

Оценка чувствительности линейной свертки частных критериев при экспертном определении весовых коэффициентов

Аннотация. Рассмотрен подход к решению задач многокритериальной оптимизации, основанный на использовании агрегированного критерия в виде линейной свертки частных критериев, где весовые коэффициенты получены на основе ранжирования частных критериев по степени значимости. Предложена процедура, позволяющая оценить изменение оптимального решения при элементарном изменении экспертных суждений. Построен числовой пример.

Ключевые слова: линейная свертка, ранжирование, весовые коэффициенты, малый параметр.

Введение

Многие практически важные задачи оптимизации являются многокритериальными. Это связано с наличием у исследуемой системы многих целей (количественными моделями которых являются критерии), а также с являющимся характерным представлением одной цели несколькими критериями (моделями). Сложность исследования многокритериальных задач оптимизации обусловлена возможным отсутствием наилучшего по всем критериям решения, что приводит (после сужения области поиска до множества парето-оптимальных решений [1, 2]) к нахождению рациональных решений. Особенностью этого подхода является существенная зависимость рациональных решений от способа их получения (лексикографический метод, метод главного критерия, метод последовательных уступок, метод интегрального критерия [2]), что связано с различными предположениями относительно связей между критериями, лежащими в основе этих методов. При этом фактически рассматриваются разные (хотя часто близкие по содержанию) математические постановки задач. Нахождение

рациональных решений можно рассматривать в качестве элемента исследования исходной многокритериальной оптимизационной задачи.

Применение получившего широкое распространение метода агрегированного критерия (в виде линейной свертки) предполагает возможность количественной оценки значимости отдельных (частных) критериев, после чего решается задача скалярной оптимизации для выпуклой линейной комбинации частных критериев. При этом на практике весовые коэффициенты частных критериев определяются с использованием субъективных экспертных суждений, что обуславливает их погрешность. Таким образом, актуальной является задача нахождения интервала возможных изменений этой погрешности.

Целью настоящей работы является определение влияния отклонений экспертных суждений при оценке значимости частных критериев на решение задачи многокритериальной оптимизации методом агрегированного критерия. Незначительность такого влияния (низкая чувствительность) позволила бы уменьшить затраты на организацию экспертиз.

Постановка задачи оценки чувствительности агрегированного критерия

Классическая (без ограничений) задача многокритериальной оптимизации имеет вид:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow \max \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

где целевые функции f_i являются действительными функциями многих переменных:

$$X=(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m.$$

Решение (исследование) задачи (1) методом агрегированного критерия сводится к переходу к задаче скалярной оптимизации относительно линейной свертки частных критериев f_i :

$$F^0 = a^0_1 f_1 + a^0_2 f_2 + \dots + a^0_n f_n \rightarrow \max \quad (2)$$

$$a^0_1, a^0_2, \dots, a^0_n \geq 0, \quad a^0_1 + a^0_2 + \dots + a^0_n = 1$$

Весовые коэффициенты $a^0_1, a^0_2, \dots, a^0_n$, отражающие значимость частных критериев $f_1, f_2, \dots, f_n$, находятся на основе экспертных суждений, изменение которых приводит к весам $a_1, a_2, \dots, a_n$, где $a_i = a^0_i + \varepsilon a^1_i$, $\varepsilon \ll 1$.

Пусть $\langle X^{0*} = (x^{0*}_1, x^{0*}_2, \dots, x^{0*}_m), F(X^{0*}) \rangle$ и $\langle X^* = (x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_m), F(X^*) \rangle$ – оптимальные решения задачи (2) до и после изменений экспертных суждений. Под задачей определения чувствительности решения задачи многокритериальной оптимизации от экспертных суждений будем понимать нахождение отклонений решения оптимизационной задачи (2) при изменении экспертных суждений от соответствующего решения при начальных суждениях:

$$\langle \delta X^*, \delta F(X^*) \rangle = \langle X^*, F(X^*) \rangle - \langle X^{0*}, F^0(X^{0*}) \rangle \quad (3)$$

Если чувствительность решения (в некоторой норме) не превосходит заданной экспертами характерной для предметной области величины (как правило, это общая погрешность входных данных и применяемых расчетных алгоритмов), то это свидетельствует об отсутствии необходимости уточнения экспертных оценок.

