

Об адекватности точечных критериев задачам оценки и сравнения интервальных альтернатив¹

Аннотация. При оценке и сравнении альтернатив с интервальными показателями качества нередко применяются точечные индикаторы. В работе показано, что в таких задачах применим индикатор, численно характеризующий шансы истинности гипотезы о предпочтительности одной из альтернатив в анализируемой паре. Произведено сопоставление результатов оценивания альтернатив на основе предлагаемого критерия и распространенных точечных критериев математического ожидания.

Ключевые слова: интервальные альтернативы, точечные критерии, оценки шансов предпочтительности интервалов, степень адекватности критериев оценки и сравнения.

Введение

В проблематике информационно-аналитической поддержки принятия решений в условиях неопределенности немаловажную роль играют задачи сопоставления интервальных альтернатив и исследования по развитию и применению специализированных методов, предназначенных для этих целей. Важность такой тематики обозначена в классической работе Л.В. Канторовича [1].

Назовем интервальными такие альтернативы, показатели качества (эффективности) которых имеют из-за неопределенности интервальное представление. Неопределенность, а вместе с ней и интервальные оценки показателей качества возникают, например, при прогнозировании будущих значений исследуемых показателей. Неопределенность этого типа, вероятно, наиболее распространена в практических задачах.

Обычно предполагается, что в интервальной оценке показателя $[L, R]$ (L и R левая и правая граница интервала соответственно) лежат все возможные для данной конкретной задачи одно числовые (точечные) значения анализируемой

величины и что лишь единственное из них реализуется в будущем, когда исходная неопределенность будет снята. Строго говоря, множества всех возможных прогнозных реализаций показателей качества альтернатив для большинства практических задач дискретны. Таковы, например, множества всех возможных прогнозных реализаций стоимостных показателей качества. Используемая обычно, в том числе и в этой статье, аппроксимация дискретных множеств возможных реализаций непрерывными упрощает математический анализ таких задач.

Цель оценки альтернативы на основе интервального показателя качества - еще в условиях неопределенности, т.е. на момент прогнозирования, дать заключение о приемлемости ее эффективности для лица, принимающего решение (ЛПР), а цель сравнения альтернатив найти аргументы в пользу предпочтительности какой-либо альтернативы из числа сравниваемых.

Рассмотрим вначале задачу сравнения интервальных альтернатив. Решение задачи оценки ожидаемой эффективности отдельной альтернативы может быть получено тогда при нашем подходе как частный случай решения

¹ Работа поддержана программами фундаментальных исследований президиума РАН «Информационные, управляющие и интеллектуальные технологии и системы» и ОНИТ РАН «Интеллектуальные информационные технологии, системный анализ и автоматизация», Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 12-07-00034, 12-07-90800, 14-07-00916).

первой задачи при сравнении интервальной оценки с точечной. Вместе с тем особенности решения задач оценки эффективности требуют отдельного рассмотрения.

При сравнении одноименных интервальных оценок показателей качества альтернатив существует единственная конфигурация расположения пары сопоставляемых интервалов, которая не вызывает трудностей. Это конфигурация, при которой левая граница одного, пусть второго, интервала не менее чем правая граница первого. Тогда один из интервалов строго предпочтительнее другого. Именно, второй интервал «лучше» первого, если большему значению показателя качества соответствует более предпочтительное состояние, и «хуже» первого, если более предпочтительное состояние соответствует меньшему значению показателя качества.

Для конфигураций общего положения, когда сравниваемые интервальные оценки имеют ненулевое пересечение, в принципе нельзя с определенностью сделать вывод о предпочтительности какой-либо интервальной альтернативы в их паре, - любая из них может оказаться таковой в будущем, в момент «снятия» неопределенности, когда интервальная оценка замещается точным значением показателя качества. Поэтому на момент сравнения можно судить лишь о шансах на то, что одна альтернатива окажется предпочтительнее другой. При этом всегда существует риск того, что в действительности именно другая альтернатива окажется лучше.

Таким образом, задача сравнения интервальных альтернатив не может быть решена чисто математическими методами и является задачей принятия решений, поскольку для заключения о том, достаточна ли оцененная тем или иным способом величина упомянутых шансов для предпочтительности одной из альтернатив, приходится привлекать ЛПР или эксперта и их предпочтения.

Из всех способов квантификации шансов на предпочтительность интервальных альтернатив в настоящей работе выбран аппарат функций распределения теории вероятностей (не обязательно в рамках частотной концепции [2]). Этот аппарат в наибольшей степени знаком, по нашему мнению, экспертам, что существенно, поскольку экспертный анализ практических задач наиболее продуктивен, если он ведется на привычном для пользователя языке, с использованием понятной ему терминологии [3].

При квантификации шансов возможны два пути. Первый основан на принципе максимальной энтропии (принцип Гиббса - Джейнса), согласно которому все возможные состояния природы имеют равные шансы на реализацию и, следовательно, необходимо признать наличие на интервалах равномерных распределений. Некоторые исследователи полагают, что «поскольку речь идет о четких интервалах, никакое другое распределение, кроме равномерного, не будет иметь смысла» [4]. Мы не разделяем этой точки зрения, считая, что эксперт должен иметь более широкие возможности для выражения своих знаний об анализируемых альтернативах. Даже ограничивая себя равномерным распределением, эксперт может перейти к классу обобщенных интервальных оценок [5] и выразить свои знания с помощью обобщенного равномерного распределения вероятностей [6], представляющего собой вероятностную смесь равномерных распределений.

Конечно, для чисто интервальных альтернатив точное распределение шансов на них неизвестно. Однако можно предположить, что во многих случаях эти распределения унимодальные и для многих типов распределений эксперт может приближенно аппроксимировать эти неизвестные (но унимодальные) распределения какими-либо простыми привычными для него, например, треугольными распределениями. Возможность перемещения моды треугольного распределения от левой до правой границы его интервала-носителя позволяет эксперту проверить различные гипотезы о правдоподобности использования в задаче тех или иных шансов. Указанная гипотеза о правомочности такой приближенной замены интервальных альтернатив интервально-вероятностными принята в настоящей работе.

