А.В. Жожикашвили

Метод сходства и метод различия Д.С. Милля на языке теории категорий[1]

Аннотация. В статье описано применение теоретико-категорного языка сопоставления с образцом для формализации метода сходства и метода различия, лежащих в основе ДСМ-метода автоматического порождения гипотез.

Ключевые слова: интеллектуальные системы, основанные на знаниях, теория категорий, ДСМ-метод.

Введение

ДСМ-метод автоматического порождения гипотез был предложен В.К. Финном [1, 2]. В основу методы были положены способы рассуждений, сформулированные Д.С. Миллем. Анализируя связи между определенными элементами объекта и присущими этому объекту свойствами, ДСМ метод позволяет сформулировать гипотезы о том, какие сочетания элементов отвечают за те или иные свойства объекта.

Автор настоящей работы на протяжении ряда лет проводил исследования по созданию формального математического языка для изучения интеллектуальных систем, основанных на знаниях [3, 4]. Результатом этих работ явился язык, основанный на аппарате теории категорий, описывающий работу обобщенной системы продукций. Обобщенная система продукций может служить полезным инструментом для изучения широкого класса интеллектуальных компьютерных систем, основанных на знаниях. В частности, теоретико-категорный язык описания обобщенных продукционных систем не связан напрямую с устройством объектов, на которые воздействуют продукции, и действиями, которые они могут осуществлять над этими объектами. Одной из областей, в которой теоретико-категорный язык мог бы быть полезен, является создание алгоритмов автоматического формирования продукционной базы знаний в процессе обучения.

Интерес автора к ДСМ-методу связан со следующими обстоятельствами. Основные идеи ДСМ-метода сформулированы в чрезвычайно общем виде, также не зависящем от характера входных и выходных данных. Кроме того одним из результатов работы ДСМ-метода является создание определенных правил, связывающих элементы объектов со свойствами этих объектов, что очень близко к задаче автоматического формирования системы продукций. Автору показалось интересным сформулировать основные идеи ДСМ-метода на теоретико-категорном языке. В настоящей статье показано, как это можно сделать. Отметим, что на теоретико-категорный язык был переведен скорее не сам ДСМ-метод, а лежащие в его основе методы сходства и различия, идущие еще от Д.С. Милля. Работы над ДСМ-методом ведутся уже много лет (напр. [5, 6]) и разработанные в процессе этих исследований алгоритмы на порядок сложнее элементарных примеров, на которых применение теории категорий демонстрируется в статье.

1. Образцы и сопоставление в терминах теории категорий

Большая часть содержания этого раздела была уже изложена в более ранних работах на эту тему и приводится здесь для удобства чита-

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 09-07-00233 и по программе № 211 Президиума РАН

теля. Утверждения настоящего раздала приводятся без доказательств.

Основными терминами описываемой теории являются ситуация, образец и операция сопоставления. Четвертое базовое понятие теории – понятие продукции – в настоящей статье использоваться не будет. Для формализации этих понятий строится определенная категория. Ниже будем считать, что эта категория является малой. Как именно строится категория, определяется спецификой конкретной задачи, для решения которой будут использоваться ситуации и образцы. В следующих разделах будет показано, как можно построить такую категорию для некоторых простых примеров задач.

Пусть $\mathbf{C}$ - категория, S - объект этой категории (в дальнейшем для краткости будем для обозначения этого факта писать $S \in \mathbf{C}$. S-образцом называется любой морфизм $\varphi : X \to S$, где $X \in \mathbf{C}$ - произвольный объект. Если это не приводит к путанице, будем также обозначать такой образец одной буквой φ. Множество S-образцов обозначим символом $\mathbf{C}/S$. В множестве $\mathbf{C}/S$ выделим подмножество, элементы которого будем называть ситуациями. Какие именно образцы считаются ситуациями, также определяется конкретной задачей. Единственное условие, накладываемое на ситуации, следующее: если $\varphi\psi$ - композиция морфизмов φ и ψ, то морфизм $\varphi\psi$ является ситуацией в том и только в том случае, когда морфизм ψ является ситуацией.

Ситуация $\alpha : U \to S$ считается сопоставимой с образцом $\varphi : X \to S$, если существует морфизм $\beta : U \to X$ такой, что $\alpha = \varphi\beta$. Отметим, что этот морфизм не определяется равенством $\alpha = \varphi\beta$ однозначно.

Пусть $\varphi : X \to S$ и $\psi : Y \to S$ - два образца. Будем писать $\varphi \le \psi$, если существует морфизм $\chi : X \to Y$ такой, что $\varphi = \psi\chi$.