Чувствительность в задаче экспертного ранжирования

Командное ранжирование [3, 4] предполагает участие нескольких экспертов, каждый из которых упорядочивает по убыванию значимо-

сти (ранжирует) множество частных критериев, присваивая элементам получившейся последовательности порядковые номера. Обобщением порядкового номера (при нестрогом ранжировании) является понятие ранга (в случае равенства значимости отдельных критериев их ранги полагаются равными среднему арифметическому порядковых номеров). Результирующей ранжировкой частных критериев является совокупность рангов $r_1, r_2, \dots, r_n$, соответствующая номерам критериев, упорядоченных по возрастанию сумм их рангов, выставленных всеми экспертами. На практике используется несколько способов определения весовых коэффициентов на основе ранжировок [5-7], простейший из которых состоит в использовании формулы:

$$a_i = 2(n+1-r_i)/(n^2+n) \quad (4)$$

в рамках которой весовой коэффициент равен отношению соответствующего ранга по убыванию значимости $(n+1-r_i)$ к сумме рангов частных критериев $(n^2+n)/2$.

Рассмотрим групповое упорядочение критериев по возрастанию их рангов (в одну группу входят критерии с одинаковым рангом): $G_1, G_2, \dots, G_t$. Группы G_j являются непустыми, хотя некоторые из них, возможно, состоят только из одного элемента. Под элементарным изменением экспертных суждений в рамках метода ранжирования будем понимать переход некоторого критерия f_k из одной группы G_j в другую соседнюю группу G_{j-1} или G_{j+1} .

Нетрудно видеть, что

- такое изменение, действительно, является наиболее простым (и в этом смысле элементарным);

- любое изменение группового упорядочения критериев может быть представлено в виде суперпозиции элементарных изменений.

Оценим воздействие элементарного изменения на отклонения значений рангов частных критериев.

Будем считать, что начальная результирующая ранжировка критериев составляет: $r^0_1, r^0_2, \dots, r^0_n$. Минимальное изменение оценки значимости критерия f_k в большую (меньшую сторону) приводит к новой ранжировке $r_1, r_2, \dots, r_n$, вид которой зависит от значения r^0_k и начальной ранжировки в целом.

Пусть в рамках начальной ранжировки критерий f_k входил в группу из s других критериев

$\{f_{k-1}, f_{k-2}, \dots, f_{k-s}\}$, имеющих с ним одинаковое значение ранга r_k^0 , а минимальное (элементарное) увеличение ранга этого критерия приводит к его переходу в следующую по значимости группу $\{f_{k+1}, f_{k+2}, \dots, f_{k+t}\}$, содержащую t критериев одинакового ранга r_p^0 . Причем в соответствии с правилом вычисления рангов:

$$r_k^0 = ((k-s) + (k-s+1) + \dots + k) / (s+1) = (2k-s)/2$$

$$r_{k+1}^0 = ((k+1) + \dots + (k+p)) / p = (2k+p+1)/2$$

Переход критерия в следующую группу приводит к новым значениям рангов:

$$r_{k-1} = ((k-s) + (k-s+1) + \dots + k-1) / s+1 = (2k-s-1)/2$$

$$r_k = (k + (k+1) + \dots + (k+p)) / p = (2k+p+1)/2$$

Таким образом, в результате минимального увеличения значимости критерия f_k :

- ранги критериев первой и второй групп уменьшатся на 0,5;
- ранг критерия f_k увеличится на величину $(p+s)/2$;
- ранги остальных критериев не изменятся.

Переход критерия f_k в предыдущую по значимости группу критериев приведет к соответствующему увеличению рангов критериев первой и второй групп на величину 0,5 и уменьшению на $(p+s)/2$ ранга критерия f_k (ранги остальных критериев не изменятся).

