В.Д. Ногин

Линейная свертка критериев в многокритериальной оптимизации[1]

Аннотация. Известный метод линейной свертки критериев рассматривается с позиций общей модели многокритериального выбора, включающей множество возможных вариантов и векторный критерий, а также отношение предпочтения лица принимающего решение (ЛПР). Основное внимание уделяется корректности применения этого метода при решении многокритериальных задач. Анализируется класс задач, в котором использование линейной свертки можно считать обоснованным. Кроме того, для решения многокритериальных задач предлагается комбинированный подход, состоящий в предварительном сужении множества Парето за счет информации об отношении предпочтения ЛПР с последующей экстремизацией линейной свертки исходных критериев на более узком множестве.

Ключевые слова: линейная свертка, взвешенная сумма, многокритериальная оптимизация, множество Парето, принцип Эджворта-Парето.

Введение

Метод линейной свертки критериев, пожалуй, является самым известным и распространенным при решении прикладных многокритериальных задач оптимизации. Он заключается в назначении тем или иным способом коэффициентов в линейной свертке (линейной комбинации) исходных критериев и последующей ее экстремизации на множестве допустимых вариантов. Согласно этому методу найденное таким способом решение считается «наилучшим».

К настоящему времени число работ, в которых при решении прикладных многокритериальных задач используется линейная свертка критериев, насчитывает несколько тысяч. Наиболее раннее использование линейной свертки критериев, по-видимому, связано с правилом голосования, предложенным еще в XVIII в. французом де Борда [1, 9]. Начиная со второй половины XX в. метод линейной свертки активно используется при решении различного рода задач из области экономики и техники. Исследователей, прежде всего, привлекает его простота. Действительно, из всех функций в математике наиболее простой считается именно линейная. Кроме того, в линейной свертке сохраняются многие полезные свойства исходных критериев, такие, как линейность, выпуклость, вогнутость, непрерывность, дифференцируемость и др. По своему смыслу линейная свертка представляет собой среднее взвешенное исходных критериев и именно с этих позиций многим ее использование представляется обоснованным. Однако внимательный анализ этого метода с современных позиций многокритериального выбора показывает, что область его обоснованного (корректного) применения существенно уже той, в которой его используют.

В данной работе рассматривается задача многокритериального выбора, постановка которой содержит множество возможных вариантов, числовой векторный критерий и бинарное отношение предпочтения ЛПР, заданные на множестве вариантов. Разбираются две группы условий, выполнение которых призвано обеспечить корректность применения метода линейной свертки. К первой группе отнесены условия, гарантирующие существование линейной функ-

[1]Работа поддержана проектом РФФИ № 14-07-00899.

ции полезности, ко второй – те, что основаны на скаляризации многокритериальной задачи в терминах линейной свертки критериев. В том и другом случае проводится анализ соответствующих условий для выявления границ применимости рассматриваемого метода.

Условием успешного использования линейной свертки является приведение критериев к некой единой шкале, т.е. нормализация критериев. В работе обсуждаются вопросы, связанные с нормализацией, а также с назначением коэффициентов в линейной свертке.

В заключение предлагается комбинированный метод, согласно которому на основе аксиоматического подхода, развиваемого автором на протяжении ряда лет, осуществляется предварительное сужение множества Парето при помощи квантов информации об отношении предпочтения лица, принимающего решение, после чего применяется линейная свертка критериев. Указанное предварительное сужение позволит, во-первых, учесть имеющуюся дополнительную информацию, а во-вторых, − сократить возможные негативные последствия, связанные с применением метода линейной свертки критериев.

1. Постановка задачи многокритериального выбора

В обычной (однокритериальной или скалярной) оптимизации имеется одна целевая функция (критерий), определенная на некотором множестве возможных решений (вариантов) *X*. В многокритериальной оптимизации присутствуют сразу несколько таких числовых функций $f_1, f_2, ..., f_m$, образующих векторный критерий f и заданных на непустом абстрактном множестве *X*. Как известно, распространенным решением задачи скалярной оптимизации считается допустимый элемент, который доставляет максимальное (или минимальное) значение целевой функции. Далее для определенности будем рассматривать лишь задачу максимизации.

