О.В. Басков

Сужение множества Парето на основе нечеткой информации об отношении предпочтения ЛПР[1]

Аннотация. Рассматривается модель многокритериального выбора, включающая множество возможных вариантов, числовой векторный критерий и нечеткое бинарное отношение предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР). Задача многокритериального выбора – выбрать один или несколько «наилучших» вариантов из множества Парето, т.е. сузить это множество на основе информации об отношении предпочтения ЛПР. Сужение осуществляется в соответствии с аксиоматическим подходом. В работе рассматривается алгоритм сужения множества Парето на основе произвольного конечного набора «квантов» нечеткой информации об отношении предпочтения ЛПР.

Ключевые слова: многокритериальный выбор, сужение множества Парето, аксиоматический подход, нечеткая логика.

Введение

Во многих областях науки и техники встречаются задачи принятия решений. В них заинтересованному лицу надлежит выбрать один или несколько вариантов из списка возможных альтернатив. Задаются в общем случае несколько критериев, по которым оценивается каждый вариант. Затем лицо, принимающее решение (ЛПР), стремится найти вариант с наибольшими или наименьшими оценками по всем критериям. В большинстве случаев варианта, на котором каждый критерий достигает оптимального значения, не существует: критерии часто характеризуют противоречащие друг другу свойства альтернатив. Поэтому необходимы процедуры, позволяющие найти компромиссный вариант.

Одну из таких процедур реализует так называемый аксиоматический подход к сужению множества Парето, развиваемый В.Д. Ногиным с начала 80-х годов прошлого столетия и изложенный в [2]. Сопоставление подхода с другими методами можно найти в [3]. В соответствии с аксиоматическим подходом, если поведение ЛПР удовлетворяет некоторым четырем «разумным» аксиомам, то из исходного множества парето-оптимальных вариантов можно исключить те, которые не согласуются с имеющейся в наличии информации об отношения предпочтения ЛПР в виде конечного набора «квантов» информации. Тем самым происходит сужение множества Парето, что облегчает последующий выбор. Это сужение тем существеннее, чем «больше» информации о своих предпочтениях ЛПР готово предоставить.

В данной работе рассматривается ситуация, когда используемые для сужения «кванты» информации являются нечеткими, т.е. представляют собой сведения о нечетком отношении предпочтения ЛПР. Этот случай в большей степени соответствует реальности, поскольку на практике сведения о предпочтениях ЛПР нередко носят именно нечеткий характер. В [1] автором был предложен алгоритм, позволяющий на основе произвольного конечного набора четкой информации построить оценку сверху для неизвестного множества выбираемых вариантов, т.е. сузить множество Парето. Целью данной статьи является распространение этого алгоритма на случай нечеткого отношения предпочтения, когда ЛПР присваивает своим суждениям различную степень уверенности. В рассматриваемом нечетком случае множество выбираемых вариантов, а

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-07-00899).

также построенная для него оценка сверху также являются нечеткими.

В первом разделе работы приводится постановка задачи многокритериального выбора и формулируются базовые аксиомы. Второй раздел посвящен описанию сведения этой задачи к геометрической проблеме построения нечеткого двойственного конуса. В третьем разделе приводится обобщение алгоритма из [1], который дает возможность построить образующие нечеткого двойственного конуса. На основе этих образующих конструируется новый векторный критерий, множество Парето относительно которого является искомым сужением исходного множества Парето. В четвертом разделе рассматривается иллюстративный пример. В приложении даются доказательства всех приведенных утверждений.

1. Постановка задачи

Пусть X – *множество возможных вариантов*, т.е. объектов произвольной природы, из которых лицу, принимающему решение, необходимо выбрать один или несколько. Каждый вариант оценивается по нескольким числовым *критериям* $f_1,\ldots,f_m$, которые можно объединить в векторный критерий $f : X \to R^m$. Наконец, при выборе ЛПР может руководствоваться индивидуальными вкусами и предпочтениями, которые моделируются нечетким бинарным *отношением предпочтения* $\succ_X$ с функцией принадлежности μ_X: считают, что $\mu_X(x',x'')=\mu$, если, выбирая из этих двух вариантов, ЛПР отдает предпочтение x' со степенью уверенности μ. Тройка $\langle X, f, \succ_X \rangle$ определяет задачу (нечеткого) *многокритериального выбора*. *Множество выбираемых вариантов* будем обозначать через $C(X)$, а его функцию принадлежности через λ_C. Удобно также ввести *множество возможных векторов* $Y = f(X) \subset R^m$. Отношение предпочтения $\succ_X$ индуцирует на нем нечеткое отношение $\succ_Y$ с функцией принадлежности μ_Y: $\mu_X(x',x'')=\mu_Y(f(x'),f(x''))$ для всех $x',x'' \in X$. Сразу оговоримся, что мы будем считать варианты с одинаковыми оценками неразличимыми, так что $x' \neq x'' \Leftrightarrow f(x') \neq f(x'')$.

