А.Г. Мадера

Интервально стохастическая неопределенность оценок в многокритериальных задачах принятия решений

Аннотация. В статье предлагается метод многокритериальной оптимизации в условиях интервально стохастической неопределенности оценок, даваемых субъектом относительно важности одного критерия над другим и различных альтернатив между собой по каждому критерию. Метод является развитием детерминированного процесса аналитической иерархии Analytic Hierarchy Process (AHP), использующего для принятия решений в многокритериальных проблемах детерминированные точечные оценки важности критериев и альтернатив по каждому критерию. В то время как в детерминированном AHP выбор наилучшей альтернативы осуществляется по максимальному точечному значению глобального приоритета, в развиваемом в статье интервально стохастическом AHP глобальные приоритеты являются интервальными, что существенно затрудняет принятие наилучшего решения. Для выбора наилучшей интервальной альтернативы в статье вводятся два максимизируемых критерия. Первый соответствует максимуму нижней и верхней границ интервалов глобальных приоритетов альтернатив, второй – максимуму их интервальной устойчивости. Применение предлагаемого подхода иллюстрируется конкретным примером. Проведено также сравнение с результатами, получаемыми на основе интервальной арифметики, показавшее несостоятельность последнего.

Ключевые слова: интервально стохастическая оценка, процесс аналитической иерархии, неопределенность, принятие решения, критерии, альтернативы.

Введение

Человек не может давать точные оценки ни абсолютным значениям величин, ни значениям относительного превосходства (важности, значимости, интенсивности) одной величины над другой. Субъективные оценки обычно носят неопределенный характер и заключены в пределах некоторых интервалов. Иначе говоря, вместо точеной оценки субъект, или лицо, принимающее решение (ЛПР), указывает лишь нижнюю и верхнюю границы интервалов, в пределах которых, по его мнению, будут находиться истинные значения оцениваемых величин, причем ширина интервала может быть довольно значительной. Поскольку оцениваемая величина может с равной вероятностью принимать любое значение из указанного ЛПР интервала, то моделью субъективной оценки может служить случайная величина, равномерно распределенная в границах указанного ЛПР интервала. Такую неопределенность будем называть интервально стохастической, а саму оценку – интервально стохастической (ИС).

Поскольку суждения субъекта основываются на ИС-оценках, его выводы и решения, как в однокритериальных, так и многокритериальных проблемах, также будут носить неопределенный интервально стохастический характер. Действительно, при решении многокритериальной проблемы субъект дает ИС-оценки различным критериям и величинам относительной важности (значимости) сравниваемых между собой критериев и альтернатив. Поэтому окончательные, или глобальные критерии, характеризующие различные альтернативы, также будут носить не точечный, а интервальный стохастический характер. Указанное обстоятельство существенно затрудняет выбор наилучшей альтернативы, поскольку интервалы глобальных критериев могут пересекаться, образовывать общие области, внутри которых различные альтернативы становятся равнозначными. Поэтому для того чтобы субъект имел возможность осуществить окончательный выбор компромиссной альтернативы необходимо ввести дополнительные критерии, рассматриваемые ниже.

Для поддержки принятия решений в условиях неопределенности в существующей литературе применяют условно два подхода. В первом походе неопределенность попросту игнорируется и принимается, что все оценки критериев, альтернатив и их сравнений между собой, служащие затем для принятия решения, являются однозначными и точно определимыми (точечными), т.е. детерминированными. Таков, в частности, процесс аналитической иерархии АНР [7]. При втором подходе неопределенность, в частности, интервальная, допускается, но при этом пытаются свести ее к полной определенности, т.е. снова к детерминированному случаю. Для этого используются разнообразные математические приемы, сводящие интервалы неопределенности к неким однозначным точечным оценкам, чтобы затем перейти к методам принятия решений, применяемым при первом подходе [4, 9–11].

В настоящей работе принимается, что неопределенность при принятии решения является неизбежным и неустранимым атрибутом реальной действительности. Поэтому для получения адекватных результатов необходимо рассматривать существующую неопределенность как объективную данность, а не как досадную помеху, от которой непременно следует избавиться, притом, что это, в принципе, невозможно. Такая концепция требует иных подходов и методов к анализу неопределенности и принятию решений при неопределенности.

В статье предлагается подход к многокритериальной оптимизации в условиях интервальной стохастической неопределенности, обусловленной неопределенностью субъективных оценок. В основу многокритериальной оптимизации положен процесс аналитической иерархии АНР, который изначально носит детерминированный характер и использует однозначные точечные оценки относительной важности и критериев, и альтернатив по критериям. Для поддержки принятия решения в условиях интервальной неопределенности введен дополнительный критерий, названный в статье интервальной устойчивостью, характеризующий равнозначность различных альтернатив в общей области пересечения интервалов их глобальных приоритетов. Рассмотрен конкретный пример применения предлагаемого подхода к многокритериальной проблеме принятия решения в условиях интервально стохастической неопределенности. Проведено также сравнение результатов, получаемых по предлагаемому методу и с использованием методов интервального анализа [1] и показано, что применение интервального анализа не может быть признано корректным и адекватным.

1. Интервально стохастический метод АНР

Метод АНР, как известно, используется для анализа решений в многокритериальных проблемах и является детерминированным. Процедура АНР основывается на построении матриц парных сравнений, как для критериев, так и альтернатив относительно каждого критерия, с последующим определением собственных векторов, соответствующих максимальным собственным значениям этих матриц. Элементы собственных векторов матриц парных сравнений представляют собой относительные коэффициенты важности критериев и альтернатив, оцениваемых с точки зрения каждого критерия. Завершает процесс АНР вычисление глобальных приоритетов для каждой альтернативы и выбор наилучшей из них, соответствующей максимальному значению глобального приоритета.

