В.В. Подиновский, А.П. Нелюбин

Потенциальная недоминируемость в задачах выбора при неточной информации о предпочтениях

Аннотация. Исследуются задачи выбора наилучшего варианта решения, в которых предпочтения лица, принимающего решение, моделируются при помощи семейства частичных квазипорядков. Выделяется множество вариантов, из которого надлежит сделать выбор, изучаются свойства вариантов из этого множества и рассматриваются подходы к его построению.

Ключевые слова: задачи принятия решений, частичные отношения предпочтения, недоминируемость, потенциальная оптимальность, теория важности критериев.

Введение

Наиболее распространенными задачами принятия индивидуальных решений являются задачи выбора одного наилучшего варианта (альтернативы, плана, стратегии) из заданного (сформированного) множества вариантов. При анализе таких задач с использованием математических методов для моделирования предпочтений лица принимающего решение (ЛПР) широко используются бинарные отношения предпочтения [1, 2]. Если предпочтения описываются одним таким отношением и оно является частичным (т.е. не всякие два варианта сравнимы по этому отношению), то базовым является понятие недоминируемости [3].

Если предпочтения моделируются семейством бинарных отношений (т.е. заранее неизвестно, какое именно из входящих в него отношений описывает предпочтения ЛПР), и эти отношения являются полными (т.е. всякие два варианта сравнимы по этому отношению), то можно использовать понятие потенциальной оптимальности [4-8]. Если же эти отношения являются лишь частичными, то они тем или иным образом «сворачиваются» в одно отношение предпочтения, и уже для него используется понятие недоминируемости [6, 9]. Однако такой подход является общим в том смысле, что не учитывает специфики постановки задачи принятия решения о выборе только одного наилучшего варианта. Оказывается, что можно ввести обобщение понятия недоминируемости, которое учитывает эту специфику и позволяет сузить множество выбора.

В данной статье вводится и изучается понятие потенциальной недоминируемости для случая, когда отношения нестрогого предпочтения, входящие в указанное выше семейство, являются частичными квазипорядками. Теоретические положения иллюстрируются примерами задач, решаемых на основе теории важности критериев [10]. Основные результаты статьи были аннотированы в докладе [11].

1. Недоминируемые и потенциально оптимальные варианты

Для удобства изложения вначале приведем необходимые сведения о недоминируемых вариантах [3]. Пусть X – непустое множество вариантов и R – заданное на нем отношение нестрогого предпочтения: $x'Rx''$ означает, что вариант x' не менее предпочтителен, чем x''. Предполагается, что множество X содержит не менее двух вариантов, а отношение R является квазипорядком, или предпорядком (оно рефлексивно и транзитивно). Если для любых вариантов x' и x'' верно $x'Rx''$ или $x''Rx'$, то квазипорядок R называется *полным*, в противном случае – *частичным.*

Отношение R порождает отношение безразличия I и отношение (строгого) предпочтения P: если верно $x'Rx''$ и $x''Rx'$, то справедливо $x'Ix''$ (варианты x' и x'' безразличны, или одинаковы по предпочтительности); если же верно $x'Rx''$, но $x''Rx'$ неверно, то справедливо $x'Px''$ (вариант x' предпочтительнее варианта x''). Для квазипорядка R отношение I есть эквивалентность (оно симметрично, рефлексивно и транзитивно), а отношение P – строгий частичный порядок (оно иррефлексивно и транзитивно).

Вариант x^* называется *оптимальным*, или *наибольшим* (*по* R), если для любого варианта x верно x^*Rx. В частности, оптимальный вариант существует, если множество X конечно, а квазипорядок R является полным. Однако в задачах принятия решений отношение R часто оказывается частичным и оптимальные варианты не существуют. Поэтому в анализе решений широко применяется понятие недоминируемости.

Вариант x^* называется *недоминируемым,* или *максимальным* (*по* P), если не существует варианта x, для которого верно xPx^*. В противном случае этот вариант называется *доминируемым* (*по* P). Обозначим через $X(P)$ множество недоминируемых вариантов.

Множество $X(P)$ называется *внешне устойчивым*, если для любого варианта $x\notin X(P)$ найдется вариант $x^*\in X(P)$ такой, что выполнено x^*Px. Если множество X конечно, то множество $X(P)$ не пусто и, более того, внешне устойчиво. Именно из внешне устойчивого множества $X(P)$ надлежит выбрать наилучший вариант.

Говорят, что определенный на X квазипорядок R' (*непротиворечиво*) *продолжает* квазипорядок R, или R является *подотношением* R',если выполнено $R \subset R'$ (откуда следует, что $I \subseteq I'$) и $P \subseteq P'$. Множество недоминируемых по P' вариантов $X(P')$, вообще говоря, уже множества $X(P)$, т.е. справедливо вложение $X(P') \subseteq X(P)$. Практически это означает, что получение дополнительной информации о предпочтениях позволяет сузить множество выбора наилучшего варианта.

Теперь приведем необходимые сведения о потенциально оптимальных вариантах [4, 5, 12]. Обозначим через $\Re$ класс (непустое множество) полных квазипорядков, определенных на X и продолжающих частичный квазипорядок R_0. (В вырожденном случае квазипорядок R_0 является отношением равенства.) Вариант x^* называется *потенциально оптимальным для класса* $\Re$ если в этом классе существует квазипорядок R, для которого x^* является оптимальным. Пусть $X(\Re)$ – множество потенциально оптимальных для класса $\Re$ вариантов. Всякий потенциально оптимальный для класса $\Re$ вариант является недоминируемым по P_0, т.е. $X(\Re) \subseteq X(P_0)$.

Множество потенциально оптимальных для класса $\Re$ вариантов $X(\Re)$ называется *покрывающим* (*множество* X), если для любого варианта $x\notin X(\Re)$ и для любого квазипорядка $R\in\Re$ найдется вариант $x^*\in X(R)$ такой, что верно x^*Px. Если множество X конечно, то множество потенциально оптимальных вариантов $X(\Re)$ для любого класса $\Re$ является покрывающим.

2. Потенциально недоминируемые варианты

Теперь будем полагать, что задано семейство $\Re$ частичных квазипорядков, определенных на множестве вариантов X и продолжающих частичный квазипорядок R_0 (вырожденный случай, когда этот квазипорядок есть отношение равенства, не исключается). Множество строгих частичных порядков P, порождаемых квазипорядками R из $\Re$, обозначим через $\wp$.