В этой связи следует отметить еще одно обстоятельство. Информация об анализируемых интервальных альтернативах достаточно часто предоставляется экспертами. Хотя используемые при сравнении альтернатив методы являются количественными, при приближенно-экспертном задании информации вряд ли имеет смысл придавать особое значение тому, насколько именно показатель качества одной альтернативы лучше другой. Представляется, что здесь более уместны суждения, основанные на порядковых шкалах, - констатации, что одна из альтернатив предпочтительней, как это имеет

место в задачах не с количественными, а с качественными критериями [7]. Поэтому при замещении неизвестных «истинных» распределений вероятностей треугольными неизбежна погрешность в точном измерении различий в значениях критериев сравнения альтернатив не столь важна, если общий вывод о предпочтительности альтернатив инвариантен к такому замещению. Хотя строгое доказательство этого факта вряд ли возможно, проведенные нами численные эксперименты для различных распределений вероятностей с последующей их заменой на треугольные показали приемлемость такого замещения для выводов о предпочтительности, делаемых на основе предлагаемого ниже критерия сравнения – коэффициента уверенности.

1. Сравнение интервально-вероятностных альтернатив

В наших предыдущих публикациях предложен общий подход к сравнению интервально-вероятностных альтернатив [8,9]. Он состоит в следующем.

Пусть для определенности рассматривается ситуация, когда большие значения показателя качества отвечают более предпочтительному состоянию. Пусть проверяется гипотеза о том, что вторая интервальная альтернатива I_2 предпочтительнее («больше») первой I_1 ($I_2 \succ I_1$). Если шансы появления различных точечных значений на каждом из интервалов в сравниваемой паре заданы как распределения вероятностей, численное моделирование процесса реализации точечных оценок может служить основой для оценки шансов предпочтительности интервальных величин и их сравнения. Будем говорить, что пара точечных реализаций (i_1, i_2) интервальных оценок I_1 и I_2 принадлежит зеленой зоне, если i_2 не меньше, чем i_1 , и принадлежит красной зоне в противоположном случае. Таким образом, зеленая зона – это зона, благоприятствующая истинности проверяемой гипотезы, а красная зона не благоприятствует ей.

Для сравнения интервалов методом численного моделирования необходимо провести достаточно много (скажем, N) испытаний, при каждом из которых соответствующий интервал заменяется точечной реализацией, и отметить количество попаданий в зеленую N_g и красную зоны N_r соответственно. Параметр $K_g = N_g/N$ служит мерой шансов реализации зеленой зоны

(шансов, что альтернатива I_2 окажется предпочтительнее альтернативы I_1), а $K_r = N_r/N$ аналогичной мерой для красной зоны. Ясно, что $K_g + K_r = 1$. Таким образом, K_g – оценка вероятности того, что $I_2 \succ I_1$, а K_r того, что $I_1 \succ I_2$.

Введем теперь в качестве индикатора результатов сравнения интервальных и интервально-вероятностных альтернатив коэффициент уверенности K_{as} как разность между K_g и K_r .

$$K_{as}(I_2 \succ I_1) = K_g - K_r.$$

При достаточно большом N можно считать, что $K_{as}(I_2 \succ I_1) = P(I_2 \succ I_1) - P(I_1 \succ I_2)$. Для вычисления значений коэффициентов уверенности иногда полезно использовать другие соотношения, именно, так как $P(I_2 \succ I_1) + P(I_1 \succ I_2) = 1$, то $K_{as}(I_2 \succ I_1) = 2P(I_2 \succ I_1) - 1$ или $K_{as}(I_2 \succ I_1) = 1 - 2P(I_1 \succ I_2)$. Какой из формул следует пользоваться при расчете коэффициента уверенности, зависит от специфики конкретной конфигурации пар сравниваемых интервальных альтернатив.

Коэффициент уверенности показывает, насколько шансы реализации зеленой зоны превышают шансы реализации красной зоны. Другими словами, насколько шансы истинности проверяемой гипотезы о предпочтительности одной из альтернатив превышают шансы истинности противоположной гипотезы. Именно этот показатель предлагается в качестве критерия сравнения пар интервальных альтернатив для всех их конфигураций, а также критерия оценки таких альтернатив.

Будем говорить, что альтернатива I_2 теоретически предпочтительнее, чем I_1 , если значение K_{as} положительно. Теоретически, поскольку предпочтения ЛПР еще не учтены. Эти предпочтения могут быть выражены введением назначаемого ЛПР порогового значения коэффициента уверенности K_{th} . Именно, если вычисленное для данной пары интервальных оценок значение K_{as} не меньше, чем K_{th} , то I_2 следует признать более предпочтительной альтернативой на уровне уверенности K_{as} с учетом предпочтений ЛПР. Если порог, назначенный ЛПР, не позволяет признать вторую альтернативу предпочтительной, необходимо анализировать ситуацию заново. Если значение K_{as} отрицательно, необходимо проверить противоположную гипотезу. Отметим, что привлекаемые для ЛПР значения коэффициента уверенности начинаются, по нашему мнению, с $K_{as} = 0.4$. При этом шансы предпочтительно-

сти второй альтернативы при сравнении с первой оказываются равными 0.7, что в два с лишним раза выше, чем шансы противоположной гипотезы. Конечно, приемлемый пороговый уровень K_{th} свой для каждого ЛПР и зависит от его склонности к риску.

Напомним, что предполагалось допустимым аппроксимировать в процессе сравнения неизвестные, но унимодальные, распределения на интервалах треугольными распределениями с различными положениями мод. При этом мода может быть значительно смещена вправо для I_1 (оптимистическая гипотеза для I_1) и влево для I_2 (пессимистическая гипотеза для I_2). Сдвигая положения мод от их первоначальных позиций вправо для I_2 и влево для I_1 , можно проанализировать зависимость K_{as} от локализации мод и, вместе с ЛПР, найти (если они существуют) те их значения, которые согласуются с K_{th} . Результаты подобного моделирования могут помочь ЛПР осмыслить свои предпочтения при принятии решений.

