетворяет элементарный кортеж (T, P, E), который хоть и отличается от полученного ранее, но оставляет неизменным местонахождение принцессы. Таким образом, обе гипотезы приводят к одному результату: принцесса во второй комнате.

Теперь обсудим методы формализации абдуктивных заключений в АК.

Абдукция – это процесс формирования объясняющей гипотезы, когда известны посылки и предполагаемое следствие, которое при формальной проверке не следует из посылок, но, тем не менее, подтверждается фактами или обоснованными аргументами. Типичная область применения абдукции – задача диагностики.

Классический пример абдукции – открытие нейтрино. Предполагалось, что одним из результатов эксперимента, связанного с изучением бета-распада, будет выполнение закона сохранения энергии. Однако расчеты показали, что при бета-распаде этот закон не соблюдается. Физик В. Паули в 1930 г. предложил гипотезу о существовании некоторых "невидимых" частиц, которые образуются в ходе бета-распада и забирают часть энергии. В 1932 г. Э. Ферми назвал эту частицу "нейтрино". Экспериментально существование нейтрино (точнее, его двойника – антинейтрино) было подтверждено лишь в 1953 г.

Дадим формальное определение абдукции. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ – посылки, выраженные в виде АК-объектов, из которых предположительно должно следовать утверждение B. При этом оказывается, что соотношение $A \subseteq_G B$, где $A = A_1 \cap_G \ldots \cap_G A_n$, не подтверждается. Тогда формула H будет *абдуктивным заключением*, если соблюдаются два условия:

- H – корректная гипотеза;
- $(H \cap_G A) \subseteq_G B$, т.е. при добавлении H в систему посылок предполагаемое следствие B становится выводимым.

Дадим интерпретацию абдукции с помощью диаграмм Эйлера (она допустима, поскольку обобщенные операции и отношения в АК изоморфны обычным операциям и отношениям алгебры множеств). Когда B не подтверждается как следствие A, т.е. не верно, что $A \subseteq_G B$, то возможны два варианта: пересечение этих множеств пусто или не пусто (Рис. 1). Обозначим заштрихованную часть A, равную $A \setminus_G B$, как R (выражение с обобщенной операцией разности $\setminus_G$ эквивалентно выражению $A \cap_G \overline{B}$).

Вариант справа на Рис. 1 вырожденный. В таком случае любое добавление посылок ни к чему не приведет. При непустом пересечении A и B (левая часть рисунка) для вычисления абдуктивного заключения (гипотезы) H_i необходимо найти область R_i такую, что $R \subseteq_G R_i$, и вычислить ее дополнение, т.е. $H_i = \overline{R_i}$.

Пусть R_i – некоторое надмножество R (на Рис. 2 оно ограничено штриховой линией), тогда допустимы два случая.

В первом случае (на Рис. 2 слева) R_i не охватывает полностью A, поэтому пересечение $\overline{R_i} \cap_G A$ дает непустое множество, включенное в B, и $\overline{R_i}$ будет допустимым абдуктивным заключением. Вырожденный случай, когда $\overline{R_i} \cap_G A = \varnothing$, показан на Рис. 2 справа. Здесь R_i полностью покрывает не только R, но и A. К такой ситуации применимо правило Дунса Скотта: из лжи можно вывести все, что угодно. Поэтому при формировании R_i надо не только обеспечивать $R \subseteq_G R_i$, но и следить за тем, чтобы не выполнялось $A \subseteq_G R_i$.

С учетом сказанного сформируем следующий ***Алгоритм поиска абдуктивных заключений:***

- вычислить «остаток» $R = A \setminus_G B$;
- построить промежуточный объект R_i такой, чтобы соблюдалось $R \subseteq_G R_i$;
- вычислить $H_i = \overline{R_i}$ (тогда R_i далее можно обозначить как $\overline{H_i}$);
- вычислить $H_i \cap_G A$ и принять или отвергнуть гипотезу по правилам, описанным в начале данного раздела.

Рассмотрим пример [10]. Проверить правильность логического вывода для следующего рассуждения: "Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство имело место после полуночи. Если убийство имело место после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Следовательно, Смит был убийцей".

Сначала выразим данное рассуждение на языке исчисления высказываний. Введем обозначения: A – Джонс встречал этой ночью Смита;

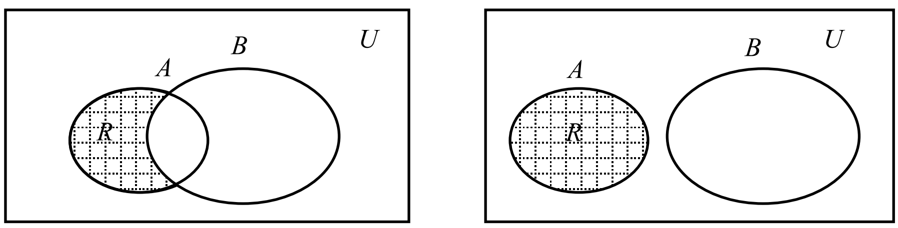

Рис. 1. Соотношения между посылками (A) и не выводимыми следствиями (B)

