

Множество Парето для критериев эффективности, представленных стохастическими и нечеткими данными

Аннотация. Рассмотрены многокритериальные подходы для сравнения, ранжирования и выбора наиболее эффективных решений среди альтернатив в ситуациях, когда критерии эффективности каждой из них представлены функциями распределения случайной величины или нечеткими множествами. Предложены методы построения множества Парето для векторных критериев эффективности, представленных случайными величинами или нечеткими множествами, учитывающие степень допускаемого риска и предпочтения экспертов и лица, принимающего решение.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, стохастические критерии эффективности, нечеткие множества, множество Парето, сравнение и ранжирование.

Введение

Во многих практических приложениях, связанных с принятием решений, значение показателя эффективности может быть выражено функцией распределения вероятностей случайной величины или некоторым нечетким множеством, что наиболее характерно для стратегических проблем и задач перспективного планирования. В качестве наиболее ярких примеров таких ситуаций могут быть рассмотрены ожидаемый через определенный период времени объем прибыли при распределении инвестиций, прогнозируемое время в пути в зависимости от состояния дорог, погоды, времени суток и напряженности движения транспорта, предполагаемые объемы продаж и ожидаемой прибыли, выполненные на основе маркетинговых исследований и многие другие. При анализе двух альтернативных решений, показатели эффективности которых выражены соответственно двумя непрерывными или дискретными функциями распределения или Fuzzy-числами (Fuzzy-множествами), лицу, принимающему решение, зачастую очень трудно определить, какому из этих значений отдать предпочтение. Построение, анализ и сужение множества Парето [4, 7] в этих условиях и выбор среди аль-

тернатив, принадлежащих множеству Парето, допустимых и наиболее эффективных решений в этих условиях также сопряжено с определенными трудностями. Всем этим вопросам уделено недостаточное внимание в монографиях и периодической литературе. Учитывая актуальность и практическую важность этих проблем, в работе предложены некоторые подходы к их решению. Выбор определенного алгоритма принятия решений связан со спецификой решаемой задачи и предпочтениями экспертов и лица, принимающего решение.

1. Многокритериальная оценка показателя эффективности

В ряде случаев, если значения показателей эффективности двух различных альтернатив выражены в виде некоторой функции распределения случайной величины, очень трудно сделать объективные выводы, какой из этих альтернатив дать предпочтение. Использование математического ожидания $m(F)$ случайной величины в качестве такой оценки не дает лицу, принимающему решение (ЛПР), полной информации о степени риска при принятии решений. В литературе [1] рассматриваются сле-

дующие альтернативные измерители риска: дисперсия случайной величины $\sigma^2(F)$, математическое ожидание величины отрицательных отклонений от математического ожидания, вероятность получения значений случайной величины меньше или больше некоторого наперед заданного значения, а также величины моментов отклонений более высоких порядков. В данном разделе рассматриваются математические модели оценки и алгоритмы сравнения критериев эффективности, выраженных в виде функций распределения случайной величины, в многокритериальной постановке.

Для лица, принимающего решение, в ряде случаев значение $\sigma^2(F)$ не достаточно ясно раскрывает картину степени его возможного риска. Было бы существенно понятнее, если бы риск принятия решений был проиллюстрирован некоторой системой вероятностных показателей типа

$$p\{F \leq B_k\} \leq q_k, \quad k=1, \dots, n, \quad (1)$$

$$p\{F \geq D_p\} \geq g_p, \quad p=1, \dots, m. \quad (2)$$

Т.е. вероятность того, что потери будут не выше некоторой заранее установленной величины B_k , должны быть больше значения q_k , а вероятности того, что показателя будет больше или равна некоторой установленной величине D_p , должна быть не меньше значения g_p .

Степень возможного риска может быть также оценена выражениями

$$[\overline{B}_t : p\{F \leq \overline{B}_t\} \leq \beta_t], \quad t=1, \dots, r; \quad (3)$$

$$[\overline{D}_w : p\{F \geq \overline{D}_w\} \geq \pi_w], \quad w=1, \dots, W. \quad (4)$$

Здесь $\overline{B}_t$ и $\overline{D}_w$ – соответственно некоторые пороговые значения анализируемого показателя. Величина, обеспечивающая достижение не выше или не ниже этого значения, гарантирует с вероятностью не ниже заданной (соответственно с вероятностью β_t или π_w).

Представляется целесообразным в ряде случаев значение показателя эффективности, выраженного функцией распределения случайной величины, оценивать некоторым комплексным критерием, учитывающим как значение математического ожидания этой величины, так и риск, связанный с возможными отклонениями этого значения от величины математического

ожидания. В качестве такого комплексного показателя могут быть использованы различного вида линейные свертки показателей $m(F)$, $\sigma(F)$ и (1)-(4), виды которых рассмотрены в литературе [2-5]. Наиболее часто используемой при принятии решений при максимизации критерия оптимальности в условиях риска является линейная свертка показателей $m(F)$ и $\sigma(F)$ вида

$$\Phi_1 = m(F) - \alpha \cdot \sigma(F), \quad (5)$$

где α – некоторый весовой коэффициент, который при оценке финансовых рисков выбирается равным $\alpha \in [0.2 - 0.3]$ [6].

Представляют интерес также линейные свертки вида

$$\Phi_2 = m(F) - \alpha_1 \cdot \sigma(F) + \sum_{r=2}^{R_1} \alpha_r \cdot p\{F \geq D_r\} - \sum_{r=R_1+1}^R \alpha_r \cdot p\{F \leq B_r\}, \quad (6)$$

$$\Phi_3 = m(F) - \alpha_1 \cdot \sigma(F) + \sum_{r=2}^{R_1} \alpha_r \cdot \{D_r : p[F \geq D_r] \geq \pi_r\} - \sum_{r=R_1+1}^R \alpha_r \cdot \{B_r : p[F \leq B_r] \leq \beta_r\}. \quad (7)$$

В выражениях (6), (7) $\alpha_r \geq 0$, $r=1, \dots, R$, – весовые коэффициенты, удовлетворяющие условиям нормировки $\sum_{r=1}^R \alpha_r = 1$.

При выборе решений, максимизирующих значение критерия оптимальности, при рассмотрении двух альтернатив A^1 и A^2 предпочтение отдается альтернативе A^1 , для которой $\Phi_1(A^1) > \Phi_1(A^2)$.

2. Критерии и методы определения предпочтений, сравнения и ранжирования нечетких множеств

При анализе двух альтернативных решений, показатели эффективности которых выражены соответственно двумя Fuzzy-числами (нечеткими множествами), лицу, принимающему решение (ЛПР), зачастую очень трудно определить, какому из этих значений отдать предпочтение. Известны и широко используют

ся в практике соотношения эквивалентности и включения для непрерывных и дискретных Fuzzy-множеств $A = \{x, \mu_A(x)\}$, $B = \{x, \mu_B(x)\}$ в виде [9-11]

$$A = B, \text{ если } \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x \in X, \\ A \subseteq B, \text{ если } \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \forall x \in X. \quad (8)$$

Однако в целом ряде случаев соотношения (8), (9) не выполняются, и возникают проблемы сравнения, упорядочения или ранжирования Fuzzy-чисел, аналогичные проблемам сравнения и упорядочения действительных или целых чисел по их возрастанию или убыванию. Упорядочение Fuzzy-чисел в соответствии с увеличением или уменьшением средневзвешенной оценки M_A или координаты центра тяжести C_A , где

$$M_A = \int_{x \in X} x \cdot \mu_A(x) \cdot dx, \quad C_A = \frac{\int_{x \in X} x \cdot \mu_A(x) \cdot dx}{\int_{x \in X} \mu_A(x) \cdot dx},$$

также во многих практических приложениях не всегда обосновано.