Коэффициент уверенности может использоваться как критерий и при оценивании ожидаемой эффективности отдельной альтернативы I . Если, например, ЛПР считает, что приемлемое граничное значение критерия равно L , то $K_{as}(I \succ L) = P(I > L) - P(I < L)$. Положительное значение коэффициента уверенности означает, что шансы получения в будущем «истинной» величины критериального показателя, которая превзойдет L , больше, чем шансы получения меньшего значения.

Более полную, по сравнению со значением коэффициента уверенности, информацию для принятия решений содержит распределение вероятностей разности D случайных величин I_2 и I_1 , получаемое в процессе численного моделирования совокупности величин $i_2 - i_1$. Подход, основанный на соотношениях для функций распределения вероятностей разности сравниваемых интервально-вероятностных величин, развит нами в предыдущих работах [8-10] и реализован аналитически для случая, когда на обоих сопоставляемых интервалах заданы равномерные распределения.

Определенным недостатком этого подхода является известная его громоздкость, приводящая к большому количеству формул, каждая из которых применима в своей области изменения переменной D . Это связано как с вариабельностью формы области интегрирования при рас-

чете плотности распределения вероятностей разности, так и с полиморфизмом выражений для некоторых функций распределения, задаваемых на сравниваемых интервалах, например, для треугольных распределений. Поэтому такой, реализуемый в принципе подход, приводит к соотношениям, уместным скорее в справочниках, чем в журнальных публикациях. В связи с этим нами предложен другой метод получения аналитических выражений для коэффициентов уверенности, изложенный далее. Аналитические соотношения, в отличие от численных оценок, позволяют анализировать общие связи между параметрами задачи. Именно для этой цели они нам и будут нужны.

2. Метод расчета коэффициента уверенности для интервально-вероятностных альтернатив

Аналитические выражения для коэффициентов уверенности могут быть, в частности, получены при задании на сопоставляемых интервалах равномерных и треугольных распределений в различных комбинациях. Они приведены ниже.

Рассматриваются конфигурации: А) $L_2 > R_1$; В) $L_1 < L_2 < R_1 < R_2$; С) $L_1 < L_2$, $R_2 < R_1$; D) $L_1 = L_2 = L$, $R_1 = R_2 = R$, которыми, с точностью до перестановки, исчерпываются все возможные конфигурации сравниваемых пар интервальных оценок. Таким образом, в конфигурации А) интервалы не пересекаются, случай В) – это конфигурация сдвинутых относительно друг друга интервалов с ненулевым пересечением, С) – вложенные интервалы и D) – совпадающие интервалы.

Идея аналитического метода расчета коэффициентов уверенности $K_{as}(I_2 \succ I_1)$ фактически повторяет идею численного метода: для случайно выбранного фиксированного значения $i_{2f} \in I_2$ рассчитывается вероятность $P(i_{2f} > i_1)$, $i_1 \in I_1$. Затем такие вероятности для всех возможных i_2 суммируются с учетом шансов на реализацию каждого такого i_2 . Другими словами, должен быть вычислен интеграл от $P(i_2 > i_1)$ по случайной величине i_2 с учетом плотности распределения ее вероятностей $f(i_2)$.

Рассмотрим вначале случай равномерных распределений на обоих интервалах для всех нетривиальных (D, C, B) конфигураций пар сравниваемых интервалов.

Конфигурация D. $P(i_{2f} > i_1) = (i_{2f} - L)/S$, где $S = R - L$. $P(I_2 \succ I_1) = \frac{1}{S^2} \int_L^R dz(z - L) = \frac{1}{2}$.

Таким образом, в этом случае $Kas(I_2 \succ I_1) = 0$. Это означает, что в случае равномерных распределений совпадающие интервалы имеют равные шансы на предпочтительность. Для других типов распределений это, конечно, не так.

Конфигурация C. $P(L_1 < i_1 < L_2) + P(L_2 < i_1 < i_{2f}) = (i_{2f} - L_1)/S_1$, где $S_1 = R_1 - L_1$.

Поэтому (при $S_2 = R_2 - L_2$) $P(I_2 \succ I_1) = \frac{1}{S_1 S_2} \int_{L_2}^{R_2} dz(z - L_1) = \frac{R_2 + L_2 - 2L_1}{2S_1}$.

Отсюда $Kas(I_2 \succ I_1) = (R_2 - R_1 + L_2 - L_1)/S_1$. Для дальнейшего нам понадобится связь выражений для коэффициентов уверенности с соответствующими математическими ожиданиями. Можно видеть, что здесь $Kas(I_2 \succ I_1) = 2(\langle I_2 \rangle - \langle I_1 \rangle)/S_1$, где $\langle I_2 \rangle$ и $\langle I_1 \rangle$ математические ожидания случайных величин на интервалах I_2 и I_1 соответственно: $\langle I_i \rangle = (R_i + L_i)/2$. Таким образом, в случае вложенных интервалов при равномерных распределениях вероятностей на них предпочтительность интервалов в их паре зависит от соотношения соответствующих средних, а нормированная разность математических ожиданий (при правильно выбранной нормировке) совпадает с шансами предпочтительности проверяемой гипотезы.

Конфигурация B. Здесь целесообразнее использовать соотношение $Kas(I_2 \succ I_1) = 1 - 2P(I_1 \succ I_2)$. $P(i_1 > i_{2f}) = (R_1 - i_{2f})/S_1$, так что

$$Kas(I_2 \succ I_1) = 1 - \frac{2}{S_1 S_2} \int_{L_2}^{R_1} dz(R_1 - z) = 1 - \frac{(R_1 - L_2)^2}{S_1 S_2}.$$

Здесь шансы предпочтительности второго интервала не выражаются через средние величины. Для этого случая коэффициент уверенности всегда положителен (второй интервал теоретически предпочтительнее первого), поскольку его числитель равен $R_1(R_2 - R_1) + L_2(R_1 - L_2) - L_1(R_2 - L_2)$, его минимальное значение достигается при $L_1 = L_2$ и равно положительной для этой конфигурации величине $(R_2 - R_1)(R_1 - L_2)$. Этот вывод непосредственно связан с равномерностью распределений.