Будем предполагать, что выполнены четыре аксиомы разумного выбора (см. [4]).

Аксиома 1. $\lambda_C(x'') \le 1-\mu_X(x',x'')$ *для всех* $x',x'' \in X$.

Другими словами, ЛПР не будет выбирать x'', если существует более предпочтительный вариант x'.

Аксиома 2. *Существует иррефлексивное транзитивное продолжение* $\succ$ *на пространство* R^m *нечеткого отношения* $\succ_Y$.

Функцию принадлежности отношения $\succ$ будем обозначать μ.

Аксиома 3. *Отношение* $\succ$ *согласовано с каждым из критериев* $f_1,\ldots,f_m$, *т.е. для каждого индекса* i, *для любых двух векторов* y' *и* y'' *пространства* R^m, *все компоненты которых одинаковы, за исключением* i*-ой, причем* $y'_i > y''_i$, *имеет место равенство* $\mu(y',y'')=1$. Таким образом, без умаления общности предполагается, что ЛПР заинтересовано в максимизации всех критериев.

Аксиома 4. *Нечеткое отношение* $\succ$ *инвариантно относительно положительного линейного преобразования, т.е.* $\mu(\alpha y'+c, \alpha y''+c)=\mu(y',y'')$ *для всех* $c, y', y'' \in R^m$, $\alpha > 0$.

Выполнение приведенных аксиом гарантирует [4], что множество выбираемых вариантов содержится в множестве парето-оптимальных вариантов $P_f(X)$, т.е. имеет место неравенство $\lambda_C(x) \le \lambda_{P_f}(x)$ для всех вариантов $x \in X$, где функция принадлежности множества Парето $\lambda_{P_f}(x)$ принимает значение 1 в точках самого множества Парето, а во всех остальных точках она равна 0. Напомним, что множество Парето – это четкое множество

$$P_f(X)=\{x \in X : \bar{\exists} x' \in X : f(x') \ge f(x)\},$$

где символ $\ge$ обозначает отношение Парето: $y' \ge y''$ в том и только в том случае, если по каждой компоненте $y'_i \ge y''_i$ и хотя бы одно такое неравенство строгое. Другими словами, ЛПР может с самого начала исключить из рассмотрения варианты, которые можно «улучшить» по одному или нескольким критериям, не ухудшая оценки по остальным критериям.

Однако во многих случаях оценка множества выбираемых вариантов в виде множества Парето является достаточно широкой. Поэтому актуальна задача сужения множества Парето на основе дополнительной информации об отношении предпочтения ЛПР.

Определение 1. Пусть $u \in R^m$ – вектор, имеющий хотя бы одну положительную и хотя бы одну отрицательную компоненты. Если имеет место равенство $\mu(u,0)=\nu$, то говорят, *задан «квант» (нечеткой) информации* об отношении предпочтения ЛПР.

Например, в случае двух критериев наличие «кванта» $\mu(u,0)=1$ при $u_1=1$, $u_2=-1$ означает, что ЛПР готово уступить одну единицу по второму критерию ради повышения на единицу оценки по первому критерию, другими словами, первый критерий более значим для ЛПР, нежели второй.

Предположим, что задан набор «квантов» информации $\mu(u^k,0)=\nu_k$, $k=\overline{1,p}$. Наша цель – сузить исходное множество Парето, используя данный набор «квантов».

2. Построение двойственного конуса и учет квантов информации

При выполнении аксиом «разумного» выбора отношение предпочтения $\succ$ является конусным [4], т.е. существует такой острый выпуклый нечеткий конус с функцией принадлежности η, что равенство $\mu(y',y'')=\eta(y'-y'')$ выполняется для любых векторов $y',y'' \in R^m$. Это означает, что при сравнении двух вариантов ЛПР обращает внимание лишь на разницу в их оценках, абсолютные же значения критериев на предпочтение не влияют.