Общая концепция сравнения или ранжирования Fuzzy-множеств заключается в том, чтобы каждому размытому (Fuzzy-) множеству можно было поставить в соответствие некоторую характеристику, выраженную конкретным действительным числом, по возрастанию или убыванию которых (в зависимости от содержательной постановки задачи) можно было бы упорядочить эти множества.

В литературе [8, 9-11] предложены правила абсолютного предпочтения

$$\inf \sup (A) > \sup \sup (B),$$

а также различные правила абсолютного и относительного предпочтения, основанные на сравнении интервалов области изменения переменной $x \in X$ [10, 11].

Пусть $[h_A^1, h_A^2]$ - интервалом изменения значения x Fuzzy-множества A , где

$$h_A^1 = \{\min x \mid x \in X, \mu_A(x) > 0\}, \\ h_A^2 = \{\max x \mid x \in X, \mu_A(x) > 0\}.$$

Если $A = \{x, \mu_A(x)\}$ и $B = \{x, \mu_B(x)\}$ - два выпуклых Fuzzy-множества, определённые на одном и том же множестве значений X , для которых выполняются соотношения $h_A^1 \geq h_B^2$, то

$A \succ B$, т.е. Fuzzy-множество A является строго более предпочтительным Fuzzy-множества B .

В практических приложениях правила абсолютного предпочтения, как правило, не выполняются, т.е.

$$h_A^1 \geq h_B^1, \quad h_A^2 \geq h_B^2, \quad \text{но } h_A^1 < h_B^2.$$

В этом случае используются условия нестрогого предпочтения. Каждое из этих правил является субъективным и использует специфику решаемой задачи, а также предпочтения лица, принимающего решения (ЛПР).

В литературе наиболее широкое распространение получили методы, основанные на анализе различного уровня α -сечений Fuzzy-множеств [10, 11], которые для случая Fuzzy-множеств, представленных LR-интервалами развиты в работах автора [8], методы Chen и Jain (например [10]), основанные на вычислении некоторых функций ранга, методы Dubois, Prade [10, 12], в которых был предложен многокритериальный подход, основанный на вычислении 4 показателей. Авторы Tong и Bonissone предложили подходы, сочетающие применение количественных и лингвистических правил. Все эти подходы подробно описаны в монографии [10].

Следует отметить, что в настоящее время в сложных случаях не существует методов сравнения, одинаково эффективных для различных практических приложений. Поэтому выбор того или иного конкретного алгоритма сравнения и ранжирования диктуется содержательной постановкой конкретной прикладной задачи.

Во многих практических приложениях необходимо установить правила относительного предпочтения Fuzzy-множеств из условий сравнения некоторой вычисленной меры гарантии получения желаемого результата. С этой целью введем некоторые характеристики Fuzzy-множеств (Z -сечения), аналогичные следующим известным и широко применяемым в теории вероятности и математической статистике показателям:

- вероятность того, что значение данного показателя, заданного некоторой функцией распределения вероятностей, будет не меньше (или не больше) некоторой установленной величины;

- некоторая величина, значение показателя не ниже (или не выше) которой гарантируется с некоторой наперед заданной вероятностью.

Предлагаются также многокритериальные подходы решения проблемы, основанные на введении некоторого обобщенного критерия эффективности в виде линейной свертки частных критериев, оценивающих риск получения неблагоприятного результата и перспективы достижения поставленных целей. Формулируется задача выбора наиболее эффективного решения из множества рассматриваемых альтернатив, в процессе которой может быть произведен отсев Fuzzy-множеств, не удовлетворяющих поставленной системе ограничений.

2.1. Z-сечения Fuzzy-множеств

Пусть условия $\bar{\leq}_{Re}$ или $\bar{\geq}_{Re}$ определяют условия доминирования (предпочтения) двух Fuzzy-множеств соответственно в сторону уменьшения или увеличения их значений.

Рассмотрим два Fuzzy-множества $A = (x, \mu_A(x))$ и $B = (x, \mu_B(x))$.

а) Z^1 и Z^2 - сечения непрерывных Fuzzy-множеств.

Для непрерывных Fuzzy-множеств множеств $A = \{x, \mu_A(x)\}$, заданных на множестве значений $x \in X$, в диапазоне значений $x \in [H_{\min}, H_{\max}]$, определим следующие условия нормирования

$$\lambda_A(x) = \frac{\mu_A(x)}{L_A}, \quad x \in X,$$

$$\text{где } L_A = \int_{x \in X} \mu_A(x) \cdot dx, \quad \int_{x \in X} \lambda_A(x) \cdot dx = 1.$$

Определим для Z^1 -сечений

$$Z_A^1(\beta) = \left\{ \min x \mid \int_{H_{\min}}^x \lambda_A(x) \cdot dx \geq \beta, x \in X \right\},$$

$$0 < \beta \leq 1;$$

$$\mu_{Z_A^1(\beta)}^1 = \begin{cases} \mu_A(x), & \text{if } x \leq Z_A^1(\beta), \\ 0, & \text{if } x > Z_A^1(\beta); \end{cases}$$

$$\mu_{Z_A^1(\beta)}^2 = \begin{cases} \mu_A(x), & \text{if } x > Z_A^1(\beta), \\ 0, & \text{if } x \leq Z_A^1(\beta); \end{cases}$$

$$\mu_{Z_A^1(\beta)}^3 = \begin{cases} 1, & \text{if } x \leq Z_A^1(\beta), \\ 0, & \text{if } x > Z_A^1(\beta); \end{cases}$$

$$\mu_{Z_A^1(\beta)}^4 = \begin{cases} 1, & \text{if } x > Z_A^1(\beta), \\ 0, & \text{if } x \leq Z_A^1(\beta). \end{cases}$$

Для Z^2 - сечений введем следующие показатели:

$$Z_A^2(\beta) = \left\{ \max x \mid \int_x^{H_{\max}} \lambda_A(x) \cdot dx \geq \beta, x \in X \right\},$$

$$0 < \beta \leq 1;$$

$$\mu_{Z_A^2(\beta)}^1 = \begin{cases} \mu_A(x), & \text{if } x \geq Z_A^2(\beta), \\ 0, & \text{if } x < Z_A^2(\beta); \end{cases}$$

$$\mu_{Z_A^2(\beta)}^1 = \begin{cases} \mu_A(x), & \text{if } x \leq Z_A^2(\beta), \\ 0, & \text{if } x > Z_A^2(\beta); \end{cases}$$

$$\mu_{Z_A^2(\beta)}^3 = \begin{cases} 1, & \text{if } x \geq Z_A^2(\beta), \\ 0, & \text{if } x < Z_A^2(\beta); \end{cases}$$

$$\mu_{Z_A^2(\beta)}^4 = \begin{cases} 1, & \text{if } x \leq Z_A^2(\beta), \\ 0, & \text{if } x > Z_A^2(\beta). \end{cases}$$

Введем также следующие показатели

$$\beta_A^1(z_p) = \int_{H_{\min}}^{z_p} \lambda_A(x) \cdot dx,$$

$$\beta_A^2(z_p) = \int_{z_p}^{H_{\max}} \lambda_A(x) \cdot dx, \quad p = 1, \dots, P,$$
(9)

где z_p , $p = 1, \dots, P$ - некоторые значения параметра $x \in [H_{\min}, H_{\max}]$.