Во многих работах, посвященных исследованию и решению тех или иных многокритериальных задач, при формулировании задачи нередко по аналогии со скалярным случаем указывают, что «все критерии желательно максимизировать». Однако если в однокритериальном случае операция максимизации числовой функции четко определена и означает отыскание максимального элемента целевой функции на заданном множестве, то в случае нескольких критериев эта фраза не имеет точного смысла. В самом деле, подразумевается ли, что все критерии требуется максимизировать одновременно, или (в противном случае) максимизация должна осуществляться каким-то иным способом? Что именно следует понимать под решением многокритериальной задачи?

Для того чтобы избежать указанной неопределенности, необходимо дополнить постановку многокритериальной задачи, например, бинарным отношением предпочтения ЛПР, которое обозначим $\succ$. Будем считать, что оно задано на всем критериальном пространстве $R^m, R^m \supset Y = f(X)$ и является асимметричным. Таким образом дополненную многокритериальную задачу автор ранее предложил именовать *задачей многокритериального выбора*, а множество ее решений (*множество выбираемых векторов*) обозначать $C(Y), C(Y) \subset Y$. В терминах последнего множества запись $y \succ y'$ равносильна равенству $C(\{y, y'\}) = \{y\}$, означающему, что из двух данных векторов выбирается первый и не выбирается второй. Необходимо заметить, что в прикладных задачах многокритериального выбора в отличие от множества *X* и векторной функции *f* бинарное отношение предпочтения $\succ$, как правило, если и известно, то лишь частично. *Множество выбираемых вариантов* обозначим $C(X)$, $C(Y) = f(C(X))$.

В рамках задачи многокритериального выбора требование максимизации критериев можно формализовать в форме выполнения *аксиомы согласованности критериев* [6], согласно которой для каждого номера критерия $i \in \{1,2,...,m\}$ и любой пары векторов

$$y = (y_1, ..., y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, ..., y_m),$$
$$y' = (y_1, ..., y_{i-1}, y'_i, y_{i+1}, ..., y_m), \quad y_i > y'_i$$

выполнено $y \succ y'$. Подобный смысл имеет и *аксиома Парето*, в соответствии с которой из векторного неравенства $y \geq y'$ (означающего, что все компоненты первого вектора не меньше соответствующих компонент второго вектора, причем $y \neq y'$) всегда следует $y \succ y'$. Ясно, что из аксиомы Парето вытекает аксиома согласования, но не наоборот. Автором установлено, что аксиома Парето заведомо выполняется, если имеет место аксиома согласованности и асимметричное отношение $\succ$ транзитивно.

2. Принцип Эджворта-Парето

Всех исследователей, сталкивающихся с решением многокритериальных задач, можно разделить на две группы. К первой (сравнительно малочисленной) группе принадлежат те из них, которые считают, что выбранным может оказаться любой вектор множества *Y*. Представители второй группы полагают, что выбираемые векторы обязательно должны быть парето-оптимальными, т.е.

$$C(Y) \subset P(Y) =$$
$$= \{y^* \in Y \mid \text{не существует } y \in Y : y \geq y^*\}$$

или в терминах вариантов

$$C(X) \subset P_f(X) =$$
$$= \{x^* \in X \mid \text{не существует } x \in X : f(x) \geq f(x^*)\}.$$

Включение $C(Y) \subset P(Y)$ (равно как $C(X) \subset P_f(X)$), означающее, что множество выбираемых векторов (вариантов) всегда должно содержаться во множестве Парето, именуют *принципом Эджворта-Парето.* Например, распространенный метод целевого программирования [6] не всегда приводит к парето-оптимальным векторам; это обстоятельство должны учитывать те, кто его применяет на практике. Кроме того, существуют понятия «равновесных» решений (например, «равновесие по Нэшу» в теории игр), которые нередко не являются парето-оптимальными. Однако подавляющее большинство исследователей, занимающихся решением многокритериальных задач, выбор в пределах множества Парето считают как нечто само собой разумеющееся, не подлежащее доказательству, т.е. как определенную аксиому многокритериального выбора. Однако этот принцип никак нельзя назвать интуитивно очевидным утверждением, как того требует значение термина «аксиома».