Пусть теперь на первом интервале задано равномерное распределение, а на втором треугольное. Вспомним, что плотность треугольного распределения вероятностей имеет вид (M – мода распределения)

$$f(z) = \frac{2}{R-L} \begin{cases} \frac{z-L}{M-L}, & L \leq z \leq M, \\ \frac{R-z}{R-M}, & M < z \leq R \end{cases}$$

Для конфигурации D имеем: $P(i_{2f} > i_1) = (i_{2f} - L)/S$,

$$P(I_2 \succ I_1) = \frac{2}{S^2} \left[\int_L^M dz(z-L)^2 / (M-L) + \int_M^R dz(R-z)(z-L) / (R-M) \right] = \frac{M+R-2L}{3S}.$$

Тогда $Kas(I_2 \succ I_1) = (2M - L - R)/(3S) = 2(\langle I_2 \rangle - \langle I_1 \rangle)/S$, $\langle I_2 \rangle = (L + M + R)/3$. Если определить положение моды соотношением $M = (1-h)L + hR$, то $Kas(I_2 \succ I_1) = (2h-1)/3$ и зависит только от положения моды треугольного распределения. Вновь величина искомых шансов может быть (при правильно выбранной нормировке) выражена через разность средних величин.

Конфигурация C: Здесь

$$P(I_2 \succ I_1) = 2 \left[\int_{L_2}^M dz \frac{(z - L_2)(z - L_1)}{M - L_2} + \int_M^{R_2} dz \frac{(R_2 - z)(z - L_1)}{R_2 - M} \right] / (S_1 S_2).$$

Отсюда следует, что $Kas(I_2 \succ I_1) = 2[(M + R_2 + L_2)/3 - (R_1 + L_1)/2]/S_1 = 2(\langle I_2 \rangle - \langle I_1 \rangle)/S_1$.

Конфигурация В. Вновь, как и выше, $P(i_1 > i_{2f}) = (R_1 - i_{2f})/S_1$. Необходимо различать случаи $M \geq R_1$ и $M < R_1$. В первом случае при интегрировании по всем возможным i_2 присутствует только левая ветвь плотности вероятности треугольного распределения, а во втором обе ветви.

$$\text{Тогда, при } M \geq R_1 \quad Kas(I_2 \succ I_1) = 1 - \frac{4}{S_1 S_2} \int_{L_2}^{R_1} dz \frac{(R_1 - z)(z - L_2)}{M - L_2} = 1 - \frac{2(R_1 - L_2)^3}{3S_1 S_2 (M - L_2)}$$

$$\text{А при } M < R_1 \quad P(I_2 \prec I_1) = \frac{2}{S_1 S_2} \left[\int_{L_2}^M dz \frac{(R_1 - z)(z - L_2)}{M - L_2} + \int_M^{R_1} dz \frac{(R_1 - z)(R_2 - z)}{R_2 - M} \right],$$

и, следовательно,

$$K(I_2 \succ I_1) = 1 - 2P(I_2 \prec I_1) = 1 - \frac{2}{3S_1 S_2} [(M - L_2)(3R_1 - 2M - L_2) + \frac{(R_1 - M)^2}{R_2 - M} (3R_2 - 2M - R_1)].$$

Видно, что здесь величина коэффициента уверенности не равна с точностью до нормировки разности соответствующих средних.

Пусть теперь на обоих сравниваемых интервалах заданы треугольные распределения. Конфигурация Д. Здесь при сравнении фиксированных значений i_{2f} со значениями i_1 первые могут быть больше моды треугольного распределения M_1 , заданного на I_1 , или меньше его: $i_{2f} \geq M_1$ или $i_{2f} < M_1$. При $i_{2f} < M_1$ $P(i_{2f} > i_1) = (i_{2f} - L)/[S(M_1 - L)]$, а при $i_{2f} \geq M_1$ $P(i_{2f} > i_1) = 1 - (R - i_{2f})^2/[S(R - M_1)]$. Возможны два расположения мод распределений на сравниваемых интервалах: $M_1 \geq M_2$ или $M_1 < M_2$. Рассмотрим случай первого расположения мод. Проходя слева направо по I_2 , i_2 обегает пути 1: $M_1 > M_2 > i_2$; 2: $M_1 > i_2 > M_2$ и, наконец, 3: $i_2 > M_1 > M_2$.

Тогда для пути 1 имеем (напомним, что $M_1 \geq M_2$):

$$P(I_2 \succ I_1) = \frac{2}{S^2} \int_L^{M_2} dz \frac{(z - L)^3}{(M_1 - L)(M_2 - L)} = \frac{(M_2 - L)^3}{2S^2(M_1 - L)} = F_{1D}.$$

Для пути 2:

$$P(I_2 \succ I_1) = \frac{2}{S^2} \int_{M_2}^{M_1} dz \frac{(z - L)^2(R - z)}{(M_1 - L)(R - M_2)} = \frac{2}{S^2(M_1 - L)(R - M_2)} \left[\frac{(M_1^3 - M_2^3)(R + 2L)}{3} + L^2 R(M_1 - M_2) - \frac{(M_1^2 - M_2^2)(L^2 + 2RL)}{2} - \frac{M_1^4 - M_2^4}{4} \right] = F_{2D}.$$

Для пути 3:

$$P(I_2 \succ I_1) = \frac{2}{S} \int_{M_1}^R dz \left[1 - \frac{(R - z)^2}{S(R - M_1)} \right] \frac{R - z}{R - M_2} = \frac{(R - M_1)^2}{S(R - M_2)} \left[1 - \frac{R - M_1}{2S} \right] = F_{3D}.$$

Следовательно, $P(I_2 \succ I_1) = F_{1D} + F_{2D} + F_{3D}$, а $Kas(I_2 \succ I_1) = 2P(I_2 \succ I_1) - 1$.