Оценим воздействие элементарного изменения на отклонения значений весовых коэффициентов частных критериев в составе интегрального критерия.

В соответствии с формулой (4), при переходе критерия f_k в следующую по значимости группу весовые коэффициенты первой и второй групп критериев увеличатся на величину $1/(n^2+n)$, в то время как весовой коэффициент критерия f_k уменьшится на величину $(p+s)/(n^2+n)$, а остальные весовые коэффициенты не изменятся. Переход критерия в предыдущую группу приведет к обратным результатам.

Оценка чувствительности решения задачи многокритериальной оптимизации от экспертных суждений на основе метода малого параметра

Оценим воздействие элементарного изменения экспертных суждений на отклонение решения оптимизационной задачи. Будем полагать общее количество критериев n достаточно

большим, чтобы значение $\varepsilon = 1/(n^2+n)$ можно было бы использовать в качестве малого параметра. Тогда интегральный критерий и соответствующая ему задача оптимизации (возмущенная по отношению к исходной задаче (2)) могут быть представлены в виде:

$$F = F^0 + \varepsilon F, \quad F^l = (p+s-1)f_k + f_{k-s} + f_{k-s+1} + \dots + f_{k+p} \quad (5)$$

Полученную оптимизационную задачу можно рассматривать как частный случай более общей задачи [8], где был предложен общий подход к получению семейства решений многокритериальных задач оптимизации на основе метода малого параметра.

Решение задачи (5) X^* зависит от малого параметра $\varepsilon \ll 1$. Предположим, что функции многих переменных $f_1, f_2, \dots, f_n$ являются достаточно гладкими, а $F^0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является сильно вогнутой. Это позволяет на основе, так называемой прямой схемы [9-10], используя регулярное разложение решения X^* и соответствующее разложение критерия F в ряд по целым степеням ε , построить серию задач максимизации для членов разложения.

Итак, пусть решение возмущенной оптимизационной задачи имеет вид

$$X^*(\varepsilon) = X^{*0} + \varepsilon X^{*1} + \varepsilon^2 X^{*2} + \dots \quad (6)$$

Тогда, подставляя (6) в (5) и ограничившись линейной (по ε) частью разложения F в ряд по степеням ε , получим две оптимизационные задачи:

1) задача определения X^{*0}

$$X^{*0} = \arg \max \{F^0(X^0)\} =$$

$$= \arg \max \{a^0 f_1(X^0) + a^0 f_2(X^0) + \dots + a^0 f_n(X^0)\} \quad (7)$$

2) задача определения X^{*1}

$$X^{*1} = \arg \max \{(\nabla F^0(X^{*0} + \varepsilon X^1))^T X^1 + F^l(X^{*0} + \varepsilon X^1)\} \quad (8)$$

а, следовательно, (в условиях принятых предположений) X^{*1} ищется из уравнения

$$(X^{*1})^T \nabla^2 F^0(X^{*0}) X^{*1} + (\nabla F^l(X^{*0}))^T X^{*1} = 0$$

где $\nabla^2 F^0(X^{*0})$ – матрица Гессе функции F^0 , а $\nabla F^l(X^{*0})$ – градиент функции F^l , взятые в точке X^{*0} , являющейся решением задачи (7). Необходимо отметить, что задача (8) решается гораздо проще, чем задача вида (7). Таким образом, рассматриваемый подход целесообразно использовать при необходимости решения нескольких задач оптимизации вида (2) незначи-

тельно (на величину порядка ε) различающихся значениями весовых коэффициентов. Именно такая ситуация возникает при рассмотрении возможных отклонений экспертных суждений относительно значимости n частных критериев.