В [5] установлено, что принцип Эджворта-Парето имеет место, если принять действительно интуитивно очевидную аксиому Парето, а также *аксиому исключения доминируемых векторов*, в соответствии с которой для любой пары векторов $y, y' \in R^m$ выполнена импликация $y \succ y' \Rightarrow y' \notin C(Y)$, т.е. вектор y', не выбираемый в паре, не должен оказаться во множестве выбираемых векторов $C(Y)$. Тем самым, именно эти две аксиомы можно положить в основу многокритериального выбора, если он осуществляется в пределах множества Парето. При этом следует отметить, что если ЛПР все же сделает свой выбор за пределами множества Парето, то это будет означать нарушение им, по крайней мере, одной из указанных выше двух аксиом.

3. Линейная свертка и многокритериальный выбор

Решение многокритериальных задач на основе линейной свертки критериев состоит в назначении тем или иным способом неотрицательных (а чаще положительных) коэффициентов $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$, в сумме дающих единицу (хотя это не обязательно), и последующей максимизации линейной комбинации критериев $\sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i(x)$ на множестве *X*.

Такой способ решения задач многокритериального выбора существовал еще до появления самого понятия оптимальности по Парето. Его автором является французский ученый XVIII в. Ж.-Ш. Борда, предложивший способ голосования, согласно которому побеждает тот кандидат, который набирает максимальную сумму мест в ранжировках кандидатов, представленных участниками голосования. Напомним, что в задаче голосования имеется конечное множество вариантов $X = \{x_1, ..., x_n\}$, именуемых кандидатами, и m участников голосования, каждый из которых способен ранжировать исходное множество вариантов, т.е. расположить их в порядке убывания предпочтительности. Ранжирование равносильно приписыванию каждому кандидату номера, считая с самого последнего n-го (т.е. наименее предпочтительного). Другими словами, на множестве X заданы числовые функции $f_1, ..., f_m$, такие, что $f_k(x_j) = n_{kj}$, где n_{kj} – порядковый номер (считая с конца) кандидата x_j, который занимает, по мнению k-го участника голосования в ряду вариантов, расположенных в порядке убывания их предпочтительности. Согласно *правилу де Борда*, выигрывает в голосовании тот кандидат i, чья сумма мест $\sum_{k=1}^{m} f_k(x_i)$ окажется максимальной. Как видим, в этом правиле как раз участвует линейная свертка критериев (с одинаковыми «весами», равными единице). Отметим также, что, например, замечательный русский инженер-корабел А.Н. Крылов применял линейную свертку при оценке качества продукции и услуг еще в начале XX в.

Практически никто из исследователей, использующих линейную свертку критериев для решения своих прикладных задач, не задумывается, являются ли их действия правомерными. В терминах модели многокритериального выбора использование линейной свертки критериев заведомо будет правомерным (обоснованным, корректным), если выполнена аксиома исключения доминируемых векторов и если существуют указанные выше коэффициенты $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$, при которых отношение предпочтение $\succ$ представляется линейной функцией, т.е.

$$y \succ y' \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i > \sum_{i=1}^{m} \mu_i y'_i$$
$$\text{для всех } y, y' \in R^m . \qquad (1)$$

Действительно, из (1), согласно аксиоме исключения, следует, что всякий вектор, для которого найдется другой вектор с большей линейной комбинацией будет исключен из множества выбираемых векторов, и потому в нем останутся только те, которые доставляют максимум линейной свертке. Таким образом, при выполнении указанных выше двух условий имеет место включение

$$C(Y) \subset \{y^0 \in Y \mid \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i^0 = \max_{y \in Y} \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i \} . \qquad (2)$$

Отметим, что аксиома исключения не является универсальной, поскольку существуют задачи многокритериального выбора, в которых она вполне может нарушаться. Пример подобного рода можно найти в [6].