Соответствующие соотношения для случая $M_1 < M_2$ следуют из того факта, что для этой конфигурации $Kas(I_2 \succ I_1 | M_1 = A, M_2 = B) = -Kas(I_2 \succ I_1 | M_1 = B, M_2 = A)$, $A \geq B$. И $P(I_2 \succ I_1 | M_1 = A, M_2 = B) + P(I_2 \succ I_1 | M_1 = B, M_2 = A) = 1$.

Конфигурация С. Здесь $P(I_2 \succ I_1) = P(L_1 < i_1 < L_2) + P(i_2 > i_1 | i_1, i_2 \in [L_2, R_2])$. Необходимо различать случаи разного положения мод распределений. Пусть вначале $M_1 < L_2$.

Тогда $P(L_1 < i_1 < L_2) = 1 - (R_1 - L_2)^2 / [S_1(R_1 - M_1)]$. А на интервале $[L_2, R_2]$ $P(i_{2f} > i_1) = [(R_1 - L_2)^2 - (R_1 - i_{2f})^2] / [S_1(R_1 - M_1)]$. Это означает, что (при $i_{2f} = z$)

$$P(i_2 > i_1 | i_1, i_2 \in [L_2, R_2]) = \frac{2}{S_2(M_2 - L_2)} \int_{L_2}^{M_2} dz P(z > i_1)(z - L_2) + \frac{2}{S_2(R_2 - M_2)} \int_{M_2}^{R_2} dz P(z > i_1)(R_2 - z)$$

И, таким образом, при $M_1 < L_2$ имеем:

$$K(I_2 \succ I_1) = 1 - \frac{6R_1^2 + L_2^2 + R_2^2 + L_2R_2 - (M_2 + L_2 + R_2)(4R_1 - M_2)}{3S_1(R_1 - M_1)}.$$

При $M_1 > R_2$, действуя точно так же, получаем:

$$K(I_2 \succ I_1) = \frac{6L_1^2 + L_2^2 + R_2^2 + L_2R_2 - (M_2 + L_2 + R_2)(4L_1 - M_2)}{3S_1(M_1 - L_1)} - 1.$$

Пусть теперь $L_2 < M_1 < R_2$. Тогда $P(L_1 < i_1 < L_2) = (L_2 - L_1)^2 / [S_1(M_1 - L_1)] = F_{1C}$. Следует различать случаи $L_2 < M_1 < M_2$ и $M_2 < M_1$.

При $L_2 < M_1 < M_2$ $P(i_{2f} > i_1 | i_{2f} < M_1) = [(i_{2f} - L_1)^2 - (L_2 - L_1)^2] / [S_1(M_1 - L_1)] = G_1(i_{2f})$, $P(i_{2f} > i_1 | i_{2f} > M_1) = 1 - (L_2 - L_1)^2 / [S_1(M_1 - L_1)] - (R_1 - i_{2f})^2 / [S_1(R_1 - M_1)] = G_2(i_{2f})$. Тогда

$$P(i_2 > i_1 | i_1, i_2 \in [L_2, R_2], M_1 > i_2) = \frac{2}{S_2(M_2 - L_2)} \int_{L_2}^{M_1} dz G_1(z)(z - L_2) = \frac{2}{S_1S_2(M_1 - L_1)(M_2 - L_2)} \circ$$

$$\circ \left[\frac{M_1^4 - L_2^4}{4} + \frac{(M_1^2 - L_2^2)(L_1^2 + 2L_1L_2) - (L_2 - L_1)^2(M_1 - L_2)^2}{2} - \frac{(M_1^3 - L_2^3)(L_2 + 2L_1)}{3} - \right.$$

$$\left. - L_1^2L_2(M_1 - L_2) \right] = F_{2C}.$$

$$P(i_2 > i_1 | i_i \in [L_2, R_2], M_2 > i_2 > M_1) = \frac{2}{S_2(M_2 - L_2)} \int_{M_1}^{M_2} dz G_2(z)(z - L_2) = \left\{ \left[1 - \frac{(L_2 - L_1)^2}{S_1(M_1 - L_1)} \right] \circ \right.$$

$$\circ \frac{(M_2 - L_2)^2 - (M_1 - L_2)^2}{2} - \frac{1}{S_1(R_1 - M_1)} \left[\frac{M_2^4 - M_1^4}{4} + \frac{(M_2^2 - M_1^2)(R_1^2 + 2R_1L_2)}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(M_1^3 - M_2^3)(L_2 + 2R_1)}{3} - R_1^2L_2(M_2 - M_1) \right\} \frac{2}{S_2(M_2 - L_2)} = F_{3C}.$$

$$P(i_2 > i_1 | M_2 < i_2) = \frac{2}{S_2(R_2 - M_2)} \int_{M_2}^{R_2} dz G_2(z)(R_2 - z) = \frac{2}{S_2(M_2 - L_2)} \left\{ \frac{(R_2 - M_2)^2}{2} \left[1 - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{(L_2 - L_1)^2}{S_1(M_1 - L_1)} \right] - \left[\frac{M_2^4 - R_2^4}{4} - \frac{(R_2^2 - M_2^2)(R_1^2 + 2R_1R_2)}{2} + \frac{(R_2^3 - M_2^3)(R_2 + 2R_1)}{3} + \right.$$

$$\left. + R_1^2R_2(R_2 - M_1) \right] \frac{1}{S_1(R_1 - M_1)} \left. \right\} = F_{4C}.$$

$$P(I_2 \succ I_1) = F_{1C} + F_{2C} + F_{3C} + F_{4C}. \text{ Kas}(I_2 \succ I_1) = 2P(I_2 \succ I_1) - 1.$$