В АНР предполагается, что субъект способен с достаточной точностью осуществлять попарное сравнение любых двух факторов (как количественных, так и качественных) и, более того, используя фундаментальную шкалу [7], указывать также точную величину превосходства одного фактора над другим. Между тем, субъект не наделен способностью давать точные оценки. Он может лишь заключить, что, по его мнению, степень превосходства одного фактора над другим находится, например, *где-то между* слабой степенью (2 балла по фундаментальной шкале) и немного выше средней (4 балла). Поэтому субъективные оценки степени превосходства одного фактора над другим, равно как и значения любых иных величин / факторов, носят принципиально размытый, неопределенный характер. Вместо точного значения величины субъект может указать лишь ее субъективный интервал возможного изменения, неявно подразумевая, что внутри этого интервала оцениваемая величина может с равной вероятностью принимать любое значение. Заметим, что в принципе, по предположению субъекта, интервально стохастическая величина может иметь различные плотности вероятностей, например, треугольную, усеченную нормальную, усеченную логарифмически нормальную и пр. Однако, как показано в [8], суждения субъекта априори оценивающего вид плотности распределения вероятностей своих неопределенных оценок, зачастую подвержены так называемым эвристическим ошибкам.

Поскольку субъективные оценки носят интервально стохастический характер, то матрицы парных сравнений, их собственные значения и отвечающие им собственные векторы, в том числе коэффициенты относительной важности сравниваемых критериев и альтернатив, а также значения глобальных приоритетов альтернатив, также являются интервально стохастическими. Поэтому окончательное решение будет определяться уже не точечными детерминированными оценками глобальных приоритетов, как это имеет место в детерминированном АНР, а их ИС-оценками.

Таким образом, рассматривается следующая математическая модель многокритериального принятия решений в условиях интервально стохастической неопределенности $\{X, F, \succ_X, a(\omega)\}$, включающая в себя:

– множество возможных решений или альтернатив $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

– векторный критерий $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$;

– отношение предпочтения $\succ_X$, заданное на множестве возможных решений X [3];

– ИС-оценку оцениваемой субъектом величины $a(\omega)$, которая является, во-первых, интервальной величиной $a(\omega) \in [\underline{a}, \overline{a}]$ и, во-вторых, величиной случайной и равномерно распределенной внутри интервала $[\underline{a}, \overline{a}]$ с плотностью вероятности $p(a) = 1/\Delta$, $a \in [\underline{a}, \overline{a}]$ и $p(a) = 0$, $a \notin [\underline{a}, \overline{a}]$, где $\underline{a}$ и $\overline{a}$ – наименьшая и наибольшая границы интервала; $\Delta = \overline{a} - \underline{a}$ – ширина интервала; $\omega \in \Omega$ – элементарные события из пространства элементарных событий Ω [6].

Принятие решения в интервально стохастическом методе АНР проводится по следующему алгоритму, содержащему 7 этапов:

1) задаются интервалы оценки сравнительной важности критериев относительно друг друга и альтернатив по каждому критерию и строятся соответствующие интервально стохастические матрицы (ИС-матрицы) парных сравнений;

2) для каждой ИС-матрицы парных сравнений определяются математические ожидания (МО), дисперсии (Д) и средние квадратические отклонения (СКО) случайных собственных векторов указанных матриц, являющихся в то же время векторами приоритетов критериев и альтернатив по каждому критерию. Отметим, что интервальные оценки, выдаваемые субъектом для различных величин сравнительной важности, как критериев, так и альтернатив по критериям, являются статистически независимыми;

3) по найденным значениям МО, Д и СКО векторов приоритетов вычисляются МО, Д и СКО для глобального приоритета каждой альтернативы;

4) границы интервалов изменения глобального приоритета определяются как МО ± ε·СКО, где ε определяет ширину интервала глобального приоритета при данной доверительной вероятности P_ε;

5) определяются общие области для различных альтернатив, которые являются пересечениями полученных на этапе 4 интервалов для глобальных альтернатив, характеризующих различные альтернативы;

6) с целью поддержки принятия решения вычисляется значение дополнительного критерия, называемого нами *интервальной устойчивостью*;

7) в соответствии с расположением границ интервалов глобальных приоритетов и значениями критериев интервальной устойчивости принимается окончательное решение.

Ниже приводятся методы определения величин, используемых для реализации этапов алгоритма.

1.1. Определение МО, Д и СКО собственного вектора ИС-матрицы парных сравнений

Основными характеристиками, определяемыми в детерминированном АНР являются собственные векторы матриц парного сравнения, составляемые как для критериев, так и для альтернатив относительно каждого критерия. По своему содержательному смыслу элементы этих собственных векторов представляют собой приоритеты, или коэффициенты важности, критериев и альтернатив с точки зрения каждого критерия, которые затем служат для формирования вектора глобальных приоритетов и выбора наилучшего решения. Для рассматриваемого здесь интервально стохастического АНР собственные векторы являются случайными и для их характеристики необходимо уметь определять значения МО, Д и СКО элементов собственных векторов. ИС-матрица парных сравнений в условиях рассматриваемой модели имеет вид:

$$A(\omega)=\begin{pmatrix} 1 & a_{12}(\omega) & \cdots & a_{1n}(\omega) \\ a_{21}(\omega) & 1 & \cdots & a_{2n}(\omega) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(\omega) & a_{n2}(\omega) & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $a_{ij}(\omega) \in [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$ – ИС-оценка относительной значимости i-го фактора над j-ым при их парном сравнении, осуществляемом по фундаментальной шкале [7]; $a_{ji}(\omega) = 1/a_{ij}(\omega)$ ($i, j = 1, 2,\dots, n$) для каждой реализации $\omega \in \Omega$, при этом границы интервала изменения $[\underline{a}_{ji}, \overline{a}_{ji}]$ элемента ИС-матрицы парных сравнений $a_{ji}(\omega)$ равны $[1/\overline{a}_{ij}, 1/\underline{a}_{ij}]$.