Аналогичным образом параметры Z^1 и Z^2 - сечений могут быть вычислены для различных t - и S -норм Fuzzy-множеств [8-11].

б) Z^1 и Z^2 - сечения дискретных Fuzzy-множеств

Для дискретных Fuzzy-множеств $A = \sum_{k=1}^K \left(\mu_A(x_k) / x_k \right)$ значения L_A и $\lambda_A(x_k)$

вычисляются соответственно по формулам

$$L_A = \sum_{k=1}^K \mu_A(x_k), \quad \lambda_A(x_k) = \frac{\mu_A(x_k)}{L_A}, \quad k = 1, \dots, K;$$

$$\sum_{k=1}^K \lambda_A(x_k) = 1.$$

Значения $Z_A^1(\beta)$ и $Z_A^2(\beta)$ определяются по формулам

$$Z_A^1(\beta) = \left\{ \min_{1 \leq k \leq K} x_k \mid \sum_{q=1}^k \lambda(x_q) \geq \beta; x_q \in X \right\};$$

$$Z_A^2(\beta) = \left\{ \max_{1 \leq k \leq K} x_k \mid \sum_{q=K}^k \lambda(x_q) \geq \beta; x_q \in X \right\}.$$

Значения $\mu_{Z_A^1(\beta)}^1(x_k) - \mu_{Z_A^1(\beta)}^4(x_k)$ и $\mu_{Z_A^2(\beta)}^1(x_k) - \mu_{Z_A^2(\beta)}^4(x_k)$ вычисляются аналогично выше приведенным формулам для непрерывных Fuzzy-множеств.

Поясним вышеизложенное на простом числовом примере (Пример 1).

2.2. Правила относительного предпочтения на основе Z-сечений Fuzzy-множеств

На основе вычисленных значений параметров $Z_A^1(\beta)$ и $Z_A^2(\beta)$ могут быть сформулированы следующие правила относительного предпочтения Fuzzy-множеств.

Определение 1. $A \succ B$ в смысле $A \geq_{\text{Re}} B$, если выполняется одна из следующих ниже систем неравенств

$$\begin{aligned} \int_{Z_A^2(\beta)}^{H_{\max}} \mu_{Z_A^2(\beta)}^1(x) \cdot dx &\geq \int_{Z_B^2(\beta)}^{H_{\max}} \mu_{Z_B^2(\beta)}^1(x) \cdot dx, \\ \int_{H_{\min}}^{Z_A^1(\beta)} \mu_{Z_A^1(\beta)}^1(x) \cdot dx &\leq \int_{H_{\min}}^{Z_B^1(\beta)} \mu_{Z_B^1(\beta)}^1(x) \cdot dx, \\ Z_A^2(\beta) &\leq Z_B^2(\beta) \text{ и } Z_A^1(\beta) \geq Z_B^1(\beta), \\ \beta_A^1(z_p) &\leq \beta_B^1(z_p), \quad p = 1, \dots, P_1; \quad \beta_A^2(z_l) \geq \beta_B^2(z_l), \\ & \quad l = 1, \dots, P_2. \end{aligned}$$

Определение 2. $A \succ B$ в смысле $A \leq_{\text{Re}} B$, если выполняется одна из следующих ниже систем неравенств

$$\begin{aligned} \int_{Z_A^2(\beta)}^{H_{\max}} \mu_{Z_A^2(\beta)}^1(x) \cdot dx &\leq \int_{Z_B^2(\beta)}^{H_{\max}} \mu_{Z_B^2(\beta)}^1(x) \cdot dx \\ \text{и } \int_{H_{\min}}^{Z_A^1(\beta)} \mu_{Z_A^1(\beta)}^1(x) \cdot dx &\geq \int_{H_{\min}}^{Z_B^1(\beta)} \mu_{Z_B^1(\beta)}^1(x) \cdot dx, \\ Z_A^2(\beta) &\geq Z_B^2(\beta) \text{ и } Z_A^1(\beta) \leq Z_B^1(\beta), \\ \beta_A^1(z_p) &\geq \beta_B^1(z_p), \quad p = 1, \dots, P_1; \quad \beta_A^2(z_l) \leq \beta_B^2(z_l), \\ & \quad l = 1, \dots, P_2. \end{aligned}$$

Пример 1

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^K \left(\mu_A(x_k) / x_k \right) = 0.1/2 + 0.3/3 + 0.35/4 + 0.4/5 + 0.4/6 + 0.7/7 + 0.8/8 + 0.6/9 + 0.5/10 + 0.3/11 + 0.12/12; \\ L_A &= 0.1 + 0.3 + 0.35 + 0.4 + 0.4 + 0.7 + 0.8 + 0.6 + 0.5 + 0.3 + 0.12 = 4.57, \\ \lambda_A(x_k) &= (0.022, 0.0656, 0.0766, 0.0875, 0.0875, 0.1532, 0.1751, 0.1313, 0.1094, 0.0656, 0.0262) \\ \text{Определим значение } \beta &= 0.75. \quad Z_A^1(\beta = 0.75) = 8, \\ Z_A^2(\beta = 0.75) &= 4. \\ A^1 \{Z^1(\beta = 0.75)\} &= (0.1/2 + 0.3/3 + 0.35/4 + 0.4/5 + 0.4/6 + 0.7/7 + 0.8/8 + 0.6/9); \\ A^2 \{Z^1(\beta = 0.75)\} &= (0.5/10 + 0.3/11 + 0.12/12); \\ A^3 \{Z^1(\beta = 0.75)\} &= (1.0/2 + 1.0/3 + 1.0/4 + 1.0/5 + 1.0/6 + 1.0/7 + 1.0/8 + 1.0/9); \\ A^4 \{Z^1(\beta = 0.75)\} &= (1.0/10 + 1.0/11 + 1.0/12). \\ A^1 \{Z^2(\beta = 0.75)\} &= (0.4/5 + 0.4/6 + 0.7/7 + 0.8/8 + 0.6/9 + 0.5/10 + 0.3/11 + 0.12/12); \\ A^2 \{Z^2(\beta = 0.75)\} &= (0.1/2 + 0.3/3 + 0.35/4); \\ A^3 \{Z^2(\beta = 0.75)\} &= (1.0/5 + 1.0/6 + 1.0/7 + 1.0/8 + 1.0/9 + 1.0/10 + 1.0/11 + 1.0/12); \\ A^4 \{Z^2(\beta = 0.75)\} &= (1.0/2 + 1.0/3 + 1.0/4). \end{aligned}$$

3. Многокритериальные методы сравнения и ранжирования Fuzzy-множеств

В литературе предложено большое количество критериев и методов относительного предпочтения одного Fuzzy-множества перед другим. Выбор какого-то определенного алгоритма среди этих методов связан с субъективным предпочтением лица, принимающего решение. Ниже рассматриваются многокритериальные подходы решения этой задачи.