При $L_2 < M_2 < M_1$, действуя точно так же, получаем:

$$\begin{aligned} P(i_2 > i_1 | i_1, i_2 \in [L_2, R_2], M_1 > i_2) &= \frac{2}{S_2(M_2 - L_2)} \int_{L_2}^{M_2} dz G_1(z)(z - L_2) = \\ &= \frac{2}{S_1 S_2 (M_1 - L_1)(M_2 - L_2)} \left[\frac{M_2^4 - L_2^4}{4} + \frac{(M_2^2 - L_2^2)(L_1^2 + 2L_1 L_2) - (L_2 - L_1)^2 (M_2 - L_2)^2}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(M_2^3 - L_2^3)(L_2 + 2L_1)}{3} - L_1^2 L_2 (M_2 - L_2) \right] = F_{5C}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(i_2 > i_1 | i_1, i_2 \in [L_2, R_2], M_1 > i_2 > M_2) &= \frac{2}{S_2(R_2 - M_2)} \int_{M_2}^{M_1} dz G_1(z)(R_2 - z) = \\ &= \left[\frac{(R_2 - M_1)^2 - (R_2 - M_2)^2}{2} (L_2 - L_1)^2 - \frac{M_1^4 - M_2^4}{4} + \frac{(M_2^2 - M_1^2)(L_1^2 + 2R_2 L_1)}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(M_1^3 - M_2^3)(R_2 + 2L_1)}{3} + L_1^2 R_2 (M_1 - M_2) \right] \frac{2}{S_1 S_2 (R_2 - M_2)(M_1 - L_1)} = F_{6C}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(i_2 > i_1 | i_1, i_2 \in [L_2, R_2], M_1 < i_2) &= \frac{2}{S_2(R_2 - M_2)} \int_{M_1}^{R_2} dz G_2(z)(R_2 - z) = \\ &= \frac{(R_2 - M_1)^2}{S_2(R_2 - M_2)} \left[1 - \frac{(L_2 - L_1)^2}{S_1(M_1 - L_1)} \right] + \frac{1}{S_1 S_2 (R_1 - M_1)(R_2 - M_2)} \left[(R_2^2 - M_1^2)(R_1^2 + 2R_1 R_2) - \right. \\ &\quad \left. - 2R_2 R_1^2 (R_2 - M_1) + \frac{R_2^4 - M_1^4}{2} - \frac{2(R_2^3 - M_1^3)(R_2 + 2R_1)}{3} \right] = F_{7C}. \end{aligned}$$

$$P(I_2 \succ I_1) = F_{1C} + F_{5C} + F_{6C} + F_{7C}. \text{ Kas}(I_2 \succ I_1) = 2P(I_2 \succ I_1) - 1.$$

Конфигурация В. Пусть $M_1 < L_2$, а $M_2 > R_1$. Вновь, как и выше, целесообразнее использовать соотношение $\text{Kas}(I_2 \succ I_1) = 1 - 2P(I_1 \succ I_2)$. $P(i_1 > i_2 | i_1, i_2 \in [L_2, R_1]) = (R_1 - i_2)^2 / [S_1(R_1 - M_1)]$. Используя ту же технику, что и ранее, получаем:

$$\begin{aligned} P(I_2 \prec I_1) &= \frac{R_1 - L_2}{S_1 S_2 (R_1 - M_1)(M_2 - L_2)} \left[(R_1 + L_2)(R_1^2 + 2R_1 L_2) + \frac{(R_1 + L_2)(R_1^2 + L_2^2)}{2} - 2R_1^2 L_2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(R_1^2 + L_2^2 + R_1 L_2)(2R_1 + L_2)}{3} \right]. \end{aligned}$$

В случае $M_1 < L_2, M_2 < R_1$ имеем:

$$\begin{aligned} P(I_2 \prec I_1) &= \frac{1}{S_1 S_2 (R_1 - M_1)} \left\{ (M_2 + L_2)(R_1^2 + 2R_1 L_2) + \frac{(M_2 + L_2)(M_2^2 + L_2^2)}{2} - 2R_1^2 L_2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(M_2^2 + L_2^2 + M_2 L_2)(2R_1 + L_2)}{3} + \frac{R_1 - M_2}{R_2 - M_2} [2R_1^2 R_2 - (R_1 + M_2)(R_1^2 + 2R_1 R_2) - \frac{(R_1 + M_2)(R_1^2 + M_2^2)}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(M_2^2 + R_1^2 + M_2 R_1)(2R_1 + R_2)}{3} \right\}. \end{aligned}$$

При $M_1 > L_2, M_2 > R_1$ $P(i_1 > i_2 | i_1, i_2 \in [L_2, R_1], i_2 < M_1) = 1 - (i_2 - L_1)^2 / [S_1(M_1 - L_1)]$,

$P(i_1 > i_{2f} | i_1, i_2 \in [L_2, R_1], i_{2f} > M_1) = (R_1 - i_{2f})^2 / [S_1(R_1 - M_1)]$. Тогда

$$P(I_2 \prec I_1) = \frac{(M_1 - L_2)^2}{S_2(M_2 - L_2)} + \frac{1}{S_1 S_2(M_2 - L_2)} \left\{ (R_1 + M_1)(R_1^2 + 2R_1 L_2) + \frac{(R_1 + M_1)(R_1^2 + M_1^2)}{2} - 2R_1^2 L_2 - \right. \\ \left. - \frac{2(M_1^2 + R_1^2 + M_1 R_1)(2R_1 + L_2)}{3} + \frac{1}{M_1 - L_1} [2L_1^2 L_2(M_1 - L_2) - (M_1^2 - L_2^2)(L_1^2 + 2L_1 L_2) - \frac{M_1^4 - L_2^4}{2} + \right. \\ \left. + \frac{2(M_1^3 - L_2^3)(2L_1 + L_2)}{3} \right\}.$$