В детерминированном АНР нормированные элементы w_i собственного вектора $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ матрицы парных сравнений A с достаточной точностью могут быть вычислены по формуле [7]:

$$w_i = \left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}} \Bigg/ \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}. \quad (2)$$

Для интервально стохастического АНР выражения (2) остаются справедливыми для каждой реализации $\omega \in \Omega$, поэтому случайные элементы $w_i(\omega)$ случайного собственного вектора $W(\omega) = (w_1(\omega), w_2(\omega), \dots, w_n(\omega))$ у ИС-матрицы парных сравнений $A(\omega)$ вычисляются согласно следующему выражению:

$$w_i(\omega) = \left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij}^{1/n}(\omega)\right) \Bigg/ \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n} E\{a_{ij}^{1/n}(\omega)\}\right), \quad (3)$$

где $E\{a_{ij}^{1/n}(\omega)\}$ – МО случайной величины $a_{ij}^{1/n}(\omega)$, $E\{\cdot\}$ – оператор МО.

Найдем выражения для определения МО, Д и СКО элементов случайного собственного вектора $W(\omega)$. Учитывая, что в каждой i-й строке ИС-матрицы $A(\omega)$ случайные величины $a_{i1}(\omega)$, $a_{i2}(\omega)$, …, $a_{in}(\omega)$ являются статистически независимыми, получим согласно (3), что значения $\text{МО}_{wi} = E\{w_i(\omega)\}$, $\text{Д}_{wi} = E\{(w_i(\omega) - E\{w_i(\omega)\})^2\}$ и $\text{СКО}_{wi} = (\text{Д}_{wi})^{1/2}$ элементов $w_i(\omega)$, $i = 1, 2,\dots, n$, собственного вектора $W(\omega)$, могут быть вычислены по следующим формулам:

$$\text{МО}_{wi} = \left(\prod_{j=1}^{n} E\{a_{ij}^{1/n}(\omega)\}\right) \Bigg/ \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n} E\{a_{ij}^{1/n}(\omega)\}\right), \quad (4)$$

$$\text{Д}_{wi} = E\{w_i^2(\omega)\} - \text{МО}_{wi}^2, \quad (5)$$

где

$$E\{w_i^2(\omega)\} = \left(\prod_{j=1}^{n} E\{a_{ij}^{2/n}(\omega)\}\right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n} E\{a_{ij}^{1/n}(\omega)\}\right)\right)^2. \quad (6)$$

В формулах (3)-(6) встречаются произведения от МО различных степеней случайных величин $a_{ij}(\omega)$, а именно, $a_{ij}^{1/n}(\omega)$, $a_{ij}^{-1/n}(\omega)$, $a_{ij}^{2/n}(\omega)$, $a_{ij}^{-2/n}(\omega)$. Можно показать, что в силу равномерности распределения случайных величин $a_{ij}(\omega)$ соответствующие значения МО будут определяться только через нижние и верхние значения границ интервалов $[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$, внутри которых принимают свои значения случайные величины $a_{ij}(\omega)$, а именно:

$$E\{a_{ij}^{\pm 1/n}(\omega)\} = \left(E\{(\overline{a}_{ij})^{1\pm 1/n}\} - E\{(\underline{a}_{ij})^{1\pm 1/n}\}\right) \Big/ \Delta_{ij}\left(1 \pm 1/n\right), \quad (7)$$

$$E\{a_{ij}^{\pm 2/n}(\omega)\} = \left(E\{(\overline{a}_{ij})^{1\pm 2/n}\} - E\{(\underline{a}_{ij})^{1\pm 2/n}\}\right) \Big/ \Delta_{ij}\left(1 \pm 2/n\right). \quad (8)$$

Вычислив величины (7) и (8) и подставив их в (4) – (6) получим выражения для определения

$МО_{wi}$, $Д_{wi}$ и $СКО_{wi}$ случайных элементов w_i (ω), i = 1, 2,…, n случайного собственного вектора ИС-матрицы парных сравнений A(ω).

1.2. Определение МО, Д и СКО векторов приоритетов критериев и векторов приоритетов альтернатив по каждому критерию

Выше были получены выражения для вычисления значений МО, Д и СКО случайного собственного вектора ИС-матрицы парных сравнений.

В детерминированном АНР составляются несколько матриц парного сравнения: одна матрица (A_F) для критериев $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ и m матриц (A^F_X) для альтернатив $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ относительно каждого критерия из вектора F. Затем для каждой матрицы парных сравнений определяются их собственные векторы, которые являются векторами приоритетов критериев $w_F = (w_{f\,1}, w_{f\,2}, \dots, w_{f\,m})$ и векторами приоритетов альтернатив $x_1, x_2, \dots, x_n$ относительно каждого критерия f_k (k = 1, 2, … , m), т.е. $w_X^{fk} = (w_{x1}^{fk}, w_{x2}^{fk}, \dots, w_{xn}^{fk})$.