На основе множества $\wp$ строится отношение предпочтения $P^w(\wp)$ – отношение слабого доминирования (слабое отношение Парето, или отношение Слейтера), следующим образом:

$$x'P^w(\wp)x'' \Leftrightarrow x'Px''$$

$$\text{справедливо для каждого } P\in\wp. \qquad (1)$$

Пусть $X^w(\wp)$ – множество вариантов, недоминируемых по $P^w(\wp)$. К сожалению, отношение $P^w(\wp)$ обычно бывает довольно слабым (содержит мало пар вариантов), и поэтому множество $X^w(\wp)$ оказывается весьма широким.

Пример 1. Пусть $X = \{x^1, x^2, x^3\}$, $\wp = \{P^1, P^2\}$, $P^1 = \{(x^3, x^1), (x^3, x^2)\}$, $P^2 = \{(x^2, x^1)\}$. Здесь отношение $P^w(\wp)$ пусто и поэтому $X^w(\wp) = X$.

Рассмотрим более внимательно пример 1. Если предпочтения ЛПР описываются отношением P^1, то не следует выбирать доминируемые варианты x^1 и x^2. А если предпочтения ЛПР описываются отношением P^2, то не следует выбирать доминируемый вариант x^1. Таким образом, в любом случае вариант x^1 будет удален. Поэтому можно полагать, что если известно лишь множество $\wp = \{P^1, P^2\}$, то выбор наилучшего варианта можно ограничить множеством $\{x^2, x^3\}$. Эти соображения являются мотивирующими для введения следующего определения.

Определение 1. Вариант x^0 называется *заведомо доминируемым* (*для* $\wp$), если для каждого $P \in \wp$ найдется вариант x такой, что верно xPx^0.

В соответствии с определением 1 для варианта, который не является потенциально доминируемым, вводится следующее определение, которое, очевидно, имеет и самостоятельное логическое обоснование.

Определение 2. Вариант x^* называется *потенциально недоминируемым* (*для* $\wp$) если найдется такое отношение $P^* \in \wp$, что x^* является недоминируемым (по P^*), т.е. xP^*x^* неверно для любого $x \in X$.

Таким образом, заведомо доминируемый вариант ни по одному P из $\wp$ не является недоминируемым. А потенциально недоминируемый вариант является недоминируемым, по крайней мере, по одному $P \in \wp$.

Если все квазипорядки из $\Re$ являются полными, то потенциально недоминируемый вариант x^* – это вариант, который является оптимальным, по крайней мере, для одного R из $\Re$, т.е. x^*Rx верно для любого $x \in X$. Следовательно, понятие потенциальной недоминируемости является обобщением понятия потенциальной оптимальности на случай частичных квазипорядков.

Примечание 1. В определениях 1 и 2 семейство строгих частичных порядков $\wp$ формально можно считать исходным в том смысле, что оно может задаваться непосредственно, а не порождаться квазипорядками из $\Re$. (Более того, можно рассматривать и другие семейства отношений, в частности, ациклические.) Это соответствует случаю, когда в модели предпочтений вместо отношений безразличия и несравнимости рассматривается их объединение – отношение неразличимости. Такой отказ от рассмотрения отношения безразличия обедняет модель предпочтений и приводит, вообще говоря, к увеличению неопределенности выбора. Например, если все выделенные потенциально недоминируемые варианты неразличимы, то неясно, какой из них выбрать в качестве наилучшего. Этот вопрос не возникает, если все эти варианты безразличны: наилучшим можно считать любой из них. Более того, существуют виды информации о предпочтениях (например, сообщения о равенстве критериев по важности), которые вводят именно отношения безразличия. Наконец, использование отношения безразличия повышает эффективность итеративных (многошаговых) процедур решению задач выбора за счет возможного уменьшения потребного числа шагов. С другой стороны, при использовании отношения неразличимости взаимосвязь между потенциально недоминируемыми и потенциально оптимальными вариантами теряется.

Теорема 1. *Всякий потенциально недоминируемый для* $\wp$ *вариант является недоминируемым по* P_0.

Доказательства теорем вынесены в приложение.

Пусть $X(\wp)$ – совокупность потенциально недоминируемых вариантов. Согласно определению 2 справедливо равенство:

$$X(\wp) = \bigcup_{P \in \wp} X(P). \tag{2}$$

Равенство (2) указывает возможные пути проверки вариантов на потенциальную недоминируемость и построения множества $X(\wp)$.

Определение 3. Множество $X(\wp)$ называется *покрывающим* (*множество* X), если для любого варианта $x \notin X(\wp)$ и любого квазипорядка $P \in \wp$ найдется вариант $x^* \in X(\wp)$ такой, что выполнено x^*Px.

Теорема 2. *Если множество X конечно, то множество $X(\wp)$ является покрывающим.*

Таким образом, именно из покрывающего множества $X(\wp)$ надлежит выбрать наилучший вариант.

Пусть некоторые (а возможно и все) квазипорядки $R \in \Re$ продолжены до квазипорядков R' (не обязательно полных) и эти квазипорядки R' составляют семейство $\Re'$. Иначе говоря, каждый $R' \in \Re'$ есть продолжение некоторого $R \in \Re$ или входит в $\Re$.

Теорема 3. *Справедливо вложение* $X(\wp') \subseteq X(\wp)$.

Таким образом, уточнение информации о предпочтениях сужает, вообще говоря, множество выбора наилучшего варианта.

Теорема 4. *Справедливо вложение* $X^w(\wp) \supseteq X(\wp)$.

Пример 1 показывает, что вложение в теореме 4 может быть строгим. Это означает, что использование потенциального недоминирования позволяет, вообще говоря, добиться большего сужения множества выбора, чем использование слабого доминирования.

Наряду с отношением слабого доминирования $P^w(\wp)$, на множестве X вводится отношение предпочтения $P^s(\Re)$ – отношение сильного доминирования, или (сильное) отношение Парето следующим образом:

$$x'P^s(\Re)x'' \Leftrightarrow x'Rx'' \text{ для каждого } R\in\Re, \text{ причем } x'Px'' \text{ хотя бы для одного } R\in\Re. \qquad (3)$$

Квазипорядок $R^s(\Re)$ вводится согласно определению (3), если в нем оставить только требование выполнения $x'Rx''$ для каждого $R\in\Re$. Отметим, что $P^w(\wp) \subseteq P^s(\Re)$, и в некоторых случаях это вложение выполняется как равенство [6, 9]. Поэтому справедливо вложение $X^w(\wp) \supseteq X^s(\Re)$, которое может быть строгим.