Функцию $\sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i$, удовлетворяющую (1), принято именовать *линейной функцией полезности*. При этом нередко говорят, что указанная линейная функция представляет бинарное отношение $\succ$. Появление условий представления бинарных отношений в терминах функций полезности связывают с именами В. Парето, Шредера и Г. Кантора [2]. Что касается линейной функции полезности, то вопрос ее существования, по-видимому, впервые был исследован родоначальниками теории игр – Дж. Фон Нейманом и О. Моргенштерном [4]. Впоследствии их исследования были продолжены самыми различными авторами. Выяснилось [3], что достаточные условия существования линейной функции полезности являются довольно ограничительными и выполняются для сравнительно узкого класса отношений предпочтения. Иного типа (но не менее жесткие) достаточные условия существования линейной функции полезности можно найти в книге П. Фишберна [11 с. 161]. В их числе требование слабой упорядоченности (что означает иррефлексивносить и отрицательную транзитивность) отношения $\succ$, а также так называемое условие Архимеда. Поскольку бинарное отношение $\succ$, задаваемое (1), является конусным, то необходимым (но явно не достаточным) условием существования линейной функции полезности является принятие аксиомы согласования, а также транзитивность и инвариантность этого отношения относительно положительного линейного преобразования [6]. Еще одно необходимое условие существования линейной функции полезности состоит в требовании транзитивности отношения неразличимости $\approx$, которое задается эквивалентностью $y \approx y' \Leftrightarrow$ не выполняется ни соотношение $y \succ y'$, ни соотношение $y' \succ y$. Анализ показывает, что это условие также можно охарактеризовать как достаточно «жесткое». Таким образом, линейная функция полезности существует не так часто, как полагают некоторые исследователи, решившие использовать линейную свертку для решения многокритериальных задач и отказавшиеся от выполнения принципа Эджворта-Парето.

Отметим еще одно обстоятельство. Выполнение включения (2) означает, что множество выбираемых векторов содержится во множестве векторов, доставляющих максимум линейной свертке критериев. Если последнее множество состоит в точности из одного элемента, то, безусловно, именно этот вектор и следует выбирать. Однако простые примеры показывают, что указанное множество может оказаться достаточно широким (и даже совпасть с *Y*), причем все его элементы неравноценны в том же самом смысле, как неравноценны различные парето-оптимальные векторы. В таком случае вопрос выбора остается открытым, и для выявления $C(Y)$ необходимо использовать какую-то дополнительную информацию.

4. Линейная свертка как средство выбора конкретного парето-оптимального вектора

Если же принять принцип Эджворта-Парето, то использование линейной свертки можно обосновать, не требуя существования линейной функции полезности. В самом деле, в соответствии с указанным принципом выбирать следует только в пределах множества Парето, поэтому можно воспользоваться следующим необходимым и достаточным условием парето-оптимальности в терминах линейной свертки критериев.

Теорема 1 [8]. *Пусть множество*

$$Y_* = \{y^* \in R^m \mid y_i^* \le y_i, i = 1,2,...,m,$$
$$\textit{при некотором } y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in Y\}$$

является выпуклым. Тогда для того, чтобы вектор $y^0 \in Y$ был парето-оптимальным, необходимо существование набора неотрицательных чисел $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$, $\sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1$, при которых имеет место равенство:

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i^0 = \max_{y \in Y} \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i \quad . \qquad (3)$$

Обратно, выполнение равенства (3) *при некоторых положительных $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$, влечет парето-оптимальность вектора $y^0 \in Y$.*

Как видим, между необходимым и достаточным условием парето-оптимальности имеется определенное «рассогласование», заключающееся в том, что необходимое условие содержит требование неотрицательности коэффициентов $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$, тогда как в достаточном условии эти коэффициенты строго положительны. Если вместо парето-оптимальных (эффективных) векторов ограничиться собственно эффективными (оптимальными по Джеоффриону [8]), то на это «рассогласование» можно попробовать закрыть глаза и считать указанные коэффициенты строго положительными, тем более что «разница» между множествами эффективных и собственно эффективных векторов в условиях сформулированной теоремы не столь велика (а именно, второе множество является плотным в первом [8]).

Однако на требование выпуклости множества Y_* закрыть глаза никак нельзя, поскольку при его отсутствии далеко не каждый парето-оптимальный вектор может быть получен в результате максимизации линейной свертки с положительными коэффициентами. Простейшим примером подобного типа может служить плоское множество $Y = \{y \in R^2 \mid y_1 \cdot y_2 \le 10, y_1 \ge 1, y_2 \ge 1\}$, в котором вся криволинейная часть его границы является парето-оптимальной, тогда как в результате максимизации линейной свертки с неотрицательными коэффициентами могут быть получены лишь две ее крайние точки – 1,10 и 10,1. По этой же причине в случае конечного множества Y, которое заведомо не является выпуклым, если оно содержит по крайней мере два вектора, применение линейной свертки критериев не является обоснованным. Между тем, именно линейная свертка критериев лежит в основе широко известного метода анализа иерархий (МАИ) [10]. Об этом следует помнить тем, кто использует МАИ в своих исследованиях.

Комбинируя принцип Эджворта-Парето и сформулированную выше теорему, приходим к следующему результату.