Отметим, что отношение Парето $\geq$ также является конусным. Его конус – это неотрицательный ортант R_+^m (за исключением нулевого вектора, что несущественно, так как мы рассматриваем несовпадающие варианты), а соответствующая функция принадлежности имеет вид

$$I(y)=\begin{cases}1, & y\geq 0,\\ 0, & \exists k: y_k<0.\end{cases}$$

Так как отношение предпочтения согласовано со всеми критериями, все орты пространства R^m принадлежат конусу отношения предпочтения, т.е. $\eta(e^i)=1$. Векторы, представляющие «кванты» информации, также принадлежат этому конусу с соответствующими степенями принадлежности: $\eta(u^k)=\nu^k$. Обозначим через φ функцию принадлежности нечеткой конической оболочки векторов $e^1,\ldots,e^m,u^1,\ldots,u^p$ с соответствующими степенями принадлежности $1,\ldots,1,\nu^1,\ldots,\nu^p$.

Определение 2 [5]. *Нечеткой конической оболочкой* векторов $a^1,\ldots,a^r$ с соответствующими степенями принадлежности $\alpha^1,\ldots,\alpha^r$ называется наименьший по включению нечеткий выпуклый конус, содержащий эти вектора с указанными степенями принадлежности.

В силу выпуклости конуса отношения предпочтения построенная коническая оболочка является его подмножеством. С другой стороны, она содержит неотрицательный ортант, так что $I(y)\leq\varphi(y)\leq\eta(y)$ для всех $y\in R^m$. Из этого неравенства вытекает следующая оценка для множества выбираемых вариантов.

Утверждение 1. *Неравенства*

$$\lambda_C(x)\leq \min_{x'\in X\setminus\{x\}}\left(1-\varphi\left(f(x')-f(x)\right)\right)\leq$$
$$\leq \min_{x'\in X\setminus\{x\}}\left(1-I\left(f(x')-f(x)\right)\right)$$

имеют место для всех вариантов $x\in X$.

В соответствии с данным утверждением, оценка сверху для множества выбираемых вариантов при помощи построенного конуса в общем случае уже исходного множества Парето.

Рассмотрим теперь двойственный к φ нечеткий конус с функцией принадлежности ψ.

Определение 3 [6]. *Двойственным* к нечеткому конусу с функцией принадлежности φ называется нечеткое множество с функцией принадлежности $\psi(z)=\inf\limits_{y\in R^m: yz<0}\left(1-\varphi(y)\right)$.

Можно показать, что таким способом определенное множество действительно является выпуклым нечетким конусом.

Обозначим образующие двойственного конуса $g^1,\dots,g^q$, а их степени принадлежности $\theta^1,\dots,\theta^q$. Построим новый векторный критерий $g(x)$ размерности q с компонентами $g_k(x)=g^k f(x)$. С его помощью можно получить следующий результат.

Утверждение 2. *Имеет место неравенство* $\lambda_C(x)\le \min\limits_{x'\in X\setminus\{x\}}\ \max\limits_{k:g_k(x)>g_k(x')}\theta^k$ *для* $\forall x\in X$ *(здесь предполагается, что максимум по пустому множеству равен нулю).*

В частности, в четком случае, когда все $\theta^k=1$, минимум равен нулю тогда и только тогда, когда существует вариант x'∈X, для которого верно неравенство g(x')≥g(x), и функция принадлежности в правой части неравенства из последнего утверждения описывает множество Парето относительно нового векторного критерия g. Именно это векторный критерий следует использовать для построения сужения множества Парето.

3. Нахождение образующих двойственного конуса

Для того, чтобы по образующим $e^1,\dots,e^m,u^1,\dots,u^p$ с соответствующими степенями принадлежности $1,\dots,1,\nu^1,\dots,\nu^p$ конуса φ найти образующие $g^1,\dots,g^q$ со степенями принадлежности $\theta^1,\dots,\theta^q$ конуса ψ, воспользуемся алгоритмом, описанным в [5].

Алгоритм начинает работу с пары двойственных нечетких конусов. В нашем случае удобно взять четкий неотрицательный ортант $R_+^m=cone\{e^1,\dots,e^m\}$, который двойственен самому себе.

На каждом шаге s к первому из пары конусов добавляется очередная образующая u^s со степенью принадлежности ν^s. Пусть к началу этого шага двойственный конус задан образующими $b_{s-1}^1,\dots,b_{s-1}^{r_{s-1}}$ с соответствующими степенями принадлежности $\beta_{s-1}^1,\dots,\beta_{s-1}^{r_{s-1}}$. Эти образующие разбиваются на три группы: $A_s=\{i:b_{s-1}^i u^s>0\}$, $B_s=\{j:b_{s-1}^j u^s<0\}$, $C_s=\{k:b_{s-1}^k u^s=0\}$. Образующие групп A_s и C_s оставляются без изменений; образующим b_{s-1}^j группы B_s приписывается новая степень принадлежности $\beta_s^j=\min\{\beta_{s-1}^j;1-\nu^s\}$. Наконец, появляются новые образующие $(u^s b_{s-1}^i)b_{s-1}^j-(u^s b_{s-1}^j)b_{s-1}^i$ со степенями принадлежности $\min\{\beta_{s-1}^i;\beta_{s-1}^j\}$ для всех пар $(i,j)\in A_s\times B_s$.