Лемма 1. Отношение $\le$ является предпорядком на множестве $\mathbf{C}/S$.

Лемма 2. Если $\varphi \le \psi$, то всякая ситуация, сопоставимая с образцом φ, сопоставима также с образцом ψ.

Обратное к лемме 2 утверждение не всегда верно.

Будем писать $\varphi \sim \psi$ если $\varphi \le \psi$ и $\psi \le \varphi$. Как известно, отношение $\sim$ является эквивалентностью на $\mathbf{C}/S$. Обозначим символом $\overline{\mathbf{C}/S}$ фактормножество множества $\mathbf{C}/S$ по этой эквивалентности, и будем обозначать класс эквивалентности, содержащий элемент φ, символом $[\varphi]$. Предпорядок на множестве $\mathbf{C}/S$ индуцирует на фактормножестве $\overline{\mathbf{C}/S}$ частичный порядок, определяемый формулой $[\varphi] \le [\psi] \Leftrightarrow \varphi \le \psi$. Переход от конкретных образцов к классам эквивалентных образцов представляется разумным и с прикладной точки зрения, ибо, согласно лемме 2, эквивалентные образцы описывают одно и то же множество ситуаций, т.е. различаясь формально, они совпадают по существу.

2. Метод сходства

В работе [7] предлагается следующая модель для демонстрации метода сходства. Допустим, мы имеем дело с некоторым набором объектов. Каждый объект описывается множеством составляющих его элементов и обладает рядом свойств. Нас интересует вопрос, наличие каких элементов влечет присутствие тех или иных свойств. Пусть известно, что объект, в который входят элементы d_1, d_2, d_3, d_4 обладает свойствами a_1, a_2. Пусть теми же свойствами обладает также объект с элементами d_1, d_2, d_5, d_6 и объект с элементами d_1, d_2, d_7, d_8. Разумно предположить, что причиной свойств a_1, a_2 являются на самом деле элементы d_1, d_2, входящие во все объекты. Символически это рассуждение записывается так:

$$\begin{array}{l} \{d_1, d_2, d_3, d_4\} \Rightarrow \{a_1, a_2\} \\ \{d_1, d_2, d_5, d_6\} \Rightarrow \{a_1, a_2\} \\ \{d_1, d_2, d_7, d_8\} \Rightarrow \{a_1, a_2\} \\ \hline \{d_1, d_2\} \Rightarrow \{a_1, a_2\} \end{array}$$

Для перевода этих рассуждений на теоретико-категорный язык отметим следующее. Каждая строка в приведенной выше формальной записи выглядит как правило. Однако в этих правилах различаются только левые части. Вывод во всех четырех правилах - один и тот же.

Стало быть, речь идет об уточнении условий, при которых этот вывод имеет место. В нашей теории условия, накладываемые на ситуацию (а то, что в ДСМ-методе называется объектом, в нашей модели естественно назвать ситуацией) задаются образцом. Приведенную выше схему можно упростить следующим образом:

$$\begin{array}{c}\{d_1, d_2, d_3, d_4\} \\ \{d_1, d_2, d_5, d_6\} \\ \underline{\{d_1, d_2, d_7, d_8\}} \\ \{d_1, d_2\}\end{array}$$

Каждая строка здесь задает уже образец. Смысл формулы – следующий: если ситуации, подходящие под образцы, приведенные в первых трех строках, обладают некоторым свойством, то этим свойством обладают и ситуации, подходящие под образец, приведенный в четвертой строке.

Для формализации подобного рассуждения можно использовать понятие наименьшего обобщения [3]. Образец $\sigma : Z \to S$ называется наименьшим обобщением образцов $\varphi : X \to S$ и $\psi : Y \to S$, если

i. существуют морфизмы λ и μ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & S & \\ X \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\lambda"'] & Z \arrow[u, "\sigma"] & Y \arrow[ul, "\psi"'] \arrow[l, "\mu"] \end{tikzcd}$$

коммутативна;

ii. если Z' - объект, а σ', λ' и μ' - морфизмы, для которых диаграмма

$$\begin{tikzcd} & S & \\ X \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\lambda'"'] & Z' \arrow[u, "\sigma'"] & Y \arrow[ul, "\psi"'] \arrow[l, "\mu'"] \end{tikzcd}$$

коммутативна, то существует морфизм τ, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} & S & \\ Z \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[rr, "\tau"'] & & Z' \arrow[ul, "\sigma'"'] \end{tikzcd}$$

коммутативной.