Теорема 2. *Пусть имеют место аксиомы исключения и Парето. Предположим, что множество Y_* выпукло. Тогда для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ выполнено включение* (2), *где коэффициенты вектора $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m)$ неотрицательны и в сумме равны единице.*

В соответствии с данным утверждением, варьируя μ в указанных пределах и собрав вместе все векторы, доставляющие на множестве Y максимум линейной свертке критериев с указанными коэффициентами, получим множество, в котором заведомо содержится искомое множество выбираемых векторов. В общем случае в число выбираемых могут попасть векторы, которые получаются в результате максимизации линейных сверток с несколькими различными наборами коэффициентов (с несколькими векторами μ). Следовательно, при отсутствии гарантии существования линейной функции полезности в некоторых случаях следует использовать не одну, а несколько линейных сверток критериев для отыскания множества $C(Y)$.

Согласно включению (2), если надо выбрать единственный вектор, то его нахождение можно свести к назначению одного набора коэффициентов линейной свертки и последующей максимизации этой свертки на множестве Y.

В случае конечного множества Y можно предложить следующую многошаговую процедуру построения множества Парето $P(Y)$ на основе максимизации линейной свертки критериев с положительными коэффициентами. Сначала строится множество точек максимума всех линейных сверток $\sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i$ с положительными коэффициентами на множестве Y, т.е. множество, записанное в правой части (2). Обозначим его P_1 (и назовем множеством Парето 1-го уровня). Далее аналогичная задача решается на множестве $Y \setminus P_1^0$. Ее решение обозначим P_1. Из этого множества следует исключить все векторы y', для которых найдутся $y \in P_2, y \geq y'$. Полученное после такого исключения множество обозначим P_2^0 (множество Парето 2-го уровня). Затем то же самое проделывается на множестве $Y \setminus (P_1 \cup P_2)$, т.е. строится множество точек максимума P_3 и из него удаляются такие векторы y', для которых существуют $y \in P_2, y \geq y''$. Оно обозначается P_3^0 (множество Парето 3-го уровня). Поскольку на каждом шаге множество, на котором производится максимизация, будет сокращаться, после некоторого конечного числа k шагов придем к пустому множеству. В случае конечного Y множество Парето является внешне устойчивым [8], т.е. для каждого вектора за пределами множества Парето найдется парето-оптимальный вектор, который доминирует первый по отношению $\geq$. Значит, на шаге k – 1 построено множество $\bigcup_{i=1}^{k-1} P_i^0$, совпадающее с множеством Парето $P(Y)$. А то, что в результате описанной процедуры с положительными весами будет получено именно множество Парето, вытекает из совпадения эффективных и собственно эффективных точек в случае конечного Y. В итоге получаем разбиение множества Парето на конечное число подмножеств различного уровня.

Как можно использовать полученное разбиение? Самое последнее множество (т.е. P_{k-1}^0) будет «наиболее близким» к так называемому *надир вектору* y^N, определяемому равенством

$$y^N = (\min_{y \in P(Y)} y_1, \min_{y \in P(Y)} y_2, ..., \min_{y \in P(Y)} y_m).$$

Этот вектор указывает покоординатные границы снизу множества Парето, и близость к нему реализует определенную отдаленность от m «крайних» парето-оптимальных точек, характеризующихся максимальным значением по какому-то одному из критериев. Следовательно, элементы множества P_{k-1}^0 вполне могут претендовать на выбираемые, если ЛПР заинтересовано в получении вектора, компоненты которого относительно равномерно удалены от указанных «крайних» границ множества Парето.

5. Нормализация критериев и выбор коэффициентов свертки

Когда мы имеем дело с прикладными многокритериальными задачами, критерии перестают быть абстрактными числовыми функциями, они наполняются конкретным содержанием. Точнее говоря, значения этих функций начинают выражать величины, принадлежащие той ли иной количественной шкале и измеряться в тех или иных единицах измерения. Как известно, основными количественными шкалами являются: абсолютная шкала, шкала отношений, шкала разностей и шкала интервалов.

Если значения критериев, участвующих в нашей многокритериальной задаче однотипны, т.е. принадлежат одной шкале и измеряются в одних и тех же единицах, то их линейная свертка заведомо будет иметь смысл. Однако на практике подобного рода ситуации крайне редки, поскольку в таких случаях, как правило, можно избежать многокритериальности и свести рассматриваемую задачу к однокритериальной. Например, если нас интересуют m различного рода затрат, связанных с производством некоторого продукта, то нет смысла рассматривать задачу с m критериями, можно просто сложить все эти затраты вместе и решать задачу с одним суммарным критерием.