Для множеств $X^s(\Re)$ и $X(\wp)$ может выполняться и $X^s(\Re) \supseteq X(\wp)$, и $X^s(\Re) \subseteq X(\wp)$. Так, в примере 1 имеем $P^s(\Re) = \varnothing$ и $X^s(\Re) = X \supset X(\wp)$, а в примере 2 (см. ниже) $X^s(\Re) = \{x^1\} \subset X(\wp)$. Однако справедлива

Теорема 5. *Пусть множество* $X^s(\Re)$ *внешне устойчиво (по* $P^s(\Re)$*). Если* $x^j\in X^w(\wp) \setminus X^s(\Re)$*, то существуют* $R\in\Re$ *и* $x^t\in X^s(\Re)$ *такие, что верно* x^tIx^j.

Напомним, что для внешней устойчивости множества $X^s(\Re)$ достаточно конечности множества X. Теорему 5 иллюстрирует

Пример 2. Пусть $X = \{x^1, x^2, x^3\}$, $\Re = \{R^1, R^2\}$, для R^1 верно $x^1P^1x^2$ и $x^1P^1x^3$, а для R^2 соответственно $x^1P^2x^2$, $x^1I^2x^3$ и $x^3P^2x^2$. Здесь $P^w(\wp) = \{(x^1, x^2)\}$, $P^s(\Re) = \{(x^1, x^2), (x^1, x^3)\}$, так что $X^s(\Re) = \{x^1\}$, $X^w(\wp) = \{x^1, x^3\}$ и верно соотношение $x^1I^2x^3$. Заметим, что $X(\wp) = \{x^1, x^3\}$.

Может показаться целесообразным ввести и такое определение: вариант $x^*\in X$ называется *заведомо сильно доминируемым*, если для всякого $R\in\Re$ найдется вариант $x\in X$ такой, что верно xRx^*, и хотя бы для одного $R\in\Re$ существует вариант $x\in X$, для которого верно xPx^*. Однако следующий пример показывает, что использование последнего определения может привести к явно неверным рекомендациям.

Пример 3. Пусть $X = \{x^1, x^2, x^3\}$, $\Re = \{R^1, R^2\}$. Для каждого $R\in\Re$ выполняется x^1Ix^2, для R^1 верно $x^3P^1x^1$ и $x^3P^1x^2$, а для R^2 верно $x^1P^2x^3$ и $x^2P^2x^3$. Здесь варианты x^1 и x^2 заведомо сильно доминируемы. Но отбраковывать их неправильно: в случае, если реальные предпочтения описываются отношением R^2, итоговый выбор должен осуществляться именно среди вариантов x^1 и x^2.

3. Пример с частичной качественной важностью

Вначале приведем необходимые сведения из теории важности критериев (ТВК) [10, 13]. В ней используется следующая *математическая модель* ситуации многокритериального выбора в условиях определенности:

$$< X, f, Z, R^{\aleph} >,$$

где X – множество вариантов, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ – векторный критерий ($m \geq 2$), Z – область его значений, $R^{\aleph}$ – отношение нестрогого предпочтения ЛПР.

Под *критерием* f_i понимается функция с областью определения X и областью значений Z_i. Далее полагается, что все критерии однородны. Это означает, что критерии имеют общую шкалу (которая может быть всего лишь порядковой) и, в частности, у них общая область значений (множество градаций): $Z_1 = \ldots = Z_m = Z_0 = \{1, \ldots, q\}$, где $q \geq 2$.

Каждый вариант x характеризуется m числами – значениями $f_i(x)$ всех критериев, образующими *векторную,* или *критериальную оценку* этого варианта $y = f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. Область значений векторного критерия, или *множество* (*всех*) *векторных оценок* есть $Z = Z_0^m$. Предполагается, что векторная оценка полностью характеризует вариант, так что сравнение вариантов по предпочтительности сводится к сопоставлению их векторных оценок. В частности, наилучшим является тот вариант, векторная оценка которого является наиболее предпочтительной среди достижимых векторных оценок $Y = f(X) = \{y = f(x) \mid x\in X\}$.

Предпочтения ЛПР на множестве Z моделируются при помощи *отношения нестрогого предпочтения* – частичного квазипорядка $R^{\aleph}$. Отношение $R^{\aleph}$ заранее не известно и строится (восстанавливается полностью или только частично) на основе полученной информации о предпочтениях ЛПР и принятых допущениях о структуре его предпочтений.

Будем полагать, что критерии желательно максимизировать, так что на множестве векторных оценок Z можно ввести отношение Парето – строгий частичный порядок $P^{\varnothing}$, который вложен в $P^{\aleph}$ и определяется так:

$$yP^{\varnothing}z \Leftrightarrow \ y_i \geq z_i \, , i = 1, ..., m, y \neq z.$$

Далее используется также квазипорядок $R^{\varnothing}$, являющийся объединением $P^{\varnothing}$ и отношения равенства m-мерных векторов из Z.

Пусть R^{Π} – квазипорядок, построенный на Z с использованием накопленной информации Π и являющийся подотношением квазипорядка $R^{\aleph}$. Если первоначально такой информации нет ($\Pi = \varnothing$), то в роли R^{Π} выступает $R^{\varnothing}$. Возможное продолжение отношения R^{Π} в предположении, что может быть получена некоторая дополнительная информация о предпочтениях или принято дополнительное допущение о структуре предпочтений, моделируется при помощи семейства (множества) $\mathfrak{R}^Z$ частичных квазипорядков: каждый квазипорядок R^*из этого семейства продолжает R^{Π} и является подотношением $R^{\aleph}$. Эти квазипорядки индуцируют на множестве вариантов соответствующие квазипорядки R_* и R_{Π}:

$$x' \, R_* x'' \Leftrightarrow f(x') \, R^* f(x''), \ x' R_{\Pi} x'' \Leftrightarrow f(x') R^{\Pi} f(x'').$$

Таким образом, роль квазипорядка R_0 на множестве вариантов X (раздел 2) играет квазипорядок R_{Π}, а роль множества $\mathfrak{R}$ – множество $\mathfrak{R}_X$ квазипорядков R_*.