Поскольку задача (7) совпадает с задачей (2), то (с точностью до величин $o(\varepsilon)$):

$$\delta X \approx \varepsilon X^{*1} = -\varepsilon (V^2 F^0(X^{*0}))^{-1} V F^1(X^{*0}) \quad (9)$$

Пример

Рассмотрим в качестве примера исследование чувствительности от экспертных суждений решения многокритериальной оптимизационной задачи, целевые функции которой имеют вид:

$$\begin{aligned} f_1 &= -(x_1)^2 - (x_2)^2 \\ f_2 &= -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2 \\ f_3 &= -(x_1 - 2)^2 - (x_2 - 2)^2 \\ f_4 &= -(x_1 - 4)^2 - (x_2 - 4)^2 \end{aligned}$$

Пусть эксперты в результате командного ранжирования упорядочили рассматриваемые критерии по степени значимости следующим образом: $f_1 > f_2 > f_3 \sim f_4$. Будем считать, что в результате элементарного изменения экспертных суждений увеличилась (сравнилась со значимостью критерия f_2) значимость критерия f_3 , после чего упорядоченная цепочка критериев имеет вид: $f_1 > f_2 \sim f_3 > f_4$. В рамках исследования чувствительности решения оптимизационной задачи требуется определить, не превосходит ли отличие решения, вызванное изменением экспертных суждений погрешности 5% от исходного решения.

Вычислим для каждого ранг и весовые коэффициенты значимости частных критериев до

f_i	f_1	f_2	f_3	f_4
r_i	1	2	3,5	3,5
a_i	0,4	0,3	0,15	0,15

и после изменения суждений

f_i	f_1	f_2	f_3	f_4
r_i	1	2,5	2,5	4
a_i	0,4	0,25	0,25	0,1

Таким образом, при переходе критерия f_3 из одной группы с критерием f_4 в группу с критерием f_2 изменились ранги и весовые коэффициенты только этих трех критериев:

- ранг критерия f_3 уменьшился на $(p+s)/2 = (1+1)/2 = 1$, а весовой коэффициент увеличился на $2/(n^2+n) = 2/(4^2+4) = 0,1$;

- ранги критериев f_2 и f_4 увеличились на $1/2$, а их весовые коэффициенты уменьшились на $1/(n^2+n) = 1/(4^2+4) = 0,05$, что соответствует общим формулам.

Аддитивная свертка частных критериев до изменения экспертных суждений имела вид:

$$F^0 = 0,4 f_1 + 0,3 f_2 + 0,15 f_3 + 0,15 f_4$$

Изменение экспертных суждений привело к новому виду этого интегрального критерия:

$$F = 0,4 f_1 + 0,3 f_2 + 0,15 f_3 + 0,15 f_4 + \varepsilon(-f_2 + 2 f_3 - f_4)$$

где $\varepsilon = 1/(n^2+n) = 1/(4^2+4) = 0,05$.

Решение исходной (до изменения экспертных суждений) оптимизационной задачи (7) состоит в нахождении точки максимума функции

$$\begin{aligned} F^0 &= -x_1^2 + 2(0,3 + 0,15 \cdot 2 + 0,15 \cdot 4)x_1 - \\ &\quad (0,3 + 0,15 \cdot 4 + 0,15 \cdot 16) - x_2^2 + \\ &\quad + 2(0,3 + 0,15 \cdot 2 + 0,15 \cdot 5)x_2 - (0,3 + 0,15 \cdot 4 + 0,15 \cdot 16) = \\ &= -(x_1^2 - 2,4 x_1 + 3,3) - (x_2^2 - 2,4 x_2 + 3,3), \end{aligned}$$

которая (в рамках рассмотренного примера) легко находится: $x^{*(0)}_1 = 1,20$; $x^{*(0)}_2 = 1,20$. Достигаемое в этой точке максимальное значение агрегированного критерия равно $F^{*(0)} = -3,72$.

Решение оптимизационной задачи после изменения экспертных суждений состоит в нахождении точки максимума функции

$$F = F^0 + \varepsilon F^1 = [-(x_1^2 - 2,4 x_1 + 3,3) - (x_2^2 - 2,4 x_2 + 3,3)] + 0,05[2 x_1 + 2 x_2 + 26],$$

которая (в рамках рассмотренного примера) легко находится: $x_1 \approx 1,15$; $x_2 \approx 1,15$. Достигаемое в этой точке максимальное значение агрегированного критерия равно $F \approx -3,59$.