Многокритериальность возникает именно по причине «разнородности» имеющихся критериев, поскольку их не удается «свернуть» в одну формулу из-за того, что значения участвующих в задаче критериев, как правило, принадлежат различным шкалам и измеряются в различных единицах. Типичный пример подобного вида из области экономики – получить максимальную прибыль за минимальное время. Прибыль измеряется в шкале отношений, тогда как время – в шкале интервалов. Единицами прибыли могут быть рубли, доллары и пр., а единицами времени служат часы, дни, годы и т.д. Разве можно сложить вместе критерий прибыли и критерий времени? Такая сумма даже с использованием коэффициентов (т.е. свертка), является некорректной. Как же следует поступать в таких случаях?

Для решения этой проблемы обычно используют прием, который носит название «нормализации критериев», заключающийся в приведении разнотипных критериев к единой шкале. Правда, получающаяся таким образом «искусственная» шкала не имеет ничего общего с упомянутыми выше теми или иными представителями «естественных» количественных шкал. Этот прием заключается в применении к критериям таких монотонных преобразований, которые в той или иной степени «уравнивают» пределы изменения данных критериев. Наиболее распространенным преобразованием данного типа является замена исходного критерия f_i на преобразованный критерий вида:

$$\tilde{f}_i = \frac{y_i^{\max} - f_i(x)}{y_i^{\max} - y_i^{\min}},$$

где $y_i^{\max}$ и $y_i^{\min}$ – максимальное и минимальное значения функции f_i на множестве X, в предположении, разумеется, что они существуют.

Однако так как при максимизации линейной свертки с положительными коэффициентами мы никогда не выйдем за пределы множества Парето, знаменатель нормализованного критерия имеет смысл уточнить следующим образом:

$$\tilde{\tilde{f}}_i = \frac{y_i^{\max} - f_i(x)}{y_i^{\max} - y_i^{N}},$$

где y_i^N означает i - ю компоненту надир вектора, введенного в предыдущем разделе.

Значения, таким образом преобразованных критериев, лежат в пределах отрезка $[0,1]$, чем, собственно, и обеспечивается указанное выше «уравнивание». Кроме того, каждое из этих преобразований является положительным линейным (точнее говоря, аффинным), а значит, строго возрастающим. Поэтому множество Парето при таком преобразовании не изменяется, а значит, нормализацию вполне можно использовать в связке с принципом Эджворта-Парето и последующим применением линейной свертки преобразованных критериев.

Наиболее уязвимо для критики применение линейной свертки в части назначения ее коэффициентов. Обычно считается, что они характеризуют некий «вес», или «важность» соответствующего критерия, однако до сих пор еще никто не дал точного определения этих понятий, связанных с линейной сверткой, хотя и предложено множество приемов для их отыскания. Например, когда вообще нет никакой информации о приоритете того или иного критерия, коэффициенты линейной свертки предлагают выбирать одинаковыми. В случае строгого упорядочения «весов» критериев коэффициенты назначают так, чтобы они равномерно заполняли отрезок своего изменения [0,1]. Еще один вариант определения коэффициентов линейной свертки критериев основан на попарном сравнении «весов» критериев и последующем использовании метода анализа иерархий [10]. В некоторых случаях их нахождение поручают экспертам. При этом каждый эксперт вкладывает в понятие «вес критерия» свой собственный субъективный смысл, а значит ни о какой объективности метода линейной свертки говорить не приходится. В силу сказанного, этот метод причисляют лишь к списку эвристических приемов решения многокритериальных задач, когда строгое обоснование заменяется теми или иными «разумными» соображениями. Еще одним признаком эвристического подхода является невозможность четко описать класс задач, в котором применение данного метода гарантированно приводит к требуемому решению.

Если существование линейной функции полезности обеспечено, то коэффициенты должны выбираться так, чтобы имело место соотношение (1). Ясно, что на практике выполнить эту задачу нереально. Именно поэтому, как указано выше, вопрос назначения коэффициентов переводят в другую плоскость и прибегают к различного рода уловкам, использующим неопределенные понятия «вес», «важность» и т.п.