В рассматриваемом нами интервально стохастическом АНР матрицы парных сравнений являются ИС-матрицами, а их собственные векторы $w_F = w_F$ (ω) и $w_X^{fk} = w_X^{fk}$ (ω) – случайными. Поэтому для полной характеристики случайных векторов необходимо располагать МО, Д и СКО случайных элементов для:

– критериев

$$МО_{wfk} = E\{w_{fk}(ω)\},$$

$$Д_{wfk} = E\{(w_{fk}(ω) - E\{w_{fk}(ω)\})^2\},$$

$$СКО_{wfk} = (Д_{wfk})^{1/2};$$

– альтернатив по каждому критерию f_k (k = 1, 2, … , m)

$$МО_{wxi}^{fk} = E\{w_{xi}^{fk}(ω)\},$$

$$Д_{wxi}^{fk} = E\{(w_{xi}^{fk}(ω) - E\{w_{xi}^{fk}(ω)\})^2\},$$

$$СКО_{wxi}^{fk} = (Д_{wxi}^{fk})^{1/2},$$

которые вычисляются согласно выражениям вида (4)-(8).

1.3. Определение МО, Д и СКО вектора глобальных приоритетов альтернатив

Значения глобальных приоритетов (ГП) альтернатив в детерминированном АНР, по величине которых производится окончательный выбор наилучшего решения в многокритериальной проблеме, вычисляются как сумма произведений приоритетов данной альтернативы относительно каждого критерия на приоритеты соответствующих критериев.

В интервально стохастическом АНР приоритеты, как критериев, так и альтернатив по критериям, представляют собой случайные величины, поэтому ГП альтернатив также будут случайными $Г_{xi}$ (ω). Для каждой альтернативы x_i они определяются следующим выражением (i = 1, 2,…, n):

$$Г_{xi}(ω) = w_{xi}^{f1}(ω)\cdot w_{f1}(ω) + + w_{xi}^{f2}(ω)\cdot w_{f2}(ω) + \dots + w_{xi}^{fm}(ω)\cdot w_{fm}(ω), \qquad (9)$$

где w_{xi}^{f1} (ω), w_{xi}^{f2} (ω), … , w_{xi}^{fm} (ω) – приоритеты альтернативы x_i по критериям $f_1, f_2, \dots, f_m$; $w_{f\,1}$ (ω); $w_{f\,2}$(ω), … , $w_{f\,m}$(ω) – приоритеты критериев.

Все приоритеты являются независимыми как попарно, так и в совокупности.

Поскольку случайные величины приоритетов альтернатив и критериев в (9) независимы между собой, то для случайной величины $Г_{xi}$ (ω) значения $МО_{Гi} = E\{w_{Гi}(ω)\}$, $Д_{Гi} = E\{(w_{Гi}(ω) - E\{w_{Гi}(ω)\})^2\}$ и $СКО_{Гi} = (Д_{Гi})^{1/2}$ будут определяться следующими выражениями [6]:

$$МО_{Гi} = \sum_{k=1}^{m} E\{w_{xi}^{fk}(ω)\}\cdot E\{w_{fk}(ω)\}, \qquad (10)$$

$$Д_{Гi} = \sum_{k=1}^{m}\{Д_{wxi}^{fk}\cdot Д_{wfk} + Д_{wxi}^{fk}\cdot МО_{wfk}^2 + Д_{wfk}\cdot(МО_{wxi}^{fk})^2\} \qquad (11)$$

По вычисленным значениям МО (10), Д (11) и СКО = $(Д)^{1/2}$ для величин ГП альтернатив строятся ε-интервалы, внутри которых с доверительной вероятностью $P_ε$ будут лежать случайные величины ГП, а именно Γ_{xi} (ω) ∈ $[\underline{\Gamma}_{xi}, \overline{\Gamma}_{xi}]$, при этом нижние и верхние границы $\underline{\Gamma}_{xi}$ и $\overline{\Gamma}_{xi}$ интервалов ГП альтернатив составят:

$$\underline{\Gamma}_{xi} = \text{МО}_{\Gamma i} - \varepsilon \cdot \text{СКО}_{\Gamma i},$$
$$\overline{\Gamma}_{xi} = \text{МО}_{\Gamma i} + \varepsilon \cdot \text{СКО}_{\Gamma i} \qquad (12)$$

Иначе говоря, значения Γ_{xi} (ω) для каждой альтернативы x_i будут заключены в интервале $\text{МО}_{\Gamma i} - \varepsilon\cdot\text{СКО}_{\Gamma i} \le \Gamma_{xi}(\omega) \le \text{МО}_{\Gamma i} + \varepsilon\cdot\text{СКО}_{\Gamma i}$. Число ε целесообразно выбрать равным 3, тогда вероятность обнаружить значение ГП вне интервала $[\text{МО}_{\Gamma i} \pm 3\cdot\text{СКО}_{\Gamma i}]$ будет невелика (не более 1/9) [6].

1.4. Принятие наилучшего решения в интервально стохастическом АНР

Интервалы, оценивающие значения ГП альтернатив, могут иметь разнообразное взаимное расположение (Рис.1), что в общем случае приводит к такому множеству выбираемых решений, которое может содержать интервальные решения несравнимые между собой. Это обстоятельство существенно затрудняет окончательный выбор наилучшей альтернативы.