Переобозначим полученные образующие за d^k, а их степени принадлежности – за δ^k. Каждой образующей поставим в соответствие множество

$$T(d^k)=\{e^i:e^i d^k=0\}\cup$$
$$\cup\{u^i:i\le s,\delta^k+\nu^i>1,u^i d^k=0\}.$$

Те образующие d^k, для которых $\delta^k=0$ или $\exists d^l:\delta^l\ge\delta^k,T(d^k)\subseteq T(d^l)$, являются лишними: их можно исключить из полученного списка, коническая оболочка найденных векторов от этого не изменится (обоснование в приложении). Оставшиеся образующие вновь переобозначим как $b_s^1,\dots,b_s^{r_s}$ с соответствующими степенями принадлежности $\beta_s^1,\dots,\beta_s^{r_s}$ и перейдем на следующий шаг, если $s<p$.

За p шагов данный алгоритм построит искомые образующие конуса ψ.

4. Пример

Пусть ЛПР предстоит выбрать один вариант из трех, заданных своими оценками по трем критериям: $x^1=(1;3;1)$, $x^2=(1;2;2)$, $x^3=(0;1;3)$. Множество Парето включает все эти три вектора.

Предположим, что ЛПР со степенью уверенности 0.8 готово пожертвовать 1 по третьему критерию ради получения прибавки в размере 1 по первым двум критериям, т.е. задан «квант» информации $u^1=(1;1;-1)$ с $\nu^1=0.8$. Проиллюстрируем работу описанного выше алгоритма учета применительно к данной информации. В начале работы двойственный конус задан образующими $e^1=(1;0;0)$, $e^2=(0;1;0)$, $e^3=(0;0;1)$ со степенями принадлежности, равными единице. Алгоритм их разбивает на три группы: в группу A_1 попадают первые два вектора, образующие острые углы с заданным квантом; в группу B_1 включается третий вектор, лежащий в отрицательном полупространстве, определяемом нормалью u^1; группа C_1 оказывается пустой. Генерируются новые образующие $b^4 = (u^1e^1)e^3 - (u^1e^3)e^1 = (1;0;1)$ и $b^5 = (u^1e^2)e^3 - (u^1e^3)e^2 = (0;1;1)$, которым присваивается степень принадлежности 1. Далее, у образующих группы B_1 степень принадлежности уменьшается до $1-\nu^1 = 0.2$. Таким образом, двойственный конус задается векторами $e^1 = (1;0;0)$, $e^2 = (0;1;0)$, $b^4 = (1;0;1)$, $b^5 = (0;1;1)$ со степенями принадлежности 1 и вектором $e^3 = (0;0;1)$ со степенью принадлежности 0.2. Отметим, что $T(e^i) = \{e^1;e^2;e^3\} \setminus \{e^i\}$, $T(b^4) = \{e^2;u^1\}$, $T(b^5) = \{e^1;u^1\}$; ни одно из этих множеств не содержит другое, поэтому лишних образующих нет.

Добавим теперь «квант» $u^2 = (0;-1;1)$ со степенью уверенности $\nu^2 = 0.4$. Снова разобьем образующие на группы: $A_2 = \{e^3;b^4\}$, $B_2 = \{e^2\}$, $C_2 = \{e^1;b^5\}$. Генерируемые новые образующие суть $b^6 = (u^2e^3)e^2 - (u^2e^2)e^3 = = (0;1;1)$ со степенью принадлежности 0.2 и $b^7 = (u^2b^4)e^2 - (u^2e^2)b^4 = (1;1;1)$ со степенью принадлежности 1. Кроме того, у образующих группы B_2 степень принадлежности понижается до $1-\nu^2 = 0.6$. Таким образом, двойственный конус дается образующими $e^1 = (1;0;0)$, $b^4 = (1;0;1)$, $b^5 = (0;1;1)$, $b^7 = (1;1;1)$ со степенью принадлежности 1, $e^2 = (0;1;0)$ со степенью принадлежности 0.6 и $e^3 = (0;0;1)$, $b^6 = (0;1;1)$ со степенью принадлежности 0.2. Однако видно, что $b^6 = b^5$ и $b^7 = e^1 + b^5$. Эти образующие детектируются как лишние, т.к. $T(b^6) = \{e^1;u^2\} = T(b^5)$, а у b^5 выше степень принадлежности, и $T(b^7) = \{u^2\} \subset T(b^5)$.