Аналогично поступают и при выделении с помощью линейной свертки того или иного парето-оптимального вектора. Однако конкретной связи между коэффициентами линейной свертки и различными парето-оптимальными векторами в руках у исследователя нет, а значит, каким бы изощренным не был способ назначения указанных коэффициентов, нет никакой гарантии, что в итоге будет найден действительно «наилучший» парето-оптимальный вектор (или их некое подмножество) в данной задаче.

6. Применение линейной свертки на завершающем этапе сужения множества Парето

Если принять принцип Эджворта-Парето, то решение исходной задачи, т.е. нахождение множества выбираемых векторов, можно трактовать как сужение множества Парето до искомого множества $C(Y)$ [7]. Такое сужение может быть обоснованным только в том случае, когда используется какая-то дополнительная информация о предпочтениях ЛПР, позволяющая «выбраковывать» непригодные парето-оптимальные векторы. По-видимому, наиболее удобной в этом плане является информация об отношении предпочтения ЛПР в виде пары парето-оптимальных векторов, из которых ЛПР выбирает один вектор и не выбирает другой. Согласно аксиоме исключения доминируемых вариантов, в таком случае второй вектор не должен попасть в число выбираемых и таким образом произойдет его «выбраковка». Если при этом допустить выполнение некоторых дополнительных «разумных» требований (аксиом) к отношению предпочтения, то вместе со вторым вектором будет удален целый ряд других парето-оптимальных векторов и, тем самым, произойдет заметное сужение множества Парето. Интересно, что полученное сужение также будет представлять собой множество Парето, но относительно нового векторного критерия, причем все элементы искомого множества $C(Y)$ заведомо сохранятся в нем.

Сказанное составляет существо *аксиоматического подхода к сужению множества Парето*, который автор начал разрабатывать еще в начале 80-х годов прошлого столетия [6]. К настоящему времени благодаря усилиям автора и его учеников этот подход приобрел завершающие очертания, и его применение открывает возможности использования определенного типа информации об отношении предпочтения ЛПР для обоснованного сужения множества Парето. Фундамент аксиоматического подхода составляют четыре аксиомы – это аксиомы исключения, согласования, продолжения и аксиома инвариантности [6]. Предполагается, что ЛПР принимает все эти аксиомы, которые характеризуют его поведение в процессе принятие решений как «разумное».

Ключевое понятие аксиоматического подхода вводится в следующем определении.

Определение. Пусть заданы два множества номеров критериев $A, B \subset I = \{1,2,...,m\}$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \cap B = \varnothing$. Будем говорить, что задан *квант информации* об отношении предпочтения с группами номеров (критериев) A и B и двумя наборами положительных параметров w_i^* для всех $i \in A$ и w_j^* для всех $j \in B$, если для любой пары векторов $y', y'' \in R^m$, для которых верно

$$y_i' - y_i'' = w_i^* > 0 \text{ при всех } i \in A,$$
$$y_j'' - y_j' = w_j^* > 0 \text{ при всех } j \in B,$$
$$y_s' = y_s'' \text{ при всех } s \in I \setminus (A \cup B)$$

имеет место соотношение $y' \succ y''$.

На геометрическом языке наличие кванта информации об отношении предпочтения ЛПР означает выполнение соотношения $y' - y'' = u \succ \mathbf{0}$ при некотором векторе u, имеющем, по крайней мере, одну строго положительную и одну строго отрицательную компоненты. Отрицательные компоненты (взятые по абсолютной величине) характеризуют максимальные пределы уступок, на которые готово пойти ЛПР по соответствующим этим компонентам критериям, чтобы получить выигрыш (прибавки) не менее значений, равным положительным компонентам вектора u по соответствующим им критериям. В целом наличие указанного кванта информации свидетельствует о готовности ЛПР идти на определенный компромисс. Чем больше абсолютные величины отрицательных компонент и чем меньше положительные компоненты, тем более гибко ЛПР ведет себя в процессе принятия решений. В таком случае можно рассчитывать на более высокую степень сужения множества Парето. На практике подобного рода квант информации выявляется в результате прямого опроса ЛПР.