Полученные в рассмотренном интервально стохастическом АНР интервалы возможных значений ГП служат далее основанием для определения наилучшей альтернативы. Ее выбор осуществляется посредством анализа относительного расположения нижних и верхних границ интервалов ГП для различных альтернатив. Целесообразно выбирать такое интервальное решение, для которого нижняя и верхняя границы интервала ГП имеют максимальные значения среди границ интервалов ГП других альтернатив. На Рис. 1, а таковым является интервал ГП, соответствующий альтернативе x', поскольку его нижняя и верхняя границы имеют максимальные значения (сдвинуты вправо). В соответствии с этим худшей будет такая альтернатива (x''), для которой границы интервала ГП являются минимальными (сдвинуты влево). Сказанное справедливо и для тех случаев, когда у двух сравниваемых между собой ГП-интервалов совпадают либо верхняя (Рис. 1,б), либо нижняя (Рис. 1,в) границы. Так, если верхние границы двух интервалов ГП совпадают, то выбирается то решение, у которого значение

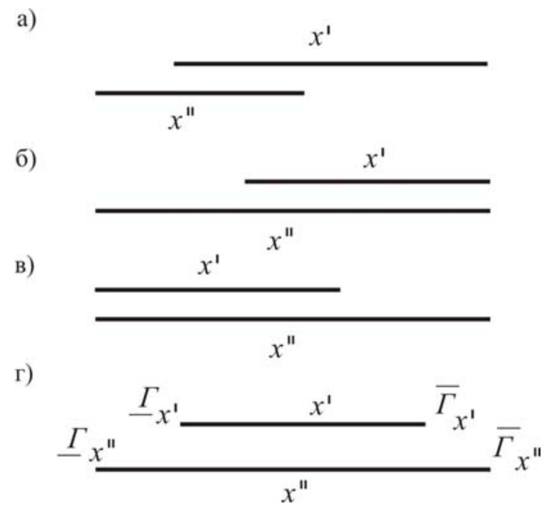

Рис. 1. Различные варианты относительного расположения интервалов значений ГП, соответствующих двум сравниваемым альтернативам x' и x''

нижней границы больше (x', Рис.1,б), а если нижние границы ГП совпадают, то лучшим будет решение с большим значением верхней границы (x'', Рис.1,в). Особо отметим ситуацию, когда у двух сравниваемых между собой решений длины ГП-интервалов равны и их нижняя и верхняя границы совпадают. В этом случае оба решения равноценны по всем критериям и принятие одного из них определяется исключительно мнением и пристрастиями ЛПР.

Возможны также случаи «вложенных» (Рис.1,г) ГП-интервалов $[\underline{\Gamma}_{x'}, \overline{\Gamma}_{x'}] \subset [\underline{\Gamma}_{x''}, \overline{\Gamma}_{x''}]$, когда длина ГП-интервала $[\underline{\Gamma}_{x'}, \overline{\Gamma}_{x'}]$ одного решения (x') меньше длины ГП-интервала $[\underline{\Gamma}_{x''}, \overline{\Gamma}_{x''}]$ другого решения (x'') и при этом между нижними и верхними границами соблюдаются неравенства: $\underline{\Gamma}_{x''} < \underline{\Gamma}_{x'} < \overline{\Gamma}_{x'} < \overline{\Gamma}_{x''}$. При вложенных ГП-интервалах и не совпадающих границах выбор лучшей альтернативы затруднителен, что обусловливается тем, что две альтернативы x' и x'' с вложенными ГП-интервалами являются несравнимыми между собой. Действительно (Рис.1,г), значения ГП обеих альтернатив x' и x'', принадлежащих вложенному ГП-интервалу $[\underline{\Gamma}_{x'}, \overline{\Gamma}_{x'}]$ полностью совпадают, что делает альтернативы x' и x'' неразличимыми между собой по последствиям;

в то же время, альтернатива x'' с большим ГП-интервалом $[\underline{\Gamma}_{x''}, \overline{\Gamma}_{x''}]$ имеет значения ГП, которые, с одной стороны, *больше* верхней границы $\overline{\Gamma}_{x'}$ вложенного ГП-интервала $[\underline{\Gamma}_{x'}, \overline{\Gamma}_{x'}]$, что делает альтернативу x''лучше альтернативы x', а с другой стороны – меньше нижней границы $\underline{\Gamma}_{x'}$ вложенного ГП-интервала $[\underline{\Gamma}_{x'}, \overline{\Gamma}_{x'}]$, что делает альтернативу x'' хуже, чем альтернатива x'. Для окончательного выбора наилучшей альтернативы в рассматриваемом случае необходимо провести дополнительный анализ субъективных интервальных оценок и суждений, предоставляемых данным ЛПР, с целью их уточнения и сужения интервалов неопределенности. Практические расчеты показывают, что, как правило удается привести альтернативы, характеризуемые неопределенными интервальными ГП, к сравнимому виду, при котором лучшая альтернатива будет иметь максимальные значения как нижней, так и верхней границ ГП-интервала (Рис. 3).

Вместе с тем, при анализе интервальных альтернатив возникает и другой аспект, который отсутствует при выборе альтернатив в детерминированном АНР, основанном на точечных оценках. Этот аспект именуется нами *интервальной устойчивостью*. Рассмотрим этот аспект подробнее.