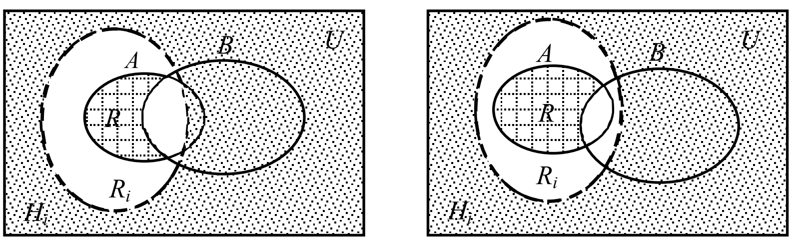

Рис. 2. Варианты ситуаций при выборе гипотез

B – Смит был убийцей; C – Джонс лжет; D – убийство имело место после полуночи. Тогда после преобразования каждого из предложений в ДНФ получим такие формулировки:

– для первого предложения:

$A \vee (B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C)$;

– для второго предложения: $B \vee (\neg A \wedge D)$;

– для третьего предложения:

$\neg D \vee (B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C)$;

– для следствия: B.

Чтобы представить эти формулы АК-объектами, используем универсум $X_A \times X_B \times X_C \times X_D = \{0, 1\}^4$, где $A = B = C = D = 1$ и $\neg A = \neg B = \neg C = \neg D = 0$. Тогда посылки выражаются C-системами:

$$P_1 = \begin{bmatrix} \{1\} & * & * & * \\ * & \{1\} & \{0\} & * \\ * & \{0\} & \{1\} & * \end{bmatrix}; P_2 = \begin{bmatrix} * & \{1\} & * & * \\ \{0\} & * & * & \{1\} \end{bmatrix};$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} * & * & * & \{0\} \\ * & \{1\} & \{0\} & * \\ * & \{0\} & \{1\} & * \end{bmatrix},$$

а следствие – C-кортежем $S[X_B] = [\{1\}]$.

Решить задачу можно, проверив соотношение $(P_1 \cap_G P_2 \cap_G P_3) \subseteq_G S[X_B]$. Для этого вычислим

$$P[X_AX_BX_CX_D] = P_1 \cap_G P_2 \cap_G P_3 = \begin{bmatrix} \{1\} & \{1\} & * & \{0\} \\ * & \{1\} & \{0\} & * \\ \{0\} & \{0\} & \{1\} & \{1\} \end{bmatrix}.$$

Для проверки включения добавим недостающие атрибуты в S:

$$S[X_AX_BX_CX_D] = [* \ \{1\} * *].$$

Проверка показывает, что третий C-кортеж из P не включен в S, т.е. предполагаемое следствие (Смит был убийцей) невыводимо. Чтобы подтвердить или опровергнуть правильность вывода, требуется уточнить некоторые обстоятельства. Поиск таких обстоятельств можно сформулировать как задачу поиска абдуктивного заключения.

Предположим, что вывод правильный. Тогда необходимо найти гипотезы, пригодные для включения в посылки. Запишем в новых обозначениях промежуточные результаты примера.

Пересечение посылок:

$$A[X_AX_BX_CX_D] = \begin{bmatrix} \{1\} & \{1\} & * & \{0\} \\ * & \{1\} & \{0\} & * \\ \{0\} & \{0\} & \{1\} & \{1\} \end{bmatrix};$$

предполагаемое следствие: $B[X_AX_BX_CX_D] = [* \ \{1\} * *]$.

Далее используем алгоритм

$$R = A \setminus_G B = \begin{bmatrix} \{1\} & \{1\} & * & \{0\} \\ * & \{1\} & \{0\} & * \\ \{0\} & \{0\} & \{1\} & \{1\} \end{bmatrix} \cap_G [* \ \{0\} * *] = [\{0\} \ \{0\} \ \{1\} \ \{1\}].$$

Здесь можно выбрать в качестве R_i любую проекцию R. Пусть это будет $R[X_D]$, тогда $R_i = [* * * \{1\}]$, $H_i = \overline{R_i} = [* * * \{0\}]$.

Поскольку коллизии нам не заданы, проверим, вырождается ли общая предпосылка A при полученной гипотезе:

$$A \cap_G H_i = \begin{bmatrix} \{1\} & \{1\} & * & \{0\} \\ * & \{1\} & \{0\} & * \\ \{0\} & \{0\} & \{1\} & \{1\} \end{bmatrix} \cap_G [* * * \{0\}] = \begin{bmatrix} \{1\} & \{1\} & * & \{0\} \\ * & \{1\} & \{0\} & \{0\} \end{bmatrix}.$$

Проверка подтверждает корректность гипотезы. На естественном языке данная гипотеза означает, что убийство произошло до полуночи. Отсюда следует, что вывод будет правильным, если после уточнения времени убийства окажется, что оно соответствует гипотезе.