Рассмотрим теперь, как изменились степени принадлежности вариантов. x^1 доминирует x^2 лишь по критерию, определяемому образующей e^2, поэтому его степень принадлежности множеству выбираемых векторов не может превосходить 0.6. Аналогично, вариант x^3 доминирует x^2 только по критерию e^3, следовательно, его степень принадлежности ограничивается сверху значением 0.2. Что же касается варианта x^2, то он доминирует x^3, например, по критерию e^1, а x^1 по критерию b^4, и его степень принадлежности по-прежнему равна 1. Таким образом, информация, полученная от ЛПР, позволила снизить степень уверенности в выборе некоторых вариантов.

Заключение

Задача сужения множества Парето за счет «квантов» информации о нечетком отношении предпочтения ЛПР сводится к задаче построения образующих нечеткого двойственного конуса. Она может быть полностью решена описанным алгоритмом, последовательно перебирающим заданные «кванты» информации. Полученные образующие используются для построения нового векторного критерия, и окончательный выбор следует производить в множестве Парето относительно нового векторного критерия. При этом каждому новому критерию сопоставлено число, характеризующее степень уверенности в выборе вариантов, недоминируемого по этому критерию. Таким образом образуется нечеткое множество, которое является более точной оценкой сверху для неизвестного множества выбираемых вариантов, чем исходное множество Парето.

Приложение

Доказательство утверждения 1. С учетом аксиом

$$\lambda_C(x) \le 1-\mu_X(x',x) = 1-\mu(f(x'), f(x)) = 1-\eta(f(x')-f(x)) \le 1-\varphi(f(x')-f(x)).$$

В силу произвольности варианта $x' \in X$ справедлива оценка $\lambda_C(x) \le \min\limits_{x' \in X \setminus \{x\}} (1-\varphi(f(x')-f(x)))$. Далее, по построению очевидно, что конус φ содержит неотрицательный ортант R_+^m, поэтому

$$\lambda_C(x) \le \min_{x' \in X \setminus \{x\}} (1-\varphi(f(x')-f(x))) \le \min_{x' \in X \setminus \{x\}} (1-I(f(x')-f(x))),$$

что и требовалось доказать.

Доказательство утверждения 2. Возьмем некоторый вариант $x' \in X \setminus \{x\}$ и рассмотрим

$$\varphi(f(x')-f(x)) = \inf_{z:z(f(x')-f(x))<0} (1-\psi(z)) \qquad (1)$$

Поскольку ψ является конечнопорожденным нечетким конусом, его функция принадлежности может принимать лишь конечное число значений, а тогда инфимум достигается на некотором ненулевом векторе y.

В [5] показано, что нечеткую коническую оболочку можно определять и следующим эквивалентным образом.

Определение 4. *Нечеткой конической оболочкой* векторов $a^1, \dots, a^r$ с соответствующими степенями принадлежности $\alpha^1 \ge \alpha^2 \ge \dots \ge \alpha^r$ называется нечеткое множество с функцией принадлежности $\psi(y) = \max\limits_{k: y \in cone\{a^1, \dots a^k\}} \alpha^k$, где $cone\{a^1, \dots a^k\}$ – четкая коническая оболочка указанных векторов. При этом максимум по пустому множеству считается равным нулю.

Рассмотрим сначала случай $\psi(y) > 0$. Пусть максимум в этом определении достигается на индексе k. Тогда $y = \sum\limits_{i=1}^{k} y_i g^i$. Покажем, что среди участвующих в этом разложении образующих найдется хотя бы одна такая, что $g^i(f(x')-f(x)) < 0$ и $\theta^i = \theta^k$.

Действительно, пусть противное: $\forall i \le k : \theta^i = \theta^k \Rightarrow g^i(f(x')-f(x)) \ge 0$. Рассмотрим вектор $y' = y - \sum\limits_{i \le k: \theta^i = \theta^k} y_i g^i = \sum\limits_{i \le k: \theta^i > \theta^k} y_i g^i$. Из определения нечеткой конической оболочки $\psi(y') > \theta^k = \psi(y)$, или $1-\psi(y') < 1-\psi(y)$. В то же время с учетом сделанного предположения имеем $y'(f(x')-f(x)) = y(f(x')-f(x)) - \sum\limits_{i \le k: \theta^i = \theta^k} y_i g^i(f(x')-f(x)) < 0$. Следовательно, инфимум в (1) не может достигаться на векторе y.