Ввиду того, что наилучшее решение в интервально стохастическом АНР определяется на основании интервальных оценок, возникает такой аспект, как *устойчивость* интервальной альтернативы, которая характеризует область в интервале ГП, в пределах которой принятое решение остается неизменным, а при выходе за пределы области (оставаясь внутри ГП-интервала) изменяется на иное решение. Действительно, интервалы ГП различных альтернатив, как уже отмечалось выше, могут либо пересекаться между собой, образуя *общий интервал* (ОИ) значений (Рис.1,а, Рис.2), либо быть включенными один в другой (Рис.1,б, в, г). Это означает, что альтернативы, соответствующие тем значениям ГП, которые принадлежат общему интервалу ОИ, приводят к одинаковым последствиям. Иначе говоря, наилучшая в целом альтернатива, имеющая максимальные значения нижней и верхней границ интервала ГП будет, тем не менее, отнюдь не лучшей по сравнению с другой альтернативой,

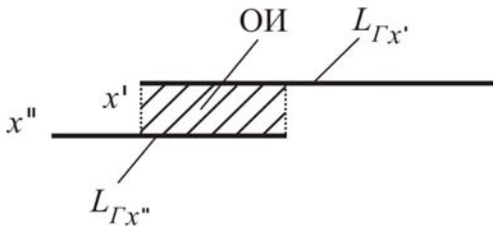

Рис. 2. Общий интервал (ОИ), пересекающихся интервалов ГП, соответствующих двум альтернативам x' и x''

если последняя имеет с первой совпадающие значения ГП внутри некоторого интервала ОИ (Рис.2). В общем, для этих альтернатив в интервале ОИ обе альтернативы оказываются равноценными. Будем именовать указанный аспект *интервальной устойчивостью* альтернативы.

Понятно, что чем большую долю в длине L_Γ интервала ГП занимает длина $L_{ОИ}$ общего интервала ОИ, тем менее устойчивой будет данная интервальная альтернатива, поскольку в точках внутри ОИ обе альтернативы ничем не отличаются друг от друга. Таким образом, *интервальная устойчивость Q* альтернативы может быть определена как

$$\left\{\begin{matrix}\textit{Интервальная устойчивость}\\ \textit{альтернативы}\end{matrix}\right\} = Q = \frac{L_\Gamma - L_{ОИ}}{L_\Gamma}. \quad (13)$$

По существу, *интервальная устойчивость* альтернативы равна доле, которую свободная от ОИ часть интервала ГП занимает в длине всего ГП-интервала ($0 \le Q \le 1$). Если длина интервала ОИ двух альтернатив равна длине интервала ГП одной из них ($L_\Gamma = L_{ОИ}$), то *интервальная устойчивость* данной альтернативы $Q = 0$ и поэтому данная альтернатива в границах внутри ОИ будет ничем не лучше другой. Когда интервалы ГП двух альтернатив не пересекаются, длина $L_{ОИ} = 0$, *интервальная устойчивость* обеих альтернатив будет максимальной и равной $Q = 1$.

Таким образом, интервальная устойчивость показывает относительную величину диапазона ГП-интервала, в пределах которого данная альтернатива может быть заменена другой. Чем больше величина интервальной устойчивости данной альтернативы, тем в большем диапазоне ГП-интервала она будет сохранять свое преимущество перед остальными. И наоборот, чем меньше величина интервальной устойчивости данной альтернативы, тем меньше у нее преимуществ перед другими альтернативами, поскольку в широком диапазоне значений ГП может быть заменена другой альтернативой. Поэтому наряду с указанием наилучшей альтернативы, выбираемой по максимальным значениям верхней и нижней границ ГП-интервалов, следует также указывать и значение интервальной устойчивости альтернативы, несущей информацию о широте диапазона ГП-интервала, внутри которого она все еще имеет преимущество перед другими.

2. Пример применения интервально стохастического АНР

Рассмотрим многокритериальную проблему, заключающуюся в выборе компромиссного решения из трех альтернатив x_1, x_2, x_3, оцениваемых с точки зрения четырех критериев f_1, f_2, f_3, f_4. Содержательный смысл рассматриваемой проблемы состоит в выборе наилучшего места в районе (из трех предложенных) для размещения общественно значимого объекта, оцениваемого с точки зрения развитости инфраструктуры f_1, платежеспособного спроса населения f_2, плотности конкурентной среды f_3, ориентировочной стоимости будущего строительства f_4.

При априорном оценивании истинные точные значения факторов на момент принятия решения, равно как при его реализации на практике, не известны. Поэтому оценки ЛПР носят принципиально интервальный характер, причем возможные значения факторов с равной вероятностью могут располагаться в любой точке внутри соответствующих интервалов изменения. Вследствие интервально стохастического характера оценок, матрицы парных сравнений важности и значимости критериев и альтернатив с точки зрения каждого критерия, являются ИС-матрицами, каждый элемент которых представляет собой случайную равномерно распределенную величину в интервале своего изменения. ИС-матрицы парных сравнений в рассматриваемом примере имеют следующий вид:

– для критериев f_1, f_2, f_3, f_4

$$A_F = \begin{pmatrix} 1 & [2, 3] & [4, 6] & [5, 7] \\ [1/3, 1/2] & 1 & [3, 5] & [6, 9] \\ [1/6, 1/4] & [1/5, 1/3] & 1 & [5, 7] \\ [1/7, 1/5] & [1/9, 1/6] & [1/7, 1/5] & 1 \end{pmatrix},$$

– для альтернатив x_1, x_2, x_3 относительно каждого критерия f_1, f_2, f_3, f_4.