Таким образом, изменение оптимального решения при рассмотренном элементарном изменении экспертных суждений по отношению к исходному решению составило около 4,2 % по значениям каждого из аргументов x_1 и x_2 (δX) и менее 4,5 % по значению функции (δF), что удовлетворяет требованиям задачи оценки чувствительности.

Выводы

Предложенный в работе подход позволяет учесть чувствительность решений многокритериальных оптимизационных задач при измене-

нии экспертных суждений по оценке значимости частных критериев. Выделив критерии, для которых экспертные суждения вызывают определенные сомнения, целесообразно построить соответствующие элементарные изменения суждений и оценить возможные отклонения решений оптимизационных задач. Если полученные отклонения не превосходят требуемую точность оптимального решения, то найденное решение может быть использовано в дальнейших исследованиях. В противном случае необходимо: либо проводить дополнительную экспертизу (повышающую достоверность экспертных суждений), либо выполнять дальнейшее исследование на многовариантной (по числу возможных различных экспертных ранжировок значимости частных критериев) основе.

Литература

1. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
2. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Физматлит, 2007.
3. Петровский А.Б. Теория принятия решений. М.: Издательский центр «Академия», 2009.
4. Литвак Б.Г. Экспертные технологии в управлении. М.: Дело, 2004.
5. Анохин, А.М. Методы определения коэффициентов важности критериев/ А.М. Анохин, В.А. Глотов, В.В. Павельев, А.М. Черкашин //Автоматика и телемеханика, 1997, №8, с3-35.
6. Вовченко, А.И. Автоматизация оценки и прогнозирования технического состояния железнодорожных колесных пар/ А.И. Вовченко, В.А. Ломазов // Информационные системы и технологии, 2010, № 4, с.95-99.
7. Ломазов, В. А. Информационное моделирование и компьютерная селекция проектов в горнодобывающей отрасли / В.А. Ломазов, Д.С. Трубакин // Научные ведомости БелГУ. Сер. История, Политология, Экономика, Информатика, 2011, №1 (96), вып.17/1, с.158-162.
8. Дмитриев, М.Г. Приближенное решение оптимизационной задачи для линейной свертки многих критериев на основе метода малого параметра/ М.Г. Дмитриев// Интернет-журнал «Технологии техносферной безопасности» (<http://ipb.mos.ru/ttb>). Вып. №3(31) - июнь 2010 г.
9. Dmitriev, M.G. Direct scheme in optimal control problems with fast and slow motions/ M.G. Dmitriev, S.V. Belokopytov // Systems and Control Letters, v. 8, №2, 1986, North Holland. – pp.129-135.
10. Дмитриев, М.Г. Сингулярные возмущения в задачах управления. Обзор 1982-2004 гг./М.Г. Дмитриев, Г.А. Курина// Автоматика и телемеханика, 2006, №1, с.3-53.

Дмитриев Михаил Геннадьевич. Главный научный сотрудник Института системного анализа, профессор кафедры математических методов системного анализа НИУ ВШЭ. Окончил механико-математический факультет Днепротропольского государственного университета в 1969 году. Доктор физико-математических наук. Почетный работник высшего профессионального образования РФ. Автор более 200 научных работ. Область научных интересов: математическое моделирование, сингулярные возмущения и их приложения в теории управления и численном анализе. E-mail: mdmitriev@mail.ru

Ломазов Вадим Александрович. Профессор кафедры информатики и информационных технологий Белгородской государственной сельскохозяйственной академии им. В.Я. Горина (БелГСХА им. В.Я. Горина). Окончил механико-математический факультет Новосибирского государственного университета в 1979 году. Доктор физико-математических наук, доцент. Автор более 100 научных работ, из которых 2 монографии. Область научных интересов: приложения системного анализа и теории принятия решений. E-mail: vlomazov@yandex.ru