Предлагаемые ниже подходы позволяют осуществить сравнение и ранжирование нечетких множеств на основе различных аспектов, оценив ожидаемые возможности получения положительных результатов с допустимой степенью риска. При этом вес каждого из этих показателей устанавливается в зависимости от специфики конкретной прикладной задачи и от предпочтений ЛПР. Рассматриваемые ниже алгоритмы сравнения Fuzzy-множеств на основе введения Z-сечений аналогичны принятым в математической статистике показателям вероятности того, что значение случайной величины с заданным законом распределения будет не ниже или не выше некоторого заранее установленного значения.

Рассмотрим n различных Fuzzy-множеств $A_i = (x, \mu_{A_i}(x))$, $i = 1, \dots, n$, $[H_{1i}, H_{2i}]$ - диапазон изменения переменной Fuzzy-множества A_i . Определим

$$H_{\min} = \min_{1 \leq i \leq n} H_i, \quad H_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} H_i.$$

Разобьем весь диапазон изменения $x \in [H_{\min}, H_{\max}]$ на m лингвистических термов (интервалов). Длина каждого k -го интервала равна

$$X_1 \in [H_{\min}, h_1 = H_{\min} + \Delta_k), \dots,$$

$$X_k \in [h_{k-1}, h_k = h_{k-1} + \Delta_k), \dots,$$

$$X_m \in [h_{m-1}, H_{\max}],$$

$$\text{где } \Delta_k = \frac{H_{\max} - H_{\min}}{m}.$$

Среди выделенных m лингвистических термов определим подмножество Q_1 , включающее $m_1 < m$ термов, $k = 1, \dots, m_1$, и подмножество Q_2 , состоящее из $m_2 = m - m_1$

значений переменной, в пределах которых является соответственно нежелательным и благоприятным для лица, принимающего решение, $Q_1 \cup Q_2 = Q = \{1, \dots, k, \dots, m\}$, $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

Определим средневзвешенные оценки $M_{A_i}^k$ Fuzzy-множеств A_i в каждом из лингвистических интервалов

$$M_{A_i}^k = \int_{x \in X_k} x \cdot \mu_{A_i}(x) \cdot dx,$$

$$k = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Введем комплексный критерий эффективности для каждого из Fuzzy-множеств в виде

$$F_{A_i} = \sum_{k \in Q_2} \alpha_i^k M_{A_i}^k - \sum_{k \in Q_1} \alpha_i^k M_{A_i}^k,$$

где $0 \leq \alpha_i^k \leq 1$, $i = 1, \dots, n$, - весовые коэффициенты, удовлетворяющие условиям нормировки $\sum_{k=1}^m \alpha_i^k = 1$.

Fuzzy-множество A_i является эффективнее Fuzzy-множества A_j , т.е. $A_i \succ A_j$, если $F_{A_i} \geq F_{A_j}$.

Сравнение двух Fuzzy-множеств на основе средневзвешенной оценки M_A или координаты x или центра тяжести C_A Fuzzy-множества

$$M_A = \int_{x \in X} x \cdot \mu_A(x) \cdot dx, \quad C_A = \frac{\int_{x \in X} x \cdot \mu_A(x) \cdot dx}{\int_{x \in X} \mu_A(x) \cdot dx}$$

не учитывает степень риска получения значений хуже этих значений, что при принятии решений является очень важным.

Вычислим следующие два показателя:

$$M_A^- = \int_{x=X_{\min}}^{x=M_A} x \cdot \mu_A(x) \cdot dx, \quad M_A^+ = \int_{x=M_A}^{x=X_{\max}} x \cdot \mu_A(x) \cdot dx;$$

$$C_A^- = \frac{\int_{x=C_A}^{x=H_{\min}} x \cdot \mu_A(x) \cdot dx}{\int_{x=H_{\min}}^{x=C_A} \mu_A(x) \cdot dx},$$

$$C_A^+ = \frac{\int_{x=Z_A}^{x=H_{\max}} x \cdot \mu_A(x) \cdot dx}{\int_{x=Z_A}^{x=H_{\max}} \mu_A(x) \cdot dx}.$$

Тогда комплексный показатель эффективности Fuzzy-множества $A = \{x, \mu_A(x)\}$ может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} F_1(A) &= \lambda_1 \cdot M_A - \lambda_2 \cdot M_A^- + \lambda_3 \cdot M_A^+, \\ F_2(A) &= \lambda_1 \cdot C_A - \lambda_2 \cdot C_A^- + \lambda_3 \cdot C_A^+. \end{aligned} \quad (11)$$

В качестве других видов комплексных критериев эффективности Fuzzy-множеств могут быть предложенные линейные свертки, учитывающие большее количество локальных показателей эффективности

$$F_3(A) = \lambda_1 \cdot M_A - \lambda_2 \cdot M_A^- + \lambda_3 \cdot M_A^+ - \sum_{p=1}^{P_1} \gamma_p D_p^1 \{Z_A^1(\beta)\} + \sum_{q=1}^{P_2} \mu_q D_q^2 \{Z_A^1(\beta)\}, \quad (12)$$

$$F_4(A) = \lambda_1 \cdot M_A - \lambda_2 \cdot M_A^- + \lambda_3 \cdot M_A^+ + \sum_{p=1}^{P_1} \gamma_p D_p^1 \{Z_A^2(\beta_p)\} - \sum_{q=1}^{P_2} \mu_q D_q^2 \{Z_A^1(\beta_p)\}, \quad (13)$$

$$F_5(A) = \lambda_1 \cdot C_A - \lambda_2 \cdot C_A^- - \sum_{p=1}^{P_1} \gamma_p \cdot \beta_A^1(z_p) + \lambda_3 \cdot C_A^+ + \sum_{p=1}^{P_2} \mu_q \cdot \beta_A^2(z_q). \quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} D^1 \{Z_A^1(\beta_p)\} &= \int_{H_{\min}}^{Z_A^1(\beta_p)} \mu_{Z_A^1(\beta_p)}^1(x) \cdot dx, \\ D^2 \{Z_A^1(\beta_p)\} &= \int_{Z_A^1(\beta_p)}^{H_{\max}} \mu_{Z_A^1(\beta_p)}^1(x) \cdot dx, \\ D^1 \{Z_A^2(\beta_p)\} &= \int_{Z_A^2(\beta)}^{H_{\max}} \mu_{Z_A^2(\beta_p)}^1(x) \cdot dx, \\ D^2 \{Z_A^1(\beta_p)\} &= \int_{H_{\min}}^{Z_A^1(\beta_p)} \mu_{Z_A^2(\beta_p)}^1(x) \cdot dx, \end{aligned}$$

где $\lambda_k \geq 0$, $k=1,2,3$; $\gamma_p \geq 0$, $p=1, \dots, P_1$; $\mu_q \geq 0$, $q=1, \dots, P_2$; - весовые коэффициенты, удовлетворяющие условиям нормировки $\sum_{k=1}^3 \lambda_k + \sum_{p=1}^{P_1} \gamma_p + \sum_{q=1}^{P_2} \mu_q = 1$.