$$A_X^{f1} = \begin{pmatrix} 1 & [3, 5] & [5, 7] \\ [1/5, 1/3] & 1 & [4, 5] \\ [1/7, 1/5] & [1/5, 1/4] & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_X^{f2} = \begin{pmatrix} 1 & [1/6, 1/3] & [1/8, 1/6] \\ [3, 6] & 1 & [1/4, 1/2] \\ [6, 8] & [2, 4] & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_X^{f3} = \begin{pmatrix} 1 & [1/6, 1/4] & [2, 4] \\ [4, 6] & 1 & [7, 9] \\ [1/4, 1/2] & [1/9, 1/7] & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_X^{f4} = \begin{pmatrix} 1 & [1/8, 1/6] & [1/7, 1/5] \\ [6, 8] & 1 & [2, 3] \\ [5, 7] & [1/3, 1/2] & 1 \end{pmatrix}.$$

Необходимое для получения оценок приведение разнородных качественных и количественных критериев к единой однородной шкале рассмотрено в [2, 5].

Вычисления значений МО, Д и СКО случайных собственных векторов ИС-матриц парных сравнений проводились согласно выражениям, полученным выше. Результаты вычислений значений МО, Д и СКО коэффициентов важности критериев и альтернатив относительно критериев, приведены в Табл. 1, а для значений ГП альтернатив – в Табл. 2. В Табл. 2 приведены также рассчитанные интервалы изменений значений ГП для различных альтернатив.

На Рис.3 приведены границы интервалов ГП альтернатив x_1, x_2, x_3, вычисленные по рассмотренному в статье интервально стохастическому АНР (сплошные линии) и, для сравнения – по правилам интервальной арифметики (пунктирные линии) [1]. Полученные интервалы возможных значений ГП (Табл.2) служат основанием для выбора наилучшей альтернативы. В рассматриваемом примере наилучшей является альтернатива x_1 (Рис. 3), поскольку нижняя и верхняя границы ее интервала значений ГП имеют максимальные значения среди

Табл.1. МО, Д, СКО коэффициентов важности критериев и альтернатив по каждому критерию

Критерии	f_1		f_2		f_3		f_4	
	МО	**Д**	**МО**	**Д**	**МО**	**Д**	**МО**	**Д**
	0,507	5,857E-4	0,321	3,135E-4	0,129	4,610E-5	0,043	3,731E-6
Альтернативы	**МО**	**Д**	**МО**	**Д**	**МО**	**Д**	**МО**	**Д**
x_1	0,676	1,555E-3	0,0759	2,982E-5	0,183	1,940E-4	0,068	8,479E-6
x_2	0,246	1,727E-4	0,273	6,474E-4	0,741	1,144E-3	0,614	8,525E-4
x_3	0,079	9,311E-6	0,651	2,137E-3	0,076	2,887E-5	0,318	2,584E-4

Табл.2. МО, Д, СКО и интервалы изменения ГП альтернатив

Глобальные приоритеты альтернатив	**Статистические меры глобальных приоритетов**			**Интервалы изменения МО ± 3·СКО**
	МО	Д	СКО	
Γ_{x1}	0,394	6,78E-4	0,026	[0,315, 0,472]
Γ_{x2}	0,334	2,18E-4	0,015	[0,290, 0,378]
Γ_{x3}	0,273	3,62E-4	0,019	[0,216, 0,330]

всех остальных ГП-интервалов. При этом наихудшей будет альтернатива, для которой границы интервала ГП являются минимальными (альтернатива x_3).

Интервалы значений ГП двух интервальных альтернатив x_1 и x_2, одна из которых (x_1) является лучшей, пересекаются по общему множеству ОИ, равному интервалу [0,315, 0,378]. Так как длина интервала ОИ равна $L_{ОИ}$ = 0,063, а длина интервала ГП альтернативы x_1 равна $L_{\Gamma x_1}$ = 0,157, то величина *интервальной устойчивости* альтернативы x_1 согласно (13) будет равна

$$Q_{x_1} = (L_{\Gamma x_1} - L_{ОИ}) / L_{\Gamma x_1} = (0{,}157 - 0{,}063) / 0{,}157 = 0{,}6,$$

что составляет 60%-ю *устойчивость* альтернативы x_1. *Интервальная устойчивость* альтернативы x_2, интервал ГП которой пересекается с интервалом ГП альтернативы x_1, составляет величину

$$Q_{x_2} = (L_{\Gamma x_2} - L_{ОИ}) / L_{\Gamma x_2} = (0{,}088 - 0{,}063) / 0{,}0{,}088 = 0{,}3,$$

равную 30%-й устойчивости, что в два раза меньше интервальной устойчивости (60%) для альтернативы x_1. Значение интервальной устойчивости альтернативы x_1, равное 0,6 свидетельствует о том, что в 60% длины ГП-интервала альтернатива x_1 будет оставаться лучшей.