Лемма 3. Если образец σ является наименьшим обобщением образцов φ и ψ, то $[\sigma] = \sup([\varphi], [\psi])$ как элементы множества $\overline{\mathbf{C}/S}$.

Доказательство. Существование морфизмов λ и μ показывает, что $\varphi \le \sigma$ и $\psi \le \sigma$. Далее, если существует образец $\sigma' : Z' \to S$ такой, что $\varphi \le \sigma'$ и $\psi \le \sigma'$, должны существовать морфизмы $\lambda' : X \to Z'$ и $\mu' : Y \to Z'$ такие, что $\sigma'\lambda' = \varphi$ и $\sigma'\mu' = \psi$, откуда, согласно определению наименьшего обобщения, следует существование морфизма $\tau : Z \to Z'$, для которого $\sigma = \sigma'\tau$, т.е. $\sigma \le \sigma'$.

Теперь мы можем предложить следующую формулировку метода сходства: если и ситуации, подходящие под образец φ, и ситуации, подходящие под образец ψ, обладают некоторыми свойствами, то этими же свойствами обладают ситуации, подходящие под образец σ, являющийся наименьшим обобщением образцов φ и ψ.

Приведем пример, демонстрирующий предложенную формулировку. Для этого построим категорию, в которой эта формулировка приведет к выписанному выше примеру из работы [7].

Пусть A - множество, элементы которого будем считать составляющими элементами ситуации. Обозначим символом S множество всех подмножеств множества A. Это множество будем считать единственным объектом определяемой категории. Для любого множества $U \subset A$ определим отображение $\varphi_U : S \to S$, задаваемое следующей формулой: если $W \in S$, т.е. $W \subset A$, то $\varphi_U(W) = W \cup U$. Построенные отображения φ_U и будут морфизмами категории.

Для доказательства корректности определения категории следует убедиться в замкнутости множества отображений вида φ_U относительно композиции и в наличии среди них тождественного отображения. Для этого отметим очевидное равенство:

$$\varphi_U \varphi_V = \varphi_{U \cup V} . \qquad (1)$$

Из этого сразу вытекает замкнутость относительно композиции, а также то, что $\varphi_\varnothing$ является единичным отображением.

Из равенства (1) следует также

Лемма 4. $\varphi_U \le \varphi_V$ тогда и только тогда, когда $V \subset U$.

Таким образом, частично упорядоченное множество образцов в построенной категории антиизоморфно частично упорядоченному множеству подмножеств множества A .

Пусть $U \subset A$, $V \subset A$, $\varphi = \varphi_U$, $\psi = \varphi_V$. Наименьшим обобщением образцов φ_U и φ_V является образец $\varphi_{U \cap V}$ вместе с морфизмами φ_{U-V} и φ_{V-U}. Действительно, равенства $\varphi_U = \varphi_{U-V}\varphi_{U \cap V}$ и $\varphi_V = \varphi_{V-U}\varphi_{U \cap V}$ сразу следуют из (1). Пусть теперь заданы подмножества L, M, N множества A такие, что $\varphi_U = \varphi_L \varphi_N$ и $\varphi_V = \varphi_M \varphi_N$. Применение той же формулы (1) дает равенства $U = L \cup N$ и $V = M \cup N$. Это означает, что $N \subset U$, $N \subset V$, откуда $N \subset U \cap V$. Полагая $P = (U \cap V) - N$, получаем $U \cap V = P \cup N$, откуда $\varphi_{U \cap V} = \varphi_P \varphi_N$. Итак, теоретико-категорный вариант реализации метода сходства по образцам φ_U и φ_V строит образец $\varphi_{U \cap V}$. Это как раз соответствует переходу

$$\frac{\begin{array}{c}\{d_1, d_2, d_3, d_4\}\\ \{d_1, d_2, d_5, d_6\}\end{array}}{\{d_1, d_2\}.}$$

3. Метод различия

Введем в рассмотрение два образца, заданные морфизмами $\varphi : X \to S$ и $\psi : Y \to S$, и будем считать, что ситуации, сопоставимые с первым из образцов, обладают некоторыми свойствами, а ситуации, сопоставимые со вторым – не обладают этим свойствами, или не обязательно обладают ими (т.е. среди ситуаций, сопоставимых со вторым образцом, встречаются ситуации, не обладающие исследуемыми свойствами). Следуя логике Д.С.Милля, попытаемся описать ситуации, которые описываются той частью образца $\varphi : X \to S$, которая не входит в образец $\psi : Y \to S$. Описывающий эти ситуации образец должен содержать в качестве подобразца образец φ, но не должен содержать в качестве подобразца образец ψ .