Весовые коэффициенты λ_k в выражении (14) выбираются на основании мнений экспертов или ЛПР в зависимости от выбранных соотношений ожидаемых положительных результатов и допустимой степени риска.

Следует отметить, что каждый из интервалов $x \in [H_{\min}, M_A]$ и $x \in [M_A, H_{\max}]$ (или $x \in [H_{\min}, C_A]$ и $x \in [C_A, H_{\max}]$), в свою очередь, может быть разбит на несколько интервалов, и количество членов в выражениях (12)-(14) будет увеличено.

Значения весовых коэффициентов и параметры β_p выбираются в зависимости от содержательной постановки задачи и в соответствии с предпочтениями экспертов.

Задача выбора наилучшего значения показателя эффективности ($A \succ A_j \rightarrow F(A) \geq_{\text{Re}} F(A_j)$) из множества возможных альтернатив, каждая из которых задана n различными Fuzzy-множествами $A_i = (x, \mu_{A_i}(x))$, $i=1, \dots, n$, может быть сформулирована в виде многокритериальной следующей многокритериальной задачи

$$F_i(A_i^*) = \max_{1 \leq i \leq n} F_i(A_i) \quad (15)$$

в условиях следующих ограничений

$$Z_{A_i}^1(\beta_p) \leq b_{1p}, \quad p=1, \dots, P_1; \quad (16)$$

$$Z_{A_i}^2(\beta_q) \geq b_{2q}, \quad q=1, \dots, P_2;$$

$$\beta_{A_i}^1(z_p) \leq \xi_{1p}, \quad p=1, \dots, P_1; \quad (17)$$

$$\beta_{A_i}^2(z_q) \leq \xi_{2q}, \quad q=1, \dots, P_2;$$

где $0 \leq \xi_{1p} \leq 1$, $0 \leq \xi_{2q} \leq 1$ - некоторые значения.

Альтернативы, которые не удовлетворяют системе ограничений (16), (17), отбрасываются как неперспективные. Среди оставшихся допустимых альтернатив выбирается такая, которая обеспечивает максимальное значение показателя эффективности.

Предложенные критерии и методы определения предпочтений, сравнения и ранжирова-

ния Fuzzy-множеств могут найти широкое применение в различных задачах принятия решений. В зависимости от соотношений желаемого объема получения прибыли или допустимого уровня возможных затрат и степени допустимого риска, экспертами может быть выбрана одна из предлагаемых в работе групп критериев, соответствующие им количество и величины значений $Z_A^1(\beta)$ и (или) $Z_A^2(\beta)$, M_A , M_A^- , M_A^+ (или C_A , C_A^- , C_A^+), а также значения весовых коэффициентов. На основе предложенных в работе критериев и подходов могут быть разработаны и другие комплексные показатели и методы сравнения и ранжирования Fuzzy-чисел и Fuzzy-множеств. В качестве возможных подходов решения этих проблем могут использоваться также многокритериальные подходы, основанные на ведении компромиссных критериев. Подробное описание этих методов можно найти в [2-4] и книге автора [5].

4. Множество Парето для стохастических критериев оптимальности

Пусть задана функция распределения значений $\varphi(F)$ некоторого показателя эффективности F , $m(F)$, $\sigma(F)$ - соответственно математическое ожидание (среднее значение) и средне-квадратическое отклонение от $m(F)$ этого показателя. Определим значения величин

$$a(F) = m(F) - \lambda \cdot \sigma(F), \quad b(F) = m(F) + \lambda \cdot \sigma(F), \quad (18)$$

удовлетворяющие условиям

$$\int_{a(F)}^{b(F)} \varphi(F) \cdot dF = p, \quad (19)$$

где p - заданное значение вероятности, а λ - значение, выбираемое в интервале $\lambda \in [0,2; 0,35]$.

Рассмотрим различные способы определения допустимых интервалов изменения значения F

$$D_1(F) = \{F \mid m(F) - \lambda \cdot \sigma(F) \leq F \leq m(F) + \lambda \cdot \sigma(F)\}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} D_1^1(F) &= \{F \mid m(F) - \lambda \cdot \sigma(F)\}, \\ D_1^2(F) &= \{F \mid F \leq m(F) + \lambda \cdot \sigma(F)\} \end{aligned} \quad (21)$$

Рассмотрим также другие показатели, определяющие функции распределения значения критерия $\varphi(F)$

$$p\{(F \mid A) \leq B_\xi\} = \int_{-\infty}^{B_\xi} \varphi(F \mid A) \cdot d\varphi(F \mid A) \leq q_\xi, \quad (22)$$

$$\xi = 1, \dots, r,$$

$$p\{(F \mid A) \geq D_\omega\} = \int_{-\infty}^{D_\omega} \varphi(F \mid A) \cdot d\varphi(F \mid A) \geq g_\omega, \quad (23)$$

$$\omega = 1, \dots, p.$$

Здесь B_ξ , D_ω - некоторые заданные значения критерия $(F \mid A)$, а q_ξ и g_ω - определяемые ЛПР значения вероятностей.

Выражение (22) определяет условие, что вероятность того, что значение показателя эффективности будет не выше некоторой заранее установленной величины B_ξ , должна быть больше значения q_ξ , а выражение (23) - вероятность того, что это значение будет больше или равно некоторой установленной величине D_ω , должна быть не меньше значения g_ω .

Пусть известны функции распределения n показателей эффективности $\varphi_i(F_i)$, $i = 1, \dots, n$. Без ограничения общности будем предполагать, что необходимо найти максимальные значения по каждому из этих критериев. Рассмотрим 2 альтернативы A_1 и A_2 со значениями показателей эффективности $\{\varphi_i(F_i \mid A_1), i = 1, \dots, n\}$ и $\{\varphi_i(F_i \mid A_2), i = 1, \dots, n\}$, для каждой из которых вычислены соответствующие значения (18)-(23).

Определение 3.