Продемонстрируем еще один пример абдуктивного вывода, для этого обратимся к рассмотренному ранее примеру про продукции, но поставим задачу немного иначе. Пусть известно, что база фактов после применения правил должна содержать факт, что $z = h$ ($C_{res}[XYZ] = [* * \{h\}]$). Требуется установить, какие факты изначально содержались в базе фактов ($C_{init}[XY]$). Решение этой задачи опирается на следующее соотношение:

$$R_k[XYZ] \cap_G C_{init}[XY] \subseteq_G C_{res}[XYZ].$$

Выполним вычисления, согласно описанному выше алгоритму:

1. $R_k[XYZ] \cap_G \overline{C_{res}[XYZ]} =$

$$= \begin{bmatrix} \{c\} & * & * \\ \{a,b\} & \{d,e\} & * \\ * & * & \{h\} \end{bmatrix} \cap_G [* * \{g\}] = \begin{bmatrix} \{c\} & * & \{g\} \\ \{a,b\} & \{d,e\} & \{g\} \end{bmatrix}.$$

2. Нас интересует проекция на атрибуты XY:

$$\begin{bmatrix} \{c\} & * \\ \{a,b\} & \{d,e\} \end{bmatrix} =]\{c\}\ \{d,e\}[.$$

3. Тогда $H_i[XY] = \overline{]\{c\}\ \ \{d,e\}[} = [\{a,b\}\ \{f\}]$.

4. Убеждаемся, что $R_k[XYZ] \cap_G H_i[XY] \neq \varnothing$.

Заключение $H_i[XY]$ содержит два ответа на поставленный вопрос: $x = a, y = f$ или $x = b, y = f$.

Заключение

Обсуждаемое в статье понятие коллизии и особенности методов дедуктивных и некоторых видов недедуктивных рассуждений, разработанных в рамках алгебры кортежей, позволяют избежать необходимости привлечения неклассических логик в системы пересматриваемых рассуждений. Предполагается, что такой подход повышает прозрачность механизма рассуждений при сохранении гибкости настройки системы моделирования на различные практические задачи.

Литература

1. Моросин О.Л., Вагин В.Н. Система аргументации для логики предикатов первого порядка // Труды тринадцатой национальной конференции по искусственному интеллекту КИИ-2012. Белгород: Изд-во БГТУ, 2012. Т. 1, с. 34-42.
2. Кулик Б.А., Зуенко А.А., Фридман А.Я. Алгебраический подход к интеллектуальной обработке данных и знаний. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010, 235 с.
3. Зуенко А.А. Унификация обработки данных и знаний на основе общей теории многоместных отношений / А.А. Зуенко, Б.А. Кулик, А.Я. Фридман // Искусственный интеллект и принятие решений, 2010. Вып. 3. С.52-62.
4. Генцен Г. Исследования логических выводов. В кн.: Математическая теория логического вывода, сб. переводов. – М., 1967, с. 9-74.
5. Кулик Б.А. Логика естественных рассуждений. СПб. Невский диалект. 2001. 128 с.
6. Вагин В.Н., Головина Е.Ю., Загорянская А.А., Фомина М.В. Достоверный и правдоподобный вывод в интеллектуальных системах / под ред. В.Н. Вагина, Д.А. Поспелова. 2-е издание дополненное и исправленное. – ФИЗМАТЛИТ, 2008. 712 с.
7. Рассел С., Норвиг П. Искусственный интеллект: современный подход. 2-е изд. / пер. с англ.; ред. К.А. Птицына. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2006. 1408 с.
8. Городецкий А.Е., Кулик Б.А. Вычисление вероятностей логических функций при логико-вероятностном моделировании сложных систем // Математическое моделирование. Т. 25, № 2, 2013, с. 125-136.
9. Смаллиан Р. Принцесса или тигр? М.: Мир. 1985. 221 с.
10. Мендельсон Э. Введение в математическую логику / пер. с англ. Ф.А. Кабакова; под ред. С.И. Адяна. – М.: Наука, 1971. 320 с.

Кулик Борис Александрович. Работает в ИПМаш РАН. Окончил Ленинградский горный институт в 1963 г. Доктор физико-математических наук. Автор 80 печатных работ, в том числе четырех монографий. E-mail**:** ba-kulik@yandex.ru

Зуенко Александр Анатольевич. Научный сотрудник Института информатики и математического моделирования технологических процессов КолНЦ РАН, доцент Кольского филиала Петрозаводского государственного университета. Окончил Петрозаводский государственный университет в 2005 году. Кандидат технических наук. Автор 70 печатных работ, включая 3 монографии. Область научных интересов: системы моделирования на основе открытой концептуальной модели предметной области, представление и обработка знаний. E-mail: zuenko@iimm.kolasc.net.ru

Фридман Александр Яковлевич. Ведущий научный сотрудник Института информатики и математического моделирования технологических процессов КолНЦ РАН, профессор Кольского филиала Петрозаводского государственного университета. Окончил Ленинградский электротехнический институт в 1975 году. Доктор технических наук. Автор 230 печатных работ, включая 4 монографии. Область научных интересов: моделирование комплексных технологий и их воздействия на окружающую среду, прикладные интеллектуализированные системы. E-mail: fridman@iimm.kolasc.net.ru