Далее будем считать, что шкала критериев является *порядковой*, т.е. номера $k \in Z_0$ градаций шкалы отражают лишь упорядочение их по предпочтительности: $k = 1$ – наихудшая оценка, а $k = q$ – наилучшая. Обозначим через y^{ij} векторную оценку, полученную из векторной оценки $y = (y_1, ..., y_m)$ перестановкой ее компонент y_i и y_j. В основе теории качественной (нечисловой) важности лежат следующие определения. Критерии f_i и f_j *равноважны,* или *одинаково важны* (такое сообщение обозначается $i \sim j$ или $j \sim i$), когда для ЛПР любые две векторные оценки y и y^{ij} одинаковы по предпочтительности. Критерий f_i *важнее* критерия f_j (такое сообщение обозначается $i \succ j$), когда любая векторная оценка $y,$ в которой $y_i > y_j$, предпочтительнее для ЛПР, чем y^{ij}.

Качественная информация о важности критериев Ω состоит из совокупности сообщений вида $i \sim j$ и $i \succ j$. Согласно данным выше определениям сообщение $i \sim j$ задает на множестве Z отношение безразличия $I^{i \sim j}$, а сообщение $i \succ j$ – отношение предпочтения $P^{i \succ j}$, определяемые следующим образом:

$$yI^{i \sim j}z \Leftrightarrow z = y^{ij}; \ yP^{i \succ j}z \Leftrightarrow (z = y^{ij}, y_i > y_j).$$

Поскольку считается, что эти отношения являются подотношениями квазипорядка $R^{\aleph}$, то отношение нестрогого предпочтения (квазипорядок) R^{Ω}, порождаемое на Z качественной информацией о важности критериев $\Omega,$ определяется как наименьший квазипорядок, содержащий отношение $R^{\varnothing}$ и отношения R^{ω} для всех $\omega \in \Omega$ (здесь $R^{\omega} = I^{i \approx j}$ при $\omega = i \sim j$ и $R^{\omega} = P^{i \succ j}$ при $\omega = i \succ j$):

$$R^{\Omega} = \mathrm{TrCl} \, [R^{\varnothing} \bigcup (\bigcup\nolimits_{\omega \in \Omega} R^{\omega})] \, , \qquad (4)$$

где TrCl – символ операции транзитивного замыкания бинарного отношения.

Согласно определению (4) соотношение $yR^{\Omega}z$ верно тогда и только тогда, когда существует цепочка вида

$$yR^1u^1, \ u^1R^2u^2 \, , ..., \ u^{r-1}R^rz, \qquad (5)$$

в которой u^j – векторные оценки, а R^j суть $R^{\varnothing}$ или же R^{ω} для ω из Ω.

Положительные в сумме равные единице числа α_1, …, α_m называются *коэффициентами важности* критериев, согласованными с информацией Ω, если они удовлетворяют условиям:

$$i \sim j \in \Omega \Rightarrow \alpha_i = \alpha_j, \ \ i \succ j \in \Omega \Rightarrow \alpha_i > \alpha_j. \qquad (6)$$

Существование коэффициентов важности, т.е. совместность системы равенств и неравенств (6), есть показатель *непротиворечивости* информации Ω. Далее полагается, что Ω непротиворечива. Поэтому если в цепочке (6) хотя бы раз встречается P^{ω} или $P^{\varnothing}$, то верно $yP^{\Omega}z$; в противном случае имеет место соотношение $yI^{\Omega}z$.

Информация Ω называется *полной*, если она позволяет упорядочить (ранжировать) по важности все критерии (так что для любых двух критериев f_i и f_j верно $i \sim j$, $i \succ j$ или $j \succ i$). Такую информацию будем обозначать Ω*. Коэффициенты важности, согласованные с информацией Ω*, называются *порядковыми*, или *ординальными*.

Далее для векторов из Re^m ($m > 1$) будем использовать такие обозначения:

$$a \geqq b \Leftrightarrow a_i \geq b_i,\ i = 1,\dots,m; \quad a \geq b \Leftrightarrow a \geqq b,\ a \neq b; \quad a > b \Leftrightarrow a_i > b_i,\ i = 1,\dots,m,$$

где $a_{\downarrow} = (a_{[1]}, \dots, a_{[m]})$ – вектор, полученный из вектора a упорядочением его компонент по невозрастанию: $a_{[1]} \geq a_{[2]} \geq \dots \geq a_{[m]}$.

Для информации Ω* отношение $R^{\Omega*}$ можно задать аналитически. Пусть

$$\alpha_i^k(y) = \begin{cases} \alpha_i,\ y_i \geq k, \\ 0,\ y_i < k; \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \ \ k = 1, \dots, q; \quad (7)$$

$$\alpha^k(y) = (\alpha_1^k(y), \dots, \alpha_m^k(y)).$$

Отношение $R^{\Omega*}$ определяется следующим образом [13]:

$$yR^{\Omega*}z \Leftrightarrow \alpha_{\downarrow}^k(y) \geqq \alpha_{\downarrow}^k(z),\ k = 2,\dots,q. \quad (8)$$

Если в (8) все нестрогие векторные неравенства $\geqq$ выполняются как равенства, то $yI^{\Omega*}z$. А если хотя бы одно $\geqq$ есть $\geq$, то $yP^{\Omega*}z$.

Перейдем к рассмотрению примера.

Пример 4. Пусть в трехкритериальной задаче ($m = 3$) критерии имеют шкалу с тремя градациями: $Z_0 = \{1, 2, 3\}$, т.е. $q = 3$. Множество вариантов X включает три варианта x^1, x^2 и x^3 с такими векторными оценками:

$$y^1 = f(x^1) = (2, 1, 3),\ y^2 = f(x^2) = (3, 2, 1),$$
$$y^3 = f(x^3) = (1, 2, 3).$$

Полученная качественная информация о важности критериев состоит из единственного сообщения о том, что второй критерий важнее третьего: $\Omega = \{2 \succ 3\}$, поэтому $\Pi = \Omega$.

Нетрудно убедиться в том, что любые два варианта несравнимы по отношению P_Ω (т.е. их векторные оценки нельзя связать цепочкой вида (5)) если учесть, что в искомых цепочках не может участвовать отношение Парето $P^{\varnothing}$, ибо суммы компонент каждой из векторных оценок являются равными. Следовательно, квазипорядок $R_\Omega = R_\Pi$ есть отношение равенства.