Мы приходим к следующей формулировке метода различия. Пусть есть два образца φ и ψ, причем ситуации, сопоставимые с первым из образцов, обладают некоторыми свойствами, а ситуации, сопоставимые со вторым – не обладают этим свойствами, или не обязательно обладают ими. Рассмотрим множество всех таких образцов χ, для которых выполнено неравенство $\chi \ge \varphi$, но не выполнено неравенство $\chi \ge \psi$. Если это множество имеет наибольший элемент, можно высказать гипотезу, что этот элемент представляет собой образец, описывающий множество ситуаций, обладающих требуемыми свойствами.

Выясним, к чему приводит эта формулировка в случае категории, рассмотренной выше для индуктивного метода сходства. Пусть $\varphi = \varphi_U$, $\psi = \varphi_V$, $\chi = \varphi_W$. Согласно лемме 4, условие $\chi \ge \varphi$ означает, что $W \subset U$, условие $\chi \ge \psi$ означает, что $W \subset V$. Это означает, что для применения метода различий в данной выше формулировке следует рассмотреть множество подмножеств множества U, не являющихся подмножествами множества V , и выбрать среди них наименьшее. Легко видеть, что такое наименьшее множество существует только в одном случае: когда множество $U - V$ состоит ровно из одного элемента. Это не является неожиданным. Если ситуация, обладающая некоторым свойством, отличается от ситуации, не обладающей этим свойством, несколькими признаками, трудно определить, наличие которого из признаков (а может быть, совокупности нескольких признаков) привело к возникновению этого свойства. На этом основании принцип различия часто формулируют как принцип единственного различия. Приведем формулировку, данную Д.А. Поспеловым в книге [8]: если после введения какого-либо фактора появляется, или после удаления его исчезает известное явление, причем мы не вводим и не удаляем никакого другого обстоятельства, которое могло бы иметь в данном случае влияние, и не производим никакого изменения среди первоначальных условий явления, то указанный фактор и составляет причину явления. Настоятельное требование единственности обстоятельства, различающего две ситуации, соответствует в нашем случае одноэлементности множества $U - V$.

Записывая примеры так же, как мы это делали при разборе метода сходства, мы получаем следующий пример:

$$\begin{array}{l} \{d_1, d_2, d_3\}+ \\ \underline{\{d_1, d_2, d_4\}-} \\ \{d_3\} \end{array}$$

Первая строка означает, что объект с элементами d_1, d_2 и d_3 обладает некоторым свойством, т.е. является положительным примером. Вторая строка означает, что объект с элементами d_1, d_2 и d_4 этим свойством не обладает, т.е. является отрицательным примером. Вывод: причиной свойства является элемент d_3.

4. Пример использования теоретико-категорного языка

Поскольку формулировки методов сходства и различия перенесены нами на чисто теоретико-категорный язык, эти методы могут применяться и в других системах образцов, описываемых другими категориями. Приведу совсем простой пример, связанный, однако, с вполне реальной задачей, возникшей при создании прикладной интеллектуальной системы. В процессе работы система должна была преобразовывать текст в правила, пригодные для использования в продукционной базе знаний. Для этого, в частности, необходимо было определять, к какой части речи относится то или иное встретившееся в тексте слово, и в какой грамматической форме это слово стоит. В системах, работающих с естественным языком, единственным способом отнесения слова к той или иной части речи является использование словаря. Однако описываемая программа работала с текстами, представляющими собой сильно ограниченную часть естественного языка, с ограниченным набором слов, которые, кроме того, могли встречаться далеко не во всех формах. Это позволило отнести слово к той или иной части речи в зависимости от того, какими буквами оно оканчивается. Так, слова, оканчивающиеся буквами «лет», можно было с уверенностью отнести к глаголам в настоящем времени третьем лице. Слов «пистолет», «амулет» в рассматриваемых текстах не было, слово «лет» (родительный падеж множественного числа слова «лето») было записано в базу знаний как единственное исключение.