Аналогичные формулы для случая $M_1 > L_2, M_1 < M_2 < R_1$ имеют вид:

$$P(I_2 \prec I_1) = \frac{(M_1 - L_2)^2}{S_2(M_2 - L_2)} + \frac{1}{S_1 S_2(M_2 - L_2)} \left\{ [2L_1^2 L_2(M_1 - L_2) + \frac{2(M_1^3 - L_2^3)(2L_1 + L_2)}{3} - (M_1^2 - L_2^2)(2L_1 L_2 + \right. \\ \left. + L_1^2) - \frac{M_1^4 - L_2^4}{2}] \frac{1}{M_1 - L_1} + [2R_1^2 L_2(M_1 - M_2) - (M_1^2 - M_2^2)(R_1^2 + 2R_1 L_2) + \frac{M_2^4 - M_1^4}{2} + \right. \\ \left. + \frac{2(M_1^3 - M_2^3)(2R_1 + L_2)}{3}] \frac{1}{R_1 - M_1} \right\} + \frac{1}{S_1 S_2(R_1 - M_1)(R_2 - M_2)} [2R_1^2 R_2(R_1 - M_2) + \frac{2(R_1^3 - M_2^3)(2R_1 + R_2)}{3} - \\ - (R_1^2 - M_2^2)(2R_1 R_2 + R_1^2) - \frac{R_1^4 - M_2^4}{2}]$$

Наконец, для случая $M_2 < M_1$ получаем:

$$P_1(I_2 \prec I_1) = 1 - \frac{(R_2 - M_1)^2}{S_2(R_2 - M_2)} - \frac{1}{S_1 S_2(M_1 - L_1)} \left[\frac{(M_2 + L_2)(M_2^2 + L_2^2)}{2} - \right. \\ \left. - \frac{2(L_2 + 2L_1)(M_2^2 + L_2^2 + M_2 L_2)}{3} + (M_2 + L_2)(L_1^2 + 2L_1 L_2) - 2L_1^2 L_2 \right] = F_{1B}.$$

$$P_2(I_2 \prec I_1) = \frac{1}{S_1 S_2(M_1 - L_1)(R_2 - M_2)} \left[\frac{M_1^4 - M_2^4}{2} - \frac{2(M_1^3 - M_2^3)(R_2 + 2L_1)}{3} - \right. \\ \left. - 2L_1^2 R_2(M_1 - M_2) + (M_1^2 - M_2^2)(L_1^2 + 2L_1 R_2) \right] = F_{2B}.$$

$$P_3(I_2 \prec I_1) = \frac{1}{S_1 S_2(R_1 - M_1)(R_2 - M_2)} \left[\frac{M_1^4 - R_1^4}{2} + \frac{2(R_1^3 - M_1^3)(R_2 + 2R_1)}{3} + \right. \\ \left. + 2R_1^2 R_2(R_1 - M_1) + (M_1^2 - R_1^2)(R_1^2 + 2R_1 R_2) \right] = F_{3B}.$$

$$P(I_1 \succ I_2) = F_{1B} + F_{2B} + F_{3B}, \text{ и } Kas(I_2 \succ I_1) = 1 - 2P(I_1 \succ I_2).$$

Установленные аналитические соотношения для расчета коэффициентов уверенности позволяют теперь обратиться к сопоставлению результатов сравнения по коэффициенту уверенности и по некоторым другим используемым на практике критериям.

3. Точечные индикаторы при оценке и сравнении интервальных альтернатив

Имеются другие, более простые на первый взгляд методы сравнения интервальных величин. Они основаны на замещении интервальных оценок точечными, предположительно эквивалентными при сравнении исходным интервальным. Эти методы подкупают не только своей простотой, но и тем фактом, что, как отмечают эксперты, руководители-практики, принимающие решения, привыкли работать и предпочитают иметь дело с точечными оценками, в том числе для будущих значений сравниваемых показателей. Наглядность точечных критериев проявляется и в том факте, что они измеряются в тех же единицах, что и интервальные показатели эффективности альтернатив.

При оценке и сравнении интервально-вероятностных альтернатив в классе точечных индикаторов наиболее употребителен критерий математического ожидания показателей качества [11-12]. Используются также детерминированные эквиваленты теории ожидаемой полезности [13], а при отказе от задания распределений шансов на альтернативах - критерий «пессимизма – оптимизма» Гурвица [14].

Простота и наглядность точечных оценок скрывает некоторые их недостатки. У ЛПР может сложиться впечатление, что на их основе могут быть приняты исчерпывающие, при всех реализациях верные решения о предпочтительности альтернатив, что, конечно, не так. Кроме того, эти оценки не сопровождаются оценками риска, связанного с принятием неверной гипотезы о предпочтительности.

Обратимся к сопоставлению результатов сравнения интервальных альтернатив по коэффициенту уверенности и по критерию математического ожидания. В предыдущем разделе мы показали, что в ряде простых случаев (например, в случаях задания равномерных распределений на сопоставляемых интервалах, а в некоторых случаях и для комбинации равномерного и треугольного распределений) решения задачи сравнения интервальных альтернатив предлагаемым методом и на базе правильно нормированной разности средних для распределений вероятности совпадают. Ни в одном другом случае использование критерия разно-

сти средних оценок ΔAv не позволяет провести корректное сравнение интервальных альтернатив, поскольку при этом нельзя оценить риск принятия неверной гипотезы. Не представляется возможным также подобрать единый нормирующий множитель для критерия ΔAv , который приводил бы к значениям искомых шансов.