Сравнение величин интервалов ГП (Рис.3), вычисленных по предложенному интервально стохастическому АРН, а также с использованием операций интервальной арифметики [1], показывает, что длина последних в несколько раз

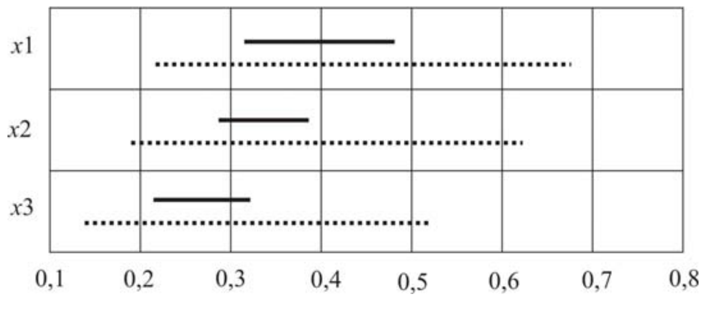

Рис. 3. Границы интервалов ГП альтернатив, полученные по интервально стохастическому методу АНР (сплошные линии), развитому в данной статье, и по правилам интервальной арифметики (пунктирные линии)

превышает длину первых, что является неоправданным и обусловливается исключительно правилами совершения операций в интервальной арифметике, но не содержательным смыслом неопределенности. Указанное обстоятельство вызывается особенностями проведения операций интервальной арифметики, которые зависят как от порядка применения операций, так и от вида преобразований алгебраических выражений. Поэтому применение интервальной арифметики в качестве инструмента для обработки интервальных данных оценок и суждений является некорректным, что делает его непригодным для принятия решения в многокритериальных проблемах.

Заключение

Разработанный в статье интервально стохастический метод АНР является расширением детерминированного метода АНР на интервально стохастическую неопределенность, которая более естественна и адекватна природе субъективного принятия решений. Полученные выражения позволяют определять значения МО, Д и СКО как для случайных собственных векторов ИС-матриц парных сравнений, так и случайных интервалов ГП различных альтернатив. По найденным значениям МО, Д и СКО определяются интервалы возможных значений ГП, а именно, МО - ε·СКО $\le \Gamma(\omega) \le$ МО + ε·СКО, соответствующих различным альтернативам. Наилучшая интервальная альтернатива соответствует альтернативе с таким интервалом ГП, нижняя и верхняя границы которого являются максимальными среди границ всех остальных интервалов, что всегда может быть достигнуто интерактивным взаимодействием с ЛПР по уточнению его субъективных оценок. Кроме того, интервальная альтернатива, в отличие от точечной и детерминированной, должна быть охарактеризована также величиной *интервальной устойчивости* альтернативы. Это обусловливается тем, что при выборе наилучшей альтернативы помимо расположения границ интервала ГП, необходимо также оценивать область изменения значений ГП, при переходе в которую одна альтернатива изменяется на другую или, по крайней мере, становится

не лучше конкурирующей альтернативы. Такую информацию дает введенное здесь понятие об интервальной устойчивости альтернативы, которая определяется по относительной ширине общего интервала ОИ, образованного пересечением интервалов ГП двух сравниваемых альтернатив. Доля интервала ОИ в длине интервалов ГП конкурирующих альтернатив количественно определяет их *интервальную устойчивость* (13). Так, *интервальная устойчивость* альтернативы минимальна (равна 0), если доля интервала ОИ в величине интервала ГП альтернативы равна единице и максимальна (равна 1), если доля интервала ОИ в длине интервала ГП альтернативы равна нулю.

Сравнение интервалов ГП альтернатив, полученных по предлагаемому интервально стохастическому АНР и с использованием интервальной арифметики, показывает их существенное отличие друг от друга. Предлагаемый подход приводит к значительно более узким интервалам неопределенности для ГП альтернатив, чем подход, основанный на операциях интервальной арифметики. Причем последние при этом имеют неоправданно большую ширину, которая неадекватна действительной неопределенности. Кроме того, необходимо учесть некорректность применения интервальной арифметики, поскольку ее результаты определяются порядком применения интервально арифметических операций и способами преобразований алгебраических выражений.

Предлагаемый в данной статье интервально стохастический метод АНР предназначен для принятия решений в многокритериальных проблемах при интервально стохастической неопределенности субъективных оценок, что отражает реальные условия выбора и психологию субъекта при принятии решений.

Литература

1. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987.
2. Мадера А.Г. Моделирование и принятие решений в менеджменте. – М. Издательство ЛКИ/УРСС, 2013.
3. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. – М.: Физматлит, 2005.
4. Подиновский В.В. Интервальные оценки важности критериев в многокритериальной оптимизации // Научно-техническая информация. Сер. 2. – 2002 – № 10. – С.19-21.
5. Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев. – М.: Физматлит, 2007.
6. Розанов Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. – М.: Наука, 1985.

7. Саати Т.Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М.: Радио и связь, 1993.
8. Kahneman D., Slovic P., Tversky A. Judgment under uncertainty: heuristics and biases. – Cambridge, Cambridge University Press, 2001.
9. Podinovski V.V. Interval articulation of superiority and precise elicitation of priorities // European J. of Operational Research. – 2007. – V. 180. – P. 406 – 417.
10. Salo A.A., Hämäläinen R.P. Preference programming through approximate ratio comparisons // European J. of Operational Research. – 1995. – V. 82. – P. 458 – 475.
11. Wang Y.-M., Yang J.-B., Xu D.-L. Interval weight generation approaches based on consistency test and interval comparison matrices // Applied Mathematics and Computation. – 2005. – V. 167. – P. 252 – 273.

Мадера Александр Георгиевич. Профессор, заведующий отделом моделирования НИИ системных исследований РАН. В 1973 г. окончил Московский институт электроники и математики. Доктор технических наук. Автор более 150 печатных работ и пяти монографий. Область научных интересов: моделирование процессов различной физической природы, в менеджменте, логистике, принятие решений, прогнозирование и оценка рисков. E-mail: agmprof@mail.ru