Проверим имеющиеся варианты на потенциальную недоминируемость. В качестве исходного отношения R_0 на множестве X будем рассматривать отношение R_Π.

За счет получения дополнительной качественной информации о важности критериев можно получить одну из пяти ранжировок – упорядочений всех критериев по важности, согласованных с информацией $\Omega = \{2 \succ 3\}$:

<1, 2, 3>, <1-2, 3>, <2, 1, 3>, <2, 1-3>, <2, 3, 1>.

Поэтому в качестве семейства $\Re^Z$ следует рассматривать множество из пяти квазипорядков $R^1, \dots, R^5$, где $R^1 = R^{\Omega*^1}$, …, $R^5 = R^{\Omega*^5}$ и

$\Omega*^1 = \{1 \succ 2,\ 1 \succ 3,\ 2 \succ 3\}$, $\Omega*^2 = \{1 \sim 2,\ 1 \succ 3,\ 2 \succ 3\}$, $\Omega*^3 = \{2 \succ 1,\ 2 \succ 3,\ 1 \succ 3\}$,

$\Omega*^4 = \{2 \succ 1,\ 2 \succ 3,\ 1 \sim 3\}$, $\Omega*^5 = \{2 \succ 3,\ 2 \succ 1,\ 3 \succ 1\}$.

Эти квазипорядки можно построить при помощи решающего правила (8).

Сравним, например, векторные оценки $y^1 = (2, 1, 3)$ и $y^3 = (1, 2, 3)$ вариантов x^1 и x^3 при информации $\Omega*^1$. Для этой информации, согласно (6), $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$. Согласно (7) имеем:

$k = 3$: $\alpha_1^3(y^1) = 0$, $\alpha_2^3(y^1) = 0$, $\alpha_3^3(y^1) = \alpha_3$;

$\alpha^3(y^1) = (0, 0, \alpha_3)$; $\alpha_{\downarrow}^3(y^1) = (\alpha_3, 0, 0)$;

$\alpha_1^3(y^3) = 0$, $\alpha_2^3(y^3) = 0$, $\alpha_3^3(y^3) = \alpha_3$;

$\alpha^3(y^3) = (0, 0, \alpha_3)$; $\alpha_{\downarrow}^3(y^3) = (\alpha_3, 0, 0)$;

$k = 2$: $\alpha_1^2(y^1) = \alpha_1$, $\alpha_2^2(y^1) = 0$, $\alpha_3^2(y^1) = \alpha_3$;

$\alpha^2(y^1) = (\alpha_1, 0, \alpha_3)$; $\alpha_{\downarrow}^2(y^1) = (\alpha_1, \alpha_3, 0)$;

$\alpha_1^2(y^3) = 0$, $\alpha_2^2(y^3) = \alpha_2$, $\alpha_3^2(y^3) = \alpha_3$;

$\alpha^2(y^3) = (0, \alpha_2, \alpha_3)$; $\alpha_{\downarrow}^2(y^3) = (\alpha_2, \alpha_3, 0)$.

Поскольку справедливы соотношения $\alpha_{\downarrow}^3(y^1) = \alpha_{\downarrow}^3(y^3)$ и $\alpha_{\downarrow}^2(y^1) \geq \alpha_{\downarrow}^2(y^3)$, то в соответствии с (8), верно $y^1P^1y^3$. Следовательно, справедливо $x^1P_1x^3$.

Сравним еще векторные оценки $y^1 = (2, 1, 3)$ и $y^2 = (3, 2, 1)$ вариантов x^1 и x^2 при информации $\Omega*^5$. Для этой информации, согласно (6), $\alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_1$. В соответствии с (7) имеем:

$k = 3$: $\alpha_1^3(y^1) = 0$, $\alpha_2^3(y^1) = 0$, $\alpha_3^3(y^1) = \alpha_3$;

$\alpha^3(y^1) = (0, 0, \alpha_3)$; $\alpha_{\downarrow}^3(y^1) = (\alpha_3, 0, 0)$;

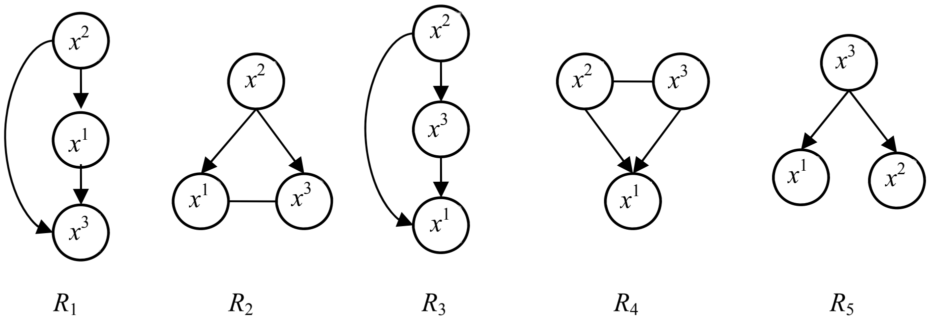

Рис. 1. Графы квазипорядков R_1, …, R_5 (без петель)

$$\alpha_1^3(y^2)=\alpha_1,\ \alpha_2^3(y^2)=0,\ \alpha_3^3(y^2)=0;$$
$$\alpha^3(y^2)=(\alpha_1, 0, 0);\ \alpha_{\downarrow}^3(y^2)=(\alpha_1,0,0);$$
$$k=2:\ \alpha_1^2(y^1)=\alpha_1,\ \alpha_2^2(y^1)=0,\ \alpha_3^2(y^1)=\alpha_3;$$
$$\alpha^2(y^1)=(\alpha_1, 0, \alpha_3);\ \alpha_{\downarrow}^2(y^1)=(\alpha_3,\alpha_1,0);$$
$$\alpha_1^2(y^2)=\alpha_1,\ \alpha_2^2(y^2)=\alpha_2,\ \alpha_3^2(y^2)=0;$$
$$\alpha^2(y^2)=(\alpha_1, \alpha_2, 0);\ \alpha_{\downarrow}^2(y^3)=(\alpha_2,\alpha_1,0).$$

Поскольку $\alpha_{\downarrow}^3(y^1)\geq\alpha_{\downarrow}^3(y^2)$, но $\alpha_{\downarrow}^2(y^1)\leq\alpha_{\downarrow}^2(y^2)$, то векторные оценки y^1 и y^2 несравнимы по R^5, так что варианты x^1 и x^2 несравнимы по R_5.