Полученное противоречие означает, что $g^i(f(x')-f(x)) < 0$ для некоторого индекса $i \le k : \theta^i = \theta^k$. Тогда $\varphi(f(x')-f(x)) = 1-\psi(y) = 1-\theta^k$. Отметим, что другие образующие g^i, для которых $g^i(f(x')-f(x)) < 0$, имеют степень принадлежности не больше θ^k, так как в противном случае инфимум в (1) достигался бы не на y, а как раз на таком векторе g^i. Следовательно, можно записать

$$\varphi(f(x')-f(x)) = 1-\theta^k = 1-\max_{i: g^i(f(x')-f(x))<0} \theta^i = 1-\max_{i: g_i(x) > g_i(x')} \theta^i.$$

В случае $\psi(y) = 0$ существование такой образующей g^i, что $g^i(f(x')-f(x)) < 0$, влечет $\theta^i = 0$, откуда и $\max\limits_{i: g_i(x) > g_i(x')} \theta^i = 0$. Тогда $\varphi(f(x')-f(x)) = 1 = 1-\max\limits_{i: g_i(x) > g_i(x')} \theta^i$. Если же все образующие конуса ψ удовлетворяют неравенству $g_i(x') - g_i(x) = g^i\left(f(x') - f(x)\right) \geq 0$, то с учетом соглашения, что максимум по пустому множеству равен нулю, заключаем, что полученная в предыдущем случае формула остается справедливой.

Таким образом,

$$\lambda_C(x) \leq 1 - \max_{x' \in X \setminus \{x\}} \varphi\left(f(x') - f(x)\right) = \min_{x' \in X \setminus \{x\}} \left(1 - \varphi\left(f(x') - f(x)\right)\right) = \min_{x' \in X \setminus \{x\}} \max_{i: g_i(x) > g_i(x')} \theta^i,$$

что и требовалось доказать.

Приведем теперь обоснование исключения лишних образующих. Прежде всего дадим строгое определение этому понятию.

Определение 6. Образующая a^k нечеткой конической оболочки векторов $a^1, \ldots, a^k$ с соответствующими степенями принадлежности $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$ называется *лишней*, если эта коническая оболочка равна конической оболочке векторов $a^1, \ldots, a^{k-1}$ со степенями принадлежности $\alpha^1, \ldots, \alpha^{k-1}$. Образующие, не являющиеся лишними, называют *существенными*.

Лемма 1. *Пусть* λ *– функция принадлежности острой нечеткой конической оболочки ненулевых векторов* $a^1, \ldots, a^k$ *с соответствующими степенями принадлежности* $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$. *Для того, чтобы образующая* a^k *была лишней, необходимо и достаточно, чтобы либо* $\alpha^k = 0$, *либо существовала сонаправленная с ней образующая* a^i *с* $\alpha^i \geq \alpha^k$, *либо нашлись два несонаправленных с* a^k *вектора* $x, y: \lambda(x) \geq \alpha^k, \lambda(y) \geq \alpha^k, \dfrac{x+y}{2} = a^k$.

Доказательство. Обозначим через μ функцию принадлежности нечеткой конической оболочки векторов $a^1, \ldots, a^{k-1}$ со степенями принадлежности $\alpha^1, \ldots, \alpha^{k-1}$. Не умаляя общности, будем считать, что $\alpha^1 \geq \ldots \geq \alpha^{k-1}$.

Необходимость. Если $\alpha^k = 0$, то доказывать нечего. Рассмотрим случай $\alpha^k > 0$. Т.к. a^k лишняя, $\forall z \in R^m \Rightarrow \lambda(z) = \mu(z)$. Рассмотрим $\mu(a^k) = \max\limits_{i<k: a^k \in cone\{a^1, \ldots, a^i\}} \alpha^i$. Пусть максимум достигается на индексе r. Тогда $a^k = \sum\limits_{i=1}^{r} \gamma_i a^i$. Если в правой части есть сонаправленная с a^k образующая a^i, то ее степень принадлежности $\alpha^i \geq \alpha^r = \mu(a^k) = \lambda(a^k) \geq \alpha^k$. В противном случае в правой части есть хотя бы два ненулевых коэффициента. Пусть один из них $\gamma_l > 0$. Тогда $a^k = \dfrac{2\gamma_l a^l + 2\sum\limits_{i \leq r, i \neq l} \gamma_i a^i}{2}$, причем оба вектора в числителе принадлежат $cone\left\{a^1, \ldots, a^r\right\}$, а значит, имеют степень принадлежности конусу μ не менее α^k. Отметим, что вектор $2\sum\limits_{i \leq r, i \neq l} \gamma_i a^i$ не может быть сонаправлен с a^k, т.к. тогда либо конус оказался бы не острым, либо $a^l = 0$, либо a^l была бы также сонаправлена с a^k.