Теорема 3 [6]. *В условиях выполнения аксиом* 1 − 4 *«разумного» выбора* [6] *и наличии кванта информации для любого множества выбираемых вариантов C(X) выполняются включения* $C(X) \subset P_g(X) \subset P_f(X)$*, где* $P_g(X)$ *– множество парето-оптимальных вариантов на множестве X относительно векторного критерия* g *, составленного из компонент* f_i *при всех* $i \in I \setminus B$ *и новых компонент* $g_{ij} = w_i f_j + w_j f_i$ *при всех* $i \in A,\ j \in B$.

В соответствии с теоремой 3, для того чтобы реализовать квант информации, следует сформировать новый векторный критерий g и найти множество Парето $P_g(X)$ относительно него. Оно, в общем случае, дает более точную оценку сверху для неизвестного множества выбираемых вариантов *C(X)*, чем исходное множество Парето $P_f(X)$.

Применение аксиоматического подхода не гарантирует получение искомого множества *C*(*X*) (даже если использовать не один, а сразу несколько непротиворечивых квантов информации). Как правило, удается построить лишь некоторое подмножество множества Парето, которое заведомо содержит неизвестное множество *C*(*X*). Несмотря на это, несомненным достоинством аксиоматического подхода является его детальная математическая проработка, простота и надежность используемой информации, а также полная гарантия того, что построенное с его помощью сужение множества Парето содержит все элементы неизвестного множества выбираемых вариантов *C*(*X*).

Выше отмечалось, что применение линейной свертки на практике часто никак не обосновывается, а при назначении ее коэффициентов используются приемы, которые не обязательно приводят к действительно наилучшему результату. С другой стороны, нередко удается выявить информацию об отношении предпочтения ЛПР в виде указанных квантов. Эту информацию можно (и даже нужно) использовать для решения задачи многокритериального выбора, тем более что она никак не связана с методом линейной свертки. В этой связи, для уменьшения возможных негативных последствий и неизбежных ошибок, связанных с применением линейной свертки, предлагается комбинированный подход. Рекомендуется сначала максимально сузить множество Парето, используя аксиоматический подход на основе имеющегося в распоряжении исследователя набора информации об отношении предпочтения ЛПР, а уже затем определиться с окончательным выбором с помощью метода линейной свертки для исходного набора критериев, но на новом, более узком множестве Парето. Чем больше удастся сузить множество Парето за счет квантов, тем меньше могут оказаться возможные ошибки. Нужно лишь научиться извлекать необходимую информацию об отношении предпочтения ЛПР. В этом смысле процесс сужения в значительной степени зависит от опыта, умения и знаний исследователя, его невозможно формализовать.

В заключение добавим, что корректность использования подобного комбинированного подхода подтверждается тем, что в рамках выполнения аксиом «разумного» выбора, лежащих в основе аксиоматического подхода, отношение предпочтения ЛПР является конусным, а значит, по крайней мере, необходимое условие существования линейной функции полезности выполнено.

Автор выражает искреннюю благодарность А.Б. Петровскому за ряд ценных замечаний, способствовавших улучшению качества рукописи.

Литература

1. Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т. Выбор вариантов. Основы теории. М.: Наука, 1990, 240 с.
2. Алескеров Ф.Т. Пороговая полезность, выбор и бинарные отношения // Автоматика и телемеханика, 2003, № 3, С. 8-27.
3. Вилкас Э.Й. Оптимальность в играх и решениях. М.: Наука, 1990, 256 с.
4. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970, 708 с.
5. Ногин В.Д. Логическое обоснование принципа Эджворта-Парето // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002, т. 42, № 7, С. 950-956.
6. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход (2-е изд., испр. и доп.). – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005, 176 с.
7. Ногин В.Д. Проблема сужения множества Парето: подходы к решению // Искусственный интеллект и принятие решений, 2008, № 1, с. 98-112.

8. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач (2-е изд., испр. и доп.). М.:Наука, 2007, 254 с.
9. Петровский А.Б. Теория принятия решений. М.: Изд. центр «Академия», 2009,400 с.
10. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Советское радио, 1993, 278 с.
11. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978, 352 с.

Ногин Владимир Дмитриевич. Профессор кафедры теории управления факультета прикладной математики - процессов управления (ПМ-ПУ) Санкт-Петербургского государственного университета. Окончил Ленинградский государственный университет в 1971 году. Доктор физико-математических наук. Действительный член Международной академии наук высшей школы. Автор свыше 130 печатных трудов, среди которых две монографии и ряд учебных пособий. Область научных интересов: принятие решений при многих критериях, многокритериальная оптимизация.