Действуя и дальше аналогичным образом, можно построить квазипорядки R_1, …, R_5. Их графы представлены на Рис. 1, который показывает, что потенциально недоминируемыми являются варианты x^2 и x^3, а вариант x^1 заведомо доминируем.

Отметим, что здесь отношения P_w и P_s, порождаемые на X отношениями P^w и P^s, пусты, так что $X(P^w) = X(P^s) = X$.

Примечание 2. В условиях рассмотренного примера 4 после удаления заведомо доминируемого варианта x^1 у оставшихся двух вариантов x^2 и x^3 вторые компоненты векторных оценок, т.е. значения критерия f_2, равны. Поэтому остается выяснить лишь, какая из трех возможностей реализуется: $1\succ3$, $1\sim3$ или $3\succ1$, т.е. сравнить по важности только первый и третий критерии. Рис. 1 показывает, что если верно $1\succ3$ или $1\sim3$, то в качестве оптимального можно выбрать вариант x^2, а если верно $3\succ1$, то оптимальным следует считать вариант x^3.

4. Задачи с параметрическим заданием класса $\mathfrak{R}$

Рассмотрим важный для приложений случай, когда семейство $\mathfrak{R}$ частичных квазипорядков представляет собой параметрическое семейство – непустое множество

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathrm{A}) = \{R(\alpha) \mid \alpha\in \mathrm{A}\}, \qquad (9)$$

элементами которого являются частичные квазипорядки $R(\alpha)$, определенные на X и продолжающие частичный квазипорядок R_0. Множество А может состоять, например, из m-мерных векторов и определяться системой равенств и неравенств. В рассматриваемом случае определения 1 и 2 можно представить в следующем виде.

Определение 1′. Вариант x^0 называется заведомо доминируемым (для $\wp(\mathrm{A})$) если для каждого $\alpha\in\mathrm{A}$ найдется вариант x такой, что верно $xP(\alpha)x^0$.

Определение 2′. Вариант x^* называется потенциально недоминируемым (для $\wp(\mathrm{A})$) если найдется такое значение $\alpha\in\mathrm{A}$, что x^* является недоминируемым по $P(\alpha)$.

Далее для сокращения записи будут использоваться следующие обозначения:

$X(\alpha) = X(P(\alpha))$ – множество недоминируемых по $P(\alpha)$ вариантов;

$X(\mathrm{A}) = X(\wp(\mathrm{A}))$ – множество потенциально недоминируемых вариантов;

$P^w(\mathrm{A}) = P^w(\wp(\mathrm{A}))$ – отношение слабого доминирования;

$X^w(\mathrm{A}) = X^w(\wp(\mathrm{A}))$ – множество вариантов, недоминируемых по $P^w(\mathrm{A})$;

$P^s(\mathrm{A}) = P^s(\mathfrak{R}(\mathrm{A}))$ – отношение сильного доминирования;

$R^s(\mathrm{A}) = R^s(\Re(\mathrm{A}))$ – квазипорядок, порождающий отношение $P^s(\mathrm{A})$;

$X^s(\mathrm{A}) = X^s(\Re(\mathrm{A}))$ – множество вариантов, недоминируемых по $P^s(\mathrm{A})$.

Множество А в общем случае содержит бесконечное число значений параметра α. Следовательно, и соответствующее ему семейство $\Re(\mathrm{A})$, представленное в виде (9), может содержать бесконечное число квазипорядков. Определения 1′ и 2′ подразумевают учет всех квазипорядков, составляющих $\Re(\mathrm{A})$. Поэтому непосредственно использовать формулу (2), которую здесь можно переписать в виде

$$X(\mathrm{A}) = \bigcup\nolimits_{\alpha\in\mathrm{A}} X(\alpha), \qquad (10)$$

для построения множества потенциально недоминируемых вариантов $X(\mathrm{A})$ или проверки выделенного варианта на потенциальную недоминируемость, не всегда возможно.

Далее ограничимся рассмотрением случая, когда множество вариантов конечно:

$$X = \{x^1, \ldots, x^n\}. \qquad (11)$$

В этом случае область А можно разбить на конечное число ρ подобластей A^r так, чтобы на множестве X был определен квазипорядок $R^r = R(\alpha)$ для любого $\alpha\in\mathrm{A}^r$. Множество $X(\mathrm{A})$ потенциально недоминируемых вариантов можно сформировать согласно формуле (2), которую можно здесь переписать в виде

$$X(\mathrm{A}) = \bigcup\nolimits_{r=1}^{\rho} X(P^r), \qquad (12)$$

найдя недоминируемые по P^r варианты для каждой построенной подобласти A^r: совокупность таких вариантов будет равна $X(\mathrm{A})$. Однако в общем случае задача построения указанного разбиения весьма сложна, а полученные подобласти могут иметь сложную форму (они даже могут быть несвязными).

Другой подход состоит в том, чтобы поочередно проверять варианты на потенциальную недоминируемость. Пусть x^j – проверяемый вариант. Решающее правило, задающее отношения $P(\alpha)$, для каждого варианта x^t, $t \neq j$, в области А определяет подобласть $\mathrm{A}^{tj} \subseteq \mathrm{A}$, такую, что для каждого $\alpha\in\mathrm{A}^{tj}$ верно $x^tP(\alpha)x^j$.

Теорема 6. *Вариант x^j является заведомо доминируемым (потенциально недоминируемым), если и только если*

$$\bigcup_{t\neq j} \mathrm{A}^{tj} = \mathrm{A}$$

$$(\textit{соответственно} \bigcap_{t\neq j} (\mathrm{A} \setminus \mathrm{A}^{tj}) \neq \varnothing). \qquad (13)$$

Согласно теореме 4 искать потенциально недоминируемые варианты следует среди множества $X^w(\mathrm{A})$. Поскольку множество $X^w(\mathrm{A})$ внешне устойчиво, то при проверке потенциальной недоминируемости достаточно сравнивать проверяемый вариант только с вариантами из $X^w(\mathrm{A})$. Поэтому, в частности, в формулах (13) для построения объединения и пересечения можно учитывать только те области A^{tj}, которые соответствуют вариантам x^t из $X^w(\mathrm{A})$ (или из такого его подмножества, которое заведомо содержит все потенциально недоминируемые варианты).