Достаточность. По определению μ является наименьшим по включению выпуклым нечетким конусом, содержащим векторы $a^1, \ldots, a^{k-1}$ со степенями принадлежности $\alpha^1, \ldots, \alpha^{k-1}$. Покажем, что он содержит вектор a^k со степенью принадлежности не менее α^k. Если $\alpha^k = 0$, то это очевидно. Если есть сонаправленная с a^k образующая a^i, для которой $\alpha^i \geq \alpha^k$, то $\mu(a^k) = \mu(a^i) \geq \alpha^k$. Наконец, рассмотрим случай, когда существуют несонаправленные с a^k векторы $x, y: \lambda(x) \geq \alpha^k, \lambda(y) \geq \alpha^k, \dfrac{x+y}{2} = a^k$. Как следует из определения, векторы x и y принадлежат конусу $cone\{a^1,\dots,a^r,a^k\}$ для некоторого $r:\alpha^r\ge\alpha^k$, а значит, представимы в виде линейных комбинаций $x=\sum_{i=1}^{r}\varphi_i a^i+\varphi_k a^k$ и $y=\sum_{i=1}^{r}\psi_i a^i+\psi_k a^k$ с неотрицательными коэффициентами. Тогда и вектор a^k представим в виде линейной комбинации $a^k=\sum_{i=1}^{r}\gamma_i a^i+\gamma_k a^k$, $\gamma_i=\frac{\varphi_i+\psi_i}{2}$. Если $\gamma_k>1$, то нечеткая коническая оболочка векторов $a^1,\dots,a^k$ не может быть острой. Если $\gamma_k=1$, то либо в правой части нет ни одного ненулевого коэффициента, но тогда векторы $x=y=0$ сонаправлены с a^k, либо ровно один положительный коэффициент $\gamma_l>0$, но тогда $a^l=0$, либо хотя бы два положительных коэффициента, но тогда после переноса одного из таких слагаемых в левую часть получается противоречие с остротой конуса. Следовательно, $\gamma_k<1$, и вектор $a^k\in cone\{a^1,\dots,a^r\}$. Тогда $\mu(a^k)\ge\alpha^r\ge\alpha^k$. Таким образом, выпуклый нечеткий конус μ содержит векторы $a^1,\dots,a^k$ со степенями принадлежности не менее $\alpha^1,\dots,\alpha^k$, а тогда по определению он включает конус λ. С другой стороны, конус λ содержит векторы $a^1,\dots,a^{k-1}$ со степенями принадлежности не менее $\alpha^1,\dots,\alpha^{k-1}$, а значит, содержит наименьший по включению конус μ. Таким образом, эти конусы совпадают, что и означает, что образующая a^k является лишней, что и требовалось доказать.

Итак, пусть на некотором шаге s алгоритма нахождения образующих двойственного конуса получены образующие d^k со степенями принадлежности δ^k. Обозначим функцию принадлежности нечеткой оболочки этих векторов за μ_s. Будем предполагать, что среди образующих, полученных на предыдущем шаге, лишних нет (для первого шага это справедливо, т.к. неотрицательный ортант R_+^m задан существенными образующими).

Если $\delta^k=0$, то образующая d^k по доказанной лемме лишняя. Рассмотрим случай, когда $\delta^k>0$ и $\exists d^l:\delta^l\ge\delta^k, T(d^k)\subseteq T(d^l)$. Если d^l сонаправлена с d^k, то по лемме d^k лишняя. Если не сонаправлена, то рассмотрим векторы $d^k\pm\varepsilon d^l$ для некоторого $\varepsilon>0$. Они также ортогональны всем векторам $T(d^k)$. Возьмем $e^i\notin T(d^k)$. Т.к. $\delta^k>0$, то $d^k e^i>0$, а тогда для достаточно малых значений $\varepsilon>0$ и $(d^k\pm\varepsilon d^l)e^i>0$. Рассмотрим вектор $u^i\notin T(d^k)$ для $i\le s$. Для него $d^k u^i\ne0$, и ε можно выбрать столь малым, что знак произведения $(d^k\pm\varepsilon d^l)u^i$ совпадает со знаком $d^k u^i$. Таким образом,

$$\{i\le s:(d^k\pm\varepsilon d^l)u^i<0\}\subseteq\{i\le s:d^k u^i<0\}\cup\{i\le s:d^k u^i=0,\delta^k+\nu^i\le1\}.$$