Можно предположить, однако, что критерий ΔAv не противоречит критерию коэффициента уверенности. Действительно, многие численные примеры сравнения интервальных альтернатив для произвольных распределений, проведенные нами методом статистических испытаний, подтверждают это: знаки величин ΔAv и $Kas(I_2 \succ I_1)$ в этих примерах совпадают. Можно было бы считать поэтому, что критерий ΔAv пригоден для использования в задачах оценки и сравнения интервальных альтернатив для экспресс-анализа. Это, однако, не так, нетрудно привести контрпример, опровергающий эту гипотезу: для вложенных интервалов с треугольными распределениями на них ($L_1 = 3, M_1 = 38, R_1 = 41, L_2 = 23, M_2 = 25, R_2 = 37$) $Kas(I_2 \succ I_1) = -0.02$, а $\Delta Av = 1$. В аналогичном примере для сдвинутых интервалов ($L_1 = 0, M_1 = 4.9, R_1 = 5, L_2 = 1, M_2 = 3, R_2 = 6$) $Kas(I_2 \succ I_1) = -0.03$, а $\Delta Av = 0.03$. Нетрудно привести аналогичный пример для наиболее распространенного на практике случая оценки ожидаемой эффективности интервальной альтернативы. Пусть значения чистого дисконтированного дохода некоторого инвестиционного проекта лежат в интервале $L = -10, R = 20$, и шансы на реализацию указанных значений описываются треугольным распределением вероятностей с модой $M = -8$. Можно видеть, что $\langle I \rangle = (L + R + M)/3 = 0.7$, в то время как при $M < 0$ $Kas(I_2 \succ I_1) = 2R^2/[(R - M)(R - L)] - 1 = -0.05$. Это означает, что критерии математического ожидания и коэффициента уверенности, вообще говоря, противоречивы.

Нетрудно понять природу этого расхождения: даже несмотря на то, что шансы предпочтительности второй альтернативы в этих примерах меньше, чем первой, суммарный «взвешенный по вероятности» положительный вклад больших значений эффекта в разности средних превосходит отрицательный вклад, пусть и встречающихся более часто, меньших значений. Это обстоятельство скажется, однако, на результате сравнения лишь в случае возможности многократного реального повторения точечных реализаций сравниваемых интервальных альтернатив,

что вряд ли можно считать допустимым в задачах экспертного анализа прогнозных интервальных оценок показателей качества альтернатив.

Что касается анализа адекватности других точечных оценок, используемых при сравнении интервальных альтернатив, то это тема заслуживает отдельного рассмотрения. Сейчас отметим только, что при выборе значений коэффициентов «пессимизма – оптимизма» Гурвица, приемлемых при сравнении и оценке интервальных альтернатив, нужно учитывать специфику конфигурации сопоставляемой пары. Так, нетрудно проверить, что для смещенных интервалов (конфигурация В) одна из альтернатив предпочтительнее другой при любом выборе одинаковых значений коэффициентов Гурвица из отрезка $[0, 1]$. Поэтому, если знания ЛПР не позволяют согласиться с таким выводом, ему следует использовать разные значения коэффициентов Гурвица для разных альтернатив в их паре.

Заключение

При работе с интервальными оценками качества альтернатив лица, принимающие решения, в процессе решения задач выбора в условиях неопределенности часто предпочитают заменить неопределенную интервальную оценку детерминированной точечной. Помимо оценок математического ожидания при этом используются и другие точечные оценки, такие как коэффициенты «пессимизма – оптимизма» Гурвица [14] и детерминированные эквиваленты теории ожидаемой полезности [13]. Однако, как показано в статье, адекватный задаче метод оценки и сравнения интервальных альтернатив должен, из-за неопределенности будущего исхода, позволять соизмерять шансы проверяемой гипотезы о предпочтительности и противоположной ей. Один из таких методов предложен в настоящей работе.

Литература

1. Канторович Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сибирский математический журнал. 1962. Т.3, № 5. С. 701 – 709.
2. Рузавин Г.И. Вероятность и правдоподобные рассуждения. // Философия науки. Вып. 2. Гносеологические и логико-методические проблемы. М.: ИФ РАН. 1996.
3. Петровский А.Б. Компьютерная поддержка принятия решений: современное состояние и перспективы развития // Системные исследования. Методологические проблемы. Ежегодник 1996. М.: Эдиториал УРСС. 1996.
4. Дилигенский Н.В., Дымова Л.Г., Севастьянов П.В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология. М.: Издательство Машиностроение – 1. 2004.
5. Стернин М.Ю., Чугунов Н.В., Шепелев Г.И. Учет неопределенности экспертных знаний: синтез интервального и вероятностного подходов // Информационные технологии и вычислительные системы. 2005. Т. 4. С. 36 – 46.
6. Стернин М.Ю., Шепелев Г.И., Шепелев Н.Г. Свойства обобщенного равномерного распределения вероятностей // Труды Второй международной конференции „Системный анализ и информационные технологии“. 2007. Т. 1. С. 239 – 242.
7. Ларичев О.И. Вербальный анализ решений. М.: Наука. 2006.
8. Стернин М.Ю., Шепелев Г.И. Сравнение интервальных альтернатив. // Труды Института системного анализа Российской академии наук. 2011. Т. 61, вып. 2. Сс. 7 – 11.
9. Shepelyov G., Sternin M. Methods for comparison of alternatives described by interval estimations // International Journal of Business Continuity and Risk Management. 2011. Vol. 2, No. 1.
10. Стернин М.Ю., Шепелев Г.И. Оценка интервальных альтернатив: неопределенности и предпочтения. // International journal “Information models and analysis”. 2012. V.1, No 4. Pp. 357 – 369.
11. Смоляк С.А. О сравнении альтернатив со случайным эффектом. // Экономика и мат. методы. 1996. Т. 32. Вып. 4.
12. Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А. Оценка эффективности инвестиционных проектов. Теория и практика М.: Дело. 2002.
13. Keeney R., Raiffa H. Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs. Cambridge University Press. 1993.
14. Hurwicz L. Optimality criteria for decision making under ignorance. ‘Cowles Commission Discussion Paper’, Statistics, # 370, New Haven. 1951.

Стернин Михаил Юрьевич. Старший научный сотрудник ИСА РАН. Окончил МИРЭА в 1970 году. Автор более 70 печатных работ. Область научных интересов: математическое моделирование, системы поддержки принятия решений, системы, основанные на знаниях. E-mail: mister@isa.ru

Шепелёв Геннадий Иванович. Заведующий лабораторией ИСА РАН. Окончил МГУ в 1965 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. Автор более 70 печатных работ. Область научных интересов: системный анализ, математическое моделирование, методы принятия решений. E-mail: gis@isa.ru