Учитывая вышеизложенное, итеративную процедуру построения множества $X(\mathrm{A})$ можно организовать следующим образом.

Шаг 1. Формируем множество $X^w(\mathrm{A})$ и полагаем $X^1 = X^w(\mathrm{A})$, $X^2 = X^w(\mathrm{A})$, $X^* = \varnothing$. Если множество $X^w(\mathrm{A})$ состоит из одного варианта, то полагаем $X^* = X^w(\mathrm{A})$ и переходим к шагу 4, иначе выполняем шаг 2.

Шаг 2. Выбираем из множества X^1 вариант с наименьшим номером и удаляем его из состава этого множества. Проверяем выбранный вариант на потенциальную недоминируемость, сравнивая его поочередно с каждым вариантом из X^2 и используя теорему 6 (с учетом сделанного выше замечания).

Шаг 3. Если проверяемый вариант потенциально недоминируем, то включаем его в состав множества X^*. В противном случае исключаем его из состава множества X^2. Если множество X^1 пусто, переходим к шагу 4. В противном случае выполняем шаг 2.

Шаг 4. Полагаем $X(\mathrm{A}) = X^*$. Конец работы процедуры.

Описанная процедура позволяет выделить все потенциально недоминируемые варианты. Процесс построения множества потенциально недоминируемых вариантов с использованием описанной процедуры, вообще говоря, можно очевидным образом ускорить, если вместо отдельных вариантов работать с классами эквивалентностей из $\Im(\mathrm{A})$.

Определения 1 и 3 отношений слабого и сильного доминирования $P^w(\mathrm{A})$ и $P^s(\mathrm{A})$ здесь можно записать так:

$$x'P^w(\mathrm{A})x'' \Leftrightarrow x'P(\alpha)x'' \text{ верно для каждого } \alpha\in\mathrm{A}; \quad (14)$$

$$x'P^s(\mathrm{A})x'' \Leftrightarrow x'R(\alpha)x'' \text{ верно для каждого } \alpha\in\mathrm{A}, \text{ причем } x'P(\alpha)x'' \text{ имеет место хотя бы для одного } \alpha\in\mathrm{A}. \quad (15)$$

Заметим, что всегда $P^w(\mathrm{A}) \subseteq P^s(\mathrm{A})$, хотя при выполнении определенных условий это вложение выполняется как равенство [6, 9]. Поэтому для множеств $X^w(\mathrm{A})$ и $X^s(\mathrm{A})$ вариантов, недоминируемых соответственно по $P^w(\mathrm{A})$ и по $P^s(\mathrm{A})$, справедливо вложение $X^w(\mathrm{A}) \supseteq X^s(\mathrm{A})$, которое может быть строгим. Теорему 5 здесь можно представить в таком виде:

Теорема 5′. *Если* $x^j\in X^w(\mathrm{A})\backslash X^s(\mathrm{A})$, *то существуют такие* $\alpha^0\in\mathrm{A}$ *и* $x^t\in X^s(\mathrm{A})$, *что верно* $x^tI(\alpha^0)x^j$.

Пусть вариант x^j доминируем по $P^s(\mathrm{A})$, но недоминируем по $P^w(\mathrm{A})$. Тогда, как показывает теорема 5′, существует $\alpha^0\in\mathrm{A}$, при котором x^j является недоминируемым по $P(\alpha^0)$. Не исключено, что именно это значение α^0 соответствует реальным предпочтениям ЛПР, и поэтому вариант x^0 является претендентом на итоговый выбор. Но при использовании множества $X^s(\mathrm{A})$ вместо множества $X^w(\mathrm{A})$ в процессе построения множества $X(\mathrm{A})$ с использованием описанной выше процедуры вариант x^j будет потерян. Однако при этом множество $X^s(\mathrm{A})$ всегда содержит один или несколько других вариантов, эквивалентных по $I(\alpha^0)$ варианту x^j. И поэтому хотя бы один вариант из класса эквивалентности $I(\alpha^0)$, содержащего вариант x^j, будет сохранен в процессе решения задачи. Следовательно, если не требуется выделять все наилучшие варианты (т.е. достаточно ограничится нахождением только одного из них), то вместо множества $X^w(\mathrm{A})$ в описанной выше процедуре можно использовать более узкое, вообще говоря, множество $X^s(\mathrm{A})$. Это может позволить сократить время ее работы.

Примечание 3. Сформулированное положение родственно положению о возможности использования двух вложенных одно в другое отношений без требования непротиворечивого продолжения одного из них другим в итеративных процедурах сужения множества выбора, когда можно ограничиться выделением только одного наилучшего варианта [14].

5. Пример с количественной важностью

Теория количественной важности критериев [15, 16] основана на определении понятия «Критерий f_i важнее критерия f_j в h_{ij} раз» (такое сообщение обозначается $i \succ^{h_{ij}} j$). Определение этого понятия здесь не приводится.

Точная количественная информация о важности критериев Θ состоит из совокупности сообщений вида $i \succ^{h_{ij}} j$. *Полная и непротиворечивая информация* Θ^* для любых двух критериев f_i и f_j позволяет найти число h_{ij} такое, что верно $i \succ^{h_{ij}} j$. Поэтому она однозначно задает вектор *количественных*, или *кардинальных коэффициентов важности* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, т.е. положительных в сумме равных единице чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, для которых выполняется условие $h_{ij} = \alpha_i/\alpha_j$.

На основе информации Θ^* на множестве векторных оценок Z может быть построен квазипорядок $R(\alpha) = R^{\Theta^*}$, зависящий от вектора α как от параметра [15, 16]:

$$yR(\alpha)z \Leftrightarrow \sum\nolimits_{i=1}^{m}(\alpha_i^k(y)-\alpha_i^k(z)) \geq 0, \quad k = 2, \ldots, q, \quad (16)$$

где $\alpha_i^k(y)$ и $\alpha_i^k(z)$ определяются по формуле (7).

Если хотя бы для одного k неравенство в (16) строгое, то выполняется $yP(\alpha)z$, в противном случае верно $yI(\alpha)z$. Если количественная информация о важности $\tilde{\Theta}$ является неточной, т.е. известно лишь множество $\mathrm{A} = \mathrm{A}^{\tilde{\Theta}}$ возможных значений вектора α, то это множество можно использовать для выделения потенциально недоминируемых вариантов.