Заметим, что для конечнопорожденных конусов всегда существует хотя бы одна образующая, на которой достигается инфимум в определении двойственного конуса. Действительно, если инфимум $\psi(z)=\inf_{y\in R^m:yz<0}(1-\varphi(y))$ достигается на векторе y с $\varphi(y)=\varphi_0$, то по определению существует разложение $y=\sum_{j=1}^{J}y_j g^j$ по образующим конуса φ, степени принадлежности которых не меньше φ_0. Т.к. $yz<0$, среди них обязательно найдется хотя бы одна образующая $g^k:g^k z<0$. Тогда $1-\varphi_0=\psi(z)\le1-\varphi(g^k)\le1-\varphi_0$, и инфимум достигается и на этой образующей.

Таким образом,

$$\mu_s(d^k\pm\varepsilon d^l)=\min_{i\le s:(d^k\pm\varepsilon d^l)u^i<0}(1-\nu^i)\ge\min\left\{\min_{i\le s:d^k u^i<0}(1-\nu^i);\min_{i\le s:d^k u^i=0,\delta^k\le1-\nu^i}(1-\nu^i)\right\}\ge\min\{\mu_s(d^k);\delta^k\}\ge\delta^k.$$

С учетом того, что $d^k = \dfrac{\left(d^k + \varepsilon d^l\right) + \left(d^k - \varepsilon d^l\right)}{2}$, по лемме заключаем, что d^k действительно является лишней образующей.

Проведем теперь встречное рассуждение: предположим, что d^k является лишней образующей, и покажем, что она будет исключена. В соответствии с леммой, возможны три случая. Если $\delta^k = 0$, то исключение очевидно. Если существует сонаправленная с ней образующая d^l, причем $\delta^l \geq \delta^k$, то $\delta^l + \nu^i \geq \delta^k + \nu^i > 1$ для $u^i \in T(d^k)$, и $T(d^l) \supseteq T(d^k)$. Наконец, рассмотрим случай, когда существуют два несонаправленных с d^k вектора $x, y : \dfrac{x+y}{2} = d^k, \mu_s(x) \geq \delta^k, \mu_s(y) \geq \delta^k$. Аналогично проведенным в лемме рассуждениям можно показать, что с учетом остроты конуса μ_s (он острый как подмножество неотрицательного ортанта) вектор d^k представим в виде линейной комбинации образующих d^j с $\delta^j \geq \delta^k$. Рассмотрим векторы $u^i : i \leq s, \nu^i + \delta^k > 1$. Если бы $d^j u^i < 0$, то по определению двойственного конуса $\delta^j \leq \mu_s(d^j) \leq 1 - \nu^s < \delta^k$, что противоречило бы свойствам d^j. Таким образом, должно выполняться неравенство $d^j u^i \geq 0$. Если при этом $u^i \in T(d^k)$, то $d^k u^i = 0$, а следовательно, и $d^j u^i = 0$. Аналогичные рассуждения показывают, что $d^j e^i \geq 0$, причем для $e^i \in T(d^k)$ имеет место равенство. Таким образом, $T(d^k) \subseteq T(d^j)$, и образующая d^k удаляется алгоритмом.

Литература

1. Ногин В.Д., Басков О.В. Сужение множества Парето на основе учета произвольного конечного набора числовой информации об отношении предпочтения // Доклады Академии Наук, 2011, т. 438, № 4, С. 1-4.
2. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 176 с.
3. Ногин В.Д. Проблема сужения множества Парето: подходы к решению // Искусственный интеллект и принятие решений, 2008, № 1, С. 98-112.
4. Ногин В.Д. Принцип Эджворта-Парето и относительная важность критериев в случае нечеткого отношения предпочтения // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2003, т. 43, № 11, с. 1676-1686.
5. Басков О.В. Алгоритм пересчета образующих конечнопорожденного нечеткого конуса при добавлении образующей к его двойственному конусу // Журнал вычислительной математики и математической физики, в печати.
6. Басков О.В. Двойственные нечеткие конусы // Процессы управления и устойчивость: Труды XLIII международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А.С.Еремина, Н.В.Смирнова. Спб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2012. С. 449 — 453.

Басков Олег Владимирович. Ассистент кафедры высшей математики факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. Окончил Санкт-Петербургский государственный университет в 2011 году. Автор 6 печатных работ. Область научных интересов: теория принятия решений.
Email: ov.japh@gmail.com