Альтернатива A_k является более предпочтительной альтернативы A_j (обозначим это условие $A_k \succ_{\text{Re}} A_j$), если выполняется одно из следующих ниже систем неравенств (24)-(28):

$$m(F_i \mid A_k) \geq m(F_i \mid A_j), \quad i = 1, \dots, n; \quad (24)$$

$$a(F_i \mid A_k) \geq b(F_i \mid A_j), \quad \text{т.е.}$$

$$m(F_i \mid A_k) - \lambda \cdot \sigma(F_i \mid A_k) \geq m(F_i \mid A_j) + \lambda \cdot \sigma(F_i \mid A_j), \quad i = 1, \dots, n; \quad (25)$$

$$\frac{M\{D_i^1(F_i | A_k) \cap D_j^2(F_i | A_j)\}}{b(F_j | A_k) - m(F_j | A_k)} \leq \begin{cases} 0, & \text{if } a(F_i | A_k) \geq b(F_i | A_j), \\ (1 - \gamma), & \text{if } a(F_i | A_k) < b(F_i | A_j); \end{cases} \quad (26)$$

где $a(F_i | A_k) = m(F_i | A_k) - \lambda \cdot \sigma(F_i | A_k)$,
 $b(F_i | A_k) = m(F_i | A_k) + \lambda \cdot \sigma(F_i | A_k)$;

$M\{D_i^1(F_i | A_k) \cap D_j^2(F_i | A_j)\}$ - длина отрезка, принадлежащего как множеству значений $D_i^1(F_i | A_k)$, так и множеству значений $D_j^2(F_i | A_j)$, $0 > \gamma \geq 0.5$ - значение коэффициента, которое выбирается из субъективных соображений.

$$p\{(F_i | A_k) \leq B_\xi\} \leq p\{(F_i | A_j) \leq B_\xi\}, \quad \xi = 1, \dots, r, \quad i = 1, \dots, n; \quad (27)$$

$$p\{(F_i | A_k) \geq D_\omega\} \geq p\{(F_i | A_j) \geq D_\omega\}, \quad \omega = 1, \dots, p, \quad i = 1, \dots, n. \quad (28)$$

В качестве частных случаев соотношений (27), (28) могут рассматриваться случаи, когда $r = 1$ и (или) $p = 1$, либо одно из неравенств (27) или (28) отсутствует.

Каждая альтернатива представлена некоторым вектором функций распределения случайных величин локальных критериев. Так как в данном случае необходимо сравнивать не числовые значения, а функции распределения, то принадлежность некоторой альтернативы множеству Парето осуществляется на основе рассмотрения некоторой покомпонентной системы неравенств определенных характеристик этих функций распределения. В качестве таких числовых характеристик рассматриваемых функций распределений выбраны математические ожидания функций распределений (формула (24)), границы некоторых интервалов, определяемых их математическими ожиданиями и среднеквадратическими отклонениями (формула (25)), а также длиной области пересечения этих интервалов (формула (26)). В формулах (27) и (28) в качестве таких числовых характеристик выбраны вероятности того, что значение случайной величины будет не больше или не меньше некоторого наперед заданного значе-

ния. В зависимости от предпочтений ЛПР с помощью параметров λ в формуле (25) или γ в формуле (26) можно варьировать длину рассматриваемых интервалов, тем самым увеличивая или сокращая количество альтернатив включаемых в множество Парето.

Пусть рассматривается K альтернатив A_k , $k = 1, \dots, K$, каждая из которых определяется функциями распределения значения n критериев оптимальности $\varphi(F_i | A_k)$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, K$. Без ограничения общности будем считать, что все критерии максимизирующие.

Определение 4. Альтернатива A_j принадлежит множеству Парето, если не существует никакой другой альтернативы A_k , $k = 1, \dots, K$, $j \neq k$, для которой справедлива одна из систем неравенств (24) либо (25), либо (26), либо (27) и (28).

Следует отметить, что условие (25) является наиболее жестким условием проверки и позволяет включить во множество Парето некоторые из тех альтернатив, которые не удовлетворяют условиям (24), (26) и (27), (28).

Пример 2

Исходные данные математических ожиданий и среднеквадратических отклонений 3 критериев эффективности 10 рассматриваемых альтернатив приведены в Табл. 1. Все критерии являются максимизирующими.

Множество Парето, построено на основе соотношений (24), включает альтернативы $A_3, A_4, A_5, A_7, A_9, A_{10}$, так как $A_3 \succ_{\text{Re}} A_1$, $A_3 \succ_{\text{Re}} A_2$, $A_3 \succ_{\text{Re}} A_6$ и $A_3 \succ_{\text{Re}} A_8$.

Положив в выражении (18) значение $\lambda = 0.5$, вычислим значения $a(F_i | A_k)$ и $b(F_i | A_k)$, $i = 1, 2, 3$, $k = 1, \dots, 10$, которые представлены в Табл. 2. Множество Парето, построено на основе соотношений (25), включает все рассматриваемые альтернативы $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}$.

Положив $\gamma = 0.3$, построим множество Парето на основе соотношений (8), которое включает следующие альтернативы $A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}$, так как $A_3 \succ_{\text{Re}} A_1$ и $A_3 \succ_{\text{Re}} A_2$.

Табл.1. Моменты функций распределения критериев эффективности

Альтернативы	Параметры функций распределений					
	$F(F_1 A_k)$		$F(F_2 A_k)$		$F(F_3 A_k)$	
	m	σ	m	σ	m	σ
1	25	4	34	5	50	7
2	24	7	28	3	52	6
3	29	6	41	5	58	7
4	35	4	29	3	46	4
5	21	4	33	4	62	6
6	29	5	37	5	40	2
7	33	6	40	7	48	3
8	27	4	29	2	55	6
9	30	6	35	4	49	3
10	36	4	28	5	47	4

Табл.2. Значения $a(F_i | A_k)$ и $b(F_i | A_k)$ критериев оптимальности

Альтернативы	Параметры интервалов для сравнения значений критериев								
	$F(F_1 A_k)$			$F(F_2 A_k)$			$F(F_3 A_k)$		
	a	m	b	a	m	b	a	m	b
1	23	25	27	31,5	34	36,5	46,5	50	53,5
2	20,5	24	27,5	26,5	28	29,5	49	52	55
3	26	29	32	38,5	41	43,5	54,5	58	61,5
4	33	35	37	27,5	29	30,5	44	46	48
5	20	21	23	31	33	35	59	62	65
6	26,5	29	31,5	34,5	37	39,5	39	40	41
7	30	33	36	36,5	40	43,5	46,5	48	49,5
8	25	27	29	28	29	30	52	55	58
9	27	30	33	33	35	37	47,5	49	50,5
10	32,5	36	39,5	25,5	28	30,5	45	47	49

5. Размытые множества Парето

Рассмотрим случаи, когда значения критериев оптимальности различных альтернатив выражены нечеткими множествами $\{(F_i | A_k) | \mu_{F_i}(F_i | A_k)\}$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, K$. Сформулируем условия включения альтернатив во множество Парето, воспользовавшись методами определения предпочтения и ранжирования Fuzzy-множеств, предложенными в [13] и описанными в разделе 2.