В данной задаче слово можно считать ситуацией, а выражение вида «*лет» - образцом. На место звездочки, как обычно, можно подставить любую последовательность букв, в этом и состоит конкретизация образца. Для писания такой системы образцов построим следующую категорию. Пусть A множество, которое будем называть алфавитом, а L - множество конечных последовательностей элементов множества A, которые будем называть словами. Если $s \in L$, $t \in L$, будем обозначать символом st последовательность из L, получающуюся приписыванием t к s справа. Для каждого $s \in L$ определим отображение $\varphi_s : L \to L$ формулой $\varphi_s(t) = ts$. Имеет место очевидное равенство:

$$\varphi_s \varphi_t = \varphi_{ts}. \qquad (2)$$

Построим категорию, единственным объектом которой является множество L (то, что в обоих примерах категория оказалось состоящей из одного объекта, является чистой случайностью, связанной с элементарностью примеров), а морфизмами из L в L являются отображения вида φ_s, $s \in L$. Очевидно, что φ_s представляет собой образец, описывающий все слова, оканчивающиеся на s, и только их.

Лемма 5. Пусть заданы образцы φ_s и φ_t, $s = a_m a_{m-1} \ldots a_1$, $t = b_n b_{n-1} \ldots b_1$, причем $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_k = b_k$, $a_{k+1} \neq b_{k+1}$. Тогда:

1. Наименьшим обобщением этих образцов является образец φ_u, где $u = a_k a_{k-1} \ldots a_1$.

2. $\min\{\chi \mid \chi \geq \varphi_s, \neg(\chi \geq \varphi_t)\} = \varphi_v$, где $v = a_{k+1} a_k \ldots a_1$.

Доказательство этих утверждений тривиально.

Вот пример применения метода различия в описанной системе образцов. Речь в примере идет о проверки гипотезы, является ли некоторое слово существительным. Пример можно записать так:

```
законодательство +
произвольного    -
-----------------
            *во
```

Смысл этого примера понятен. Слово «законодательство» является существительным, представляя собой, следовательно, положительный пример. Слово «произвольного» не является существительным – отрицательный пример. Согласно лемме 5, применение метода различия порождает образец «*во», описывающий слова, оканчивающиеся на «во». Можно высказать гипотезу о том, что всякое слово, оканчивающееся на «во», является существительным. В случае если это не так, будут появляться новые отрицательные примеры, которые приведут к уточнению образца.

Описанный пример очень прост, однако он формально отличается от выписанных выше примеров, взятых из работ В.К. Финна, в которых анализируется связь между элементами объектов и их свойствами. В задачах, описываемых другими категориями, могут возникнуть новые варианты использования методов сходства и различия, а возможно, и других ДСМ-методов.

Заключение

Методы сходства и различия были сформулированы еще Д.С. Миллем в чрезвычайно общем и абстрактном виде. Эти формулировки применимы к разным областям интеллектуальной деятельности человека. Платой за столь широкую общность формулировок является слабая их формализованность, не позволяющая применить математические методы исследования и писать соответствующие компьютерные программы. Однако и то, и другое может быть проделано для конкретных задач, условия которых допускают уже определенную формализацию. Теоретико-категорный язык представляет собой некоторый компромисс. Он позволяет охватить достаточно широкий круг задач, являясь в то же время абсолютно формальным математическим языком.

Литература

1. Финн В.К. О возможностях формализации правдоподобных рассуждений средствами многозначных логик // Всесоюзный. симпозиум по логике и методологии науки.— Киев: Наукова думка, 1976.— С. 82–83.
2. Финн В.К. О машинно-ориентированной формализации правдоподобных рассуждений в стиле Ф.Бэкона — Д.С.Милля // Семиотика и информатика. — 1983. — Вып. 20. — С. 35–101.
3. Жожикашвили А.В., Стефанюк В.Л. Теория категорий в задачах представления знаний и обучения//Известия АН СССР. - Техническая кибернетика. - 1986. - №.2.
4. Стефанюк В.Л., Жожикашвили А.В. Сотрудничающий компьютер: проблемы, теории, приложения, Москва, Наука, 2007.
5. Автоматическое порождение гипотез в интеллектуальных системах / Сост. Е.С. Панкратова, В.К. Финн; под. общ. ред. В.К. Финна. — М.: ЛИБРОКОМ, 2009. — 528 с.
6. В.К.Финн. Искусственный интеллект: методология, применения, философия. М.,URSS,2011
7. Финн В.К. Правдоподобные выводы и правдоподобные рассуждения ИТОГИ НАУКИ и ТЕХНИКИ сер. теория вероятностей, математическая статистика. М.: ВИНИТИ 1988 стр. 1-83
8. Поспелов Д. А. Ситуационное управление: теория и практика, М. Наука, 1986.

Жожикашвили Александр Владимирович. Старший научный сотрудник ИППИ РАН. Окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1980 году. Кандидат технических наук. Автор 40 научных работ. Область научных интересов: искусственный интеллект, системы, основанные на знаниях. E-mail: zhozhik@iitp.ru