Определение 5. Альтернатива A_k , значения критериев которой выражены Fuzzy-множествами $\{(F_i | A_k) | \mu_{F_i}(F_i | A_k)\}$, $i = 1, \dots, n$, является предпочтительней альтернативы A_j , значения критериев которой выражены Fuzzy-множествами $\{(F_i | A_j) | \mu_{F_i}(F_i | A_j)\}$, если выполняется система неравенств (29), (30) или (33):

$$(C_i | A_k) \geq (C_i | A_j), i = 1, \dots, n, \quad (29)$$

$$\bar{M}_{\max}(F_i | A_k) \geq \bar{M}_{\max}(F_i | A_j), i = 1, \dots, n; \quad (30)$$

и какое-либо из этих соотношений выполняется как строгое неравенство.

Здесь $(C_i | A_k)$, $(C_i | A_j)$ - центры тяжести соответствующих Fuzzy-множеств, $\bar{M}_{\max}(F_i)$, $\bar{M}_{\max}(F_i)$ среднее значение абсциссы среди максимальных значений соответствующих Fuzzy-множеств

$$\begin{aligned} M_{\max}^1 &= \min(F_i | \mu_{F_i}(F_i) = 1), \\ M_{\max}^2 &= \max(F_i | \mu_{F_i}(F_i) = 1), \\ \bar{M}_{\max} &= 0.5 \cdot (M_{\max}^1 + M_{\max}^2). \end{aligned} \quad (31)$$

Введем следующие величины

$$\begin{aligned} h^1(F_i | A_k) &= \{\min(F_i | A_k) | (F_i | A_k) \in F_i, \mu_{(F_i | A_k)}((F_i | A_k)) > 0\}, \\ h^2(F_i | A_k) &= \{\max(F_i | A_k) | (F_i | A_k) \in F_i, \mu_{(F_i | A_k)}((F_i | A_k)) > 0\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Тогда

$$h^1(F_i | A_k) \geq h^2(F_i | A_j), i = 1, \dots, n. \quad (33)$$

Наибольшее распространение в практических приложениях получили Fuzzy-множества трапецидального $\{a_1(F_i | A_k), m_1(F_i | A_k), m_2(F_i | A_k), a_2(F_i | A_k)\}_{LR}$ и треугольного типа $\{a(F_i | A_k), m(F_i | A_k), b(F_i | A_k)\}_{LR}$, для которых выражения (30), (31) и (32), (33) существенно упрощаются и вычисляются по явным формулам.

Для Fuzzy-множеств трапецидального вида справедливы выражения

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\max}(F_i | A_k) &= 0.5 \cdot [m_1(F_i | A_k) + m_2(F_i | A_k)]; \\ h^1(F_i | A_k) &= a_1(F_i | A_k), \\ h^2(F_i | A_k) &= a_2(F_i | A_k). \end{aligned} \quad (34)$$

Для Fuzzy-множеств треугольного вида

$$\begin{aligned}\bar{M}_{\max}(F_i | A_k) &= m(F_i | A_k), \\ h^1(F_i | A_k) &= a(F_i | A_k), \\ h^2(F_i | A_k) &= b(F_i | A_k).\end{aligned}\quad (35)$$

Рассмотрим различные α -сечения Fuzzy-множеств. Определим значения критериев оптимальности $(F_i | A_k)$

$$H_{\alpha}^1(F_i | A_k) = \{\inf(F_i | A_k) | \mu_{(F_i | A_k)}(F_i | A_k) = \alpha\}, \quad (36)$$

$$H_{\alpha}^2(F_i | A_k) = \{\sup(F_i | A_k) | \mu_{(F_i | A_k)}(F_i | A_k) = \alpha\}, \quad (37)$$

$$\bar{H}_{\alpha}(F_i | A_k) = 0.5 \cdot (H_{\alpha}^2(F_i | A_k) + H_{\alpha}^1(F_i | A_k)), \quad (38)$$

и значения весовых коэффициентов $w_{\alpha_s} > 0$,

где $\sum_{s=1}^S w_{\alpha_s} = 1$. Так например, значения α могут быть выбраны для каждого из 5 сечений

следующим образом

$\alpha_1 = 0; \alpha_2 = 0.25; \alpha_3 = 0.5; \alpha_4 = 0.75; \alpha_5 = 1.0$; со значениями весовых коэффициентов, равными $w_{\alpha_1} = 0.05, w_{\alpha_2} = 0.125, w_{\alpha_3} = 0.225, w_{\alpha_4} = 0.275, w_{\alpha_5} = 0.325$.

Определение 6. Альтернатива A_k является предпочтительней альтернативы A_j , если выполняется система неравенств

$$\begin{aligned}\bar{G}(F_i | A_k) &= \sum_{s=1}^S w_{\alpha_s} \cdot \bar{H}_{\alpha_s}(F_i | A_k) \geq \bar{G}(F_i | A_j) = \\ &= \sum_{s=1}^S w_{\alpha_s} \cdot \bar{H}_{\alpha_s}(F_i | A_j), \quad i = 1, \dots, n.\end{aligned}\quad (39)$$

Определение 7. Альтернатива A_j принадлежит размытому множеству Парето, если не существует никакой другой альтернативы A_k , $k = 1, \dots, K$, $j \neq k$, для которой справедлива одна из систем неравенств (29) либо (30), либо (33) либо (36) и (39).

В случае трапецидальных и треугольных функций принадлежности Fuzzy-множеств $\{(F_i | A_k) | \mu_{F_i}(F_i | A_k)\}$ значения $H_{\alpha}^1(F_i | A_k)$

и $H_{\alpha}^2(F_i | A_k)$ могут быть вычислены по явным формулам:

- для функций принадлежности вида $\{a_1(F_i | A_k), m_1(F_i | A_k), m_2(F_i | A_k), a_2(F_i | A_k)\}_{LR}$

$$\begin{aligned}H_{\alpha_s}^1(F_i | A_k) &= m_1(F_i | A_k) - \\ &- [m_1(F_i | A_k) - a_1(F_i | A_k)] \cdot (1 - \alpha_s), \quad s = 1, \dots, S; \\ H_{\alpha_s}^2(F_i | A_k) &= m_2(F_i | A_k) + \\ &+ [a_2(F_i | A_k) - m_2(F_i | A_k)] \cdot (1 - \alpha_s), \\ &\quad s = 1, \dots, S;\end{aligned}\quad (40)$$

- для функций принадлежности вида $\{a(F_i | A_k), m(F_i | A_k), b(F_i | A_k)\}_{LR}$

$$\begin{aligned}H_{\alpha_s}^1(F_i | A_k) &= m(F_i | A_k) - \\ &- [m(F_i | A_k) - a(F_i | A_k)] \cdot (1 - \alpha_s), \quad s = 1, \dots, S; \\ H_{\alpha_s}^2(F_i | A_k) &= m(F_i | A_k) + \\ &+ [b(F_i | A_k) - m(F_i | A_k)] \cdot (1 - \alpha_s), \\ &\quad s = 1, \dots, S.\end{aligned}\quad (41)$$

Пример 3

Значения каждого из 3 критериев оптимальности 10 возможных альтернатив заданы нечеткими множествами вида $\{a(F_i | A_k), m(F_i | A_k), b(F_i | A_k)\}_{LR}$. Все критерии оптимальности являются максимизирующими. Параметры этих Fuzzy-множеств приведены в Табл. 3.

В соответствии с выражением (36) на основании выражений (38) заключаем

$$\begin{aligned}A_6 \succ A_4 \succ A_2, \quad A_5 \succ A_3, \quad A_6 \succ A_8 \\ \text{и } A_7 \succ A_8.\end{aligned}\quad (42)$$

Следовательно, множество Парето, построенное в соответствии с соотношениями (36) - (38), включает подмножество альтернатив $A_1, A_5, A_6, A_7, A_9, A_{10}$.

Множество Парето, построенное в соответствии с соотношением (33), (35), включает все множество рассматриваемых альтернатив $A_1 - A_{10}$, так как ни для одной из пар рассматриваемых альтернатив A_k и A_j не выполняется система неравенств (33).

Вычисленные по формулам (39), (40), (41) значения $\bar{G}(F_i | A_k)$, $i = 1, 2, 3$, $k = 1, \dots, 10$,

Табл.3. Параметры Fuzzy-множеств критериев оптимальности

№ альтернативы	Параметры Fuzzy-множеств функций принадлежности критериев								
	$(F_1 A_k)$			$(F_2 A_k)$			$(F_3 A_k)$		
	a	m	b	a	m	b	a	m	b
1	8	10	12	13	15	16	5	6	8
2	6	9	10	10	12	14	7	8	9
3	10	11	12	10	11	12	8	9	11
4	7	9	11	9	12	15	6	9	10
5	12	14	15	10	11	13	10	11	12
6	10	11	13	12	13	15	8	10	11
7	9	11	12	10	12	14	11	12	13
8	7	8	9	8	10	13	8	9	10
9	6	9	11	11	14	15	7	9	12
10	11	14	16	13	14	16	4	6	8

приведены в Табл. 4. На основании сравнения значений, вычисленных по формулам (39), справедливы заключения (42). Следовательно, множество Парето, построенное в соответствии с соотношением (36)-(38), имеет вид тот же вид, что и построенное в соответствии с соотношениями (30) - $A_1, A_5, A_6, A_7, A_9, A_{10}$.

Следовательно, условие отсева на основе сравнения значений (33) является наиболее строгим условием отсева неперспективных альтернатив.

Заключение

В задачах принятия многокритериальных решений, если значения показателей эффективности выражены функцией распределения вероятностей случайной величины или некоторым нечетким множеством, что наиболее характерно для решения стратегических проблем и задач перспективного планирования, очень трудно сделать объективные выводы, какой из множества рассматриваемых альтернатив отдать предпочтение.

Для принятия решений о принадлежности некоторой альтернативы множеству Парето в этом случае необходимо сравнивать не числовые значения отдельных показателей эффективности, а функции распределения или нечеткие множества, определяющие эти локальные критерии. Предлагается решение этой задачи на основе рассмотрения покомпонентной системы неравенств некоторых числовых показателей, определяющих различные характеристики каж-

Табл. 4. Значения $\bar{G}(F_i | A_k)$ Fuzzy-множеств критериев оптимальности

№ альтернативы	Значения $\bar{G}(F_i A_k)$		
	$(F_1 A_k)$	$(F_2 A_k)$	$(F_3 A_k)$
1	10.0	14.85	6.15
2	8.7	12.0	8.0
3	11.0	11.0	9.15
4	9.0	12.0	8.7
5	13.85	11.15	11.0
6	11.15	13.15	9.85
7	10.85	12.0	12.0
8	8.0	10.15	9.0
9	8.85	13.7	9.15
10	13.85	14.15	6.0

дой из этих функций распределения или нечетких множеств. В качестве таких числовых характеристик рассматриваемых функций распределений выбраны математические ожидания, границы некоторых интервалов, определяемых их математическими ожиданиями и среднеквадратическими отклонениями, длиной области пересечения этих интервалов, вероятности того, что значение случайной величины будет не больше или не меньше некоторого наперед заданного значения. В работе введены и используются также аналоги этих показателей для нечетких множеств. Рассмотрены различного вида свертки этих показателей с целью введения обобщенного компромиссного критерия эффективности.

В зависимости от предпочтений экспертов или ЛПР и от специфики конкретной прикладной задачи варьируются значения весовых коэффициентов в выражениях обобщенного критерия, что позволяет анализировать различные оценки ожидаемых возможностей получения положительных результатов и величины допустимой степени риска потерь.

Наряду с известными в литературе методами сравнения и ранжирования нечетких множеств, в работе рассмотрены алгоритмы сравнения Fuzzy-множеств на основе введения Z-сечений, аналогичные принятым в математической статистике алгоритмам расчета показателей вероятности того, что значение случайной величины с заданным законом распределения будет не ниже или не выше некоторого заранее установленного значения.

Литература

1. Вентцель Е.С.: - Теория вероятностей, 4-е издание. – М., Наука, 1969, 576 с.
2. Емельянов С.В., Борисов В.И., Малевич А.А., Черкашин А.М.: - Модели и методы векторной оптимизации. - В сб. «Техническая кибернетика.» - Изд. ВИНТИ, 1972, Т.4, с. 252-321.
3. Емельянов С.В., Ларичев О.И.: Многокритериальные методы принятия решений.- М.: Знание, 1985.
4. Подиновский В.В., Ногин В.Д.: – Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М., Наука, 1989.
5. Зак Ю.А.: - Принятие многокритериальных решений. – М., Экономика, 2011, 236 С.
6. Markowitz, H.M.: - Portfolio Selection. - The Journal of Finance 7 (1), 1952, P. 77–91.
7. Ногин В.Д.: - Проблема сужения множества Парето: Подходы к решению. – Искусственный интеллект и принятие решений, № 1, 2008, С. 98-111.
8. Зак Ю.А.: – Принятие решений в условиях размытых и нечетких данных. – М., URSS, Либроком, 2012, 348 С.
9. Zimmermann H.-J.: - Unscharfe Entscheidungen und Multi-Criteria Analyse. – Proc. Oper. Res. 6, (1979), S. 99-109.
10. Rommelfanger H.: - Entscheiden bei Unschärfe. – Fuzzy Decision Support-Systeme, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, Second edition 1994.
11. Rommelfanger H., Keresztfalvi T.: - Multicriteria Fuzzy Operation Based on Yager's Parametrized T-Norm. – Foundations of Computing and Decision Sciences, 1991, 16, pp. 99-110.
12. Duboi D., Prade H.M.: - Fuzzy sets and systems: theory and applications. – Academic Press, New York – London – Toronto, 1980, 393 p.
13. Зак Ю.А.: - Критерии и методы сравнения нечетких множеств. – Системні дослідження та інформації технології (System Research & Information Technologies), № 3, 2013, С. 58-68.

Зак Юрий Александрович. Научный консультант. Окончил Киевский политехнический институт (Технический университет г. Киев) в 1962 году. Доктор технических наук, старший научный сотрудник. Автор более 200 публикаций и 10 книг. E-mail: yuriy_zack@hotmail.com . Сайт: www.optimorum.de