Перейдем к рассмотрению примера.

Пример 5. Рассмотрим задачу из примера 4. Примем допущение, что предпочтения ЛПР описываются отношением $R(\alpha)$, причем о количественных величинах важности известно лишь, что они согласованы с информацией Ω. т.е. $\alpha_2 > \alpha_3$. (Заметим, что отношение нестрогого предпочтения, порождаемое полной качественной информацией о важности, при принятии дополнительного допущения о суще-

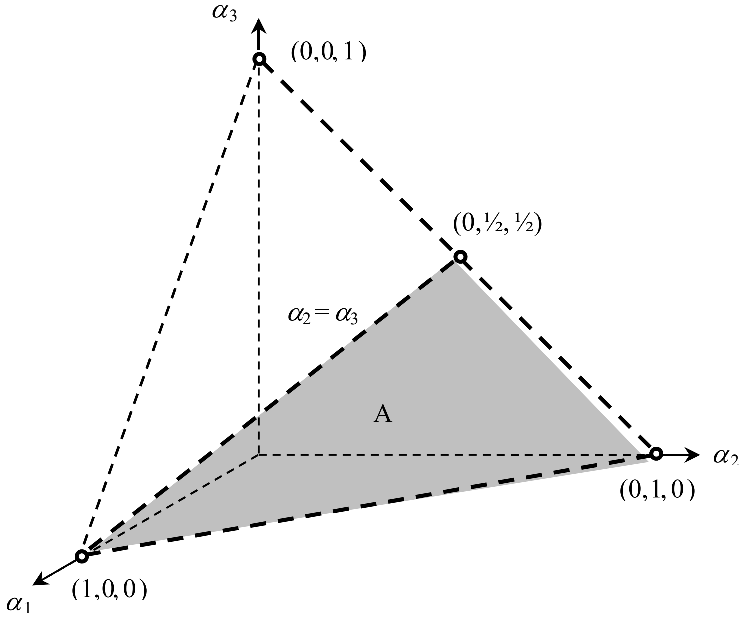

Рис. 2. Множество A

ствовании количественных величин коэффициентов важности не расширяется в случае порядковой шкалы критериев [17].) Таким образом, имеем множество

$$\mathrm{A} = \{\alpha\in\mathrm{Re}^3 \mid \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0,\ \alpha_3 > 0,\ \alpha_2 > \alpha_3,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1\}.$$

Это множество изображено на Рис. 2.

Выпишем условия выполнения соотношений $y^jR(\alpha)y^k$, используя решающее правило (16) и формулы для величин $\alpha_i^k(y^j)$, полученные в примере 4:

$$y^1R(\alpha)y^2 \Leftrightarrow (\alpha_3 \geq \alpha_1,\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq \alpha_1 + \alpha_2),$$
$$y^2R(\alpha)y^1 \Leftrightarrow (\alpha_3 \leq \alpha_1,\ \alpha_1 + \alpha_3 \leq \alpha_1 + \alpha_2);$$

$$y^1R(\alpha)y^3 \Leftrightarrow (\alpha_3 \geq \alpha_3,\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq \alpha_2 + \alpha_3),$$
$$y^3R(\alpha)y^1 \Leftrightarrow (\alpha_3 \leq \alpha_3,\ \alpha_1 + \alpha_3 \leq \alpha_2 + \alpha_3);$$

$$y^2R(\alpha)y^3 \Leftrightarrow (\alpha_1 \geq \alpha_3,\ \alpha_1 + \alpha_2 \geq \alpha_2 + \alpha_3),$$
$$y^3R(\alpha)y^2 \Leftrightarrow (\alpha_1 \leq \alpha_3,\ \alpha_1 + \alpha_2 \leq \alpha_2 + \alpha_3).$$

Поскольку $\alpha_2 > \alpha_3$, то $y^1P(\alpha)y^2$ неверно при любом $\alpha\in\mathrm{A}$. Условия выполнения остальных соотношений $y^jP(\alpha)y^k$ для $\alpha\in\mathrm{A}$ таковы:

$$y^2P(\alpha)y^1 \Leftrightarrow \alpha_3 \leq \alpha_1;$$

$$y^1P(\alpha)y^3 \Leftrightarrow \alpha_1 > \alpha_2,\quad y^3P(\alpha)y^1 \Leftrightarrow \alpha_1 < \alpha_2;$$

$$y^2P(\alpha)y^3 \Leftrightarrow \alpha_1 > \alpha_3,\quad y^3P(\alpha)y^2 \Leftrightarrow \alpha_1 < \alpha_3.$$

Вначале проверим на потенциальную недоминируемость вариант x^1. Для множеств A^{21} и A^{31} имеем выражения:

$$\mathrm{A}^{21} = \{\alpha\in\mathrm{A} \mid \alpha_1 \geq \alpha_3\},\ \mathrm{A}^{31} = \{\alpha\in\mathrm{A} \mid \alpha_1 < \alpha_2\}.$$

Эти множества представлены на Рис. 3 и Рис. 4. Поскольку $\mathrm{A}^{21} \cup \mathrm{A}^{31} = \mathrm{A}$, то вариант x^1, согласно теореме 6, заведомо доминируем. Множества

$$\mathrm{A} \setminus \mathrm{A}^{21} = \{\alpha\in\mathrm{A} \mid \alpha_1 < \alpha_3\} \text{ и } \mathrm{A} \setminus \mathrm{A}^{31} = \{\alpha\in\mathrm{A} \mid \alpha_1 \geq \alpha_2\}$$

представлены на Рис. 5. Поскольку $(\mathrm{A} \setminus \mathrm{A}^{21}) \cap (\mathrm{A} \setminus \mathrm{A}^{31}) = \varnothing$, то, согласно теореме 6, вариант x^1 не является потенциально недоминируемым, т.е. он заведомо доминируем.

Проверим теперь на потенциальную недоминируемость вариант x^2. Множество A^{12} пусто, а множество $\mathrm{A}^{32} = \{\alpha\in\mathrm{A} \mid \alpha_1 < \alpha_3\}$ является собственным подмножеством множества A, так что $\mathrm{A}^{12} \cup \mathrm{A}^{32} \subset \mathrm{A}$. Согласно теореме 6 вариант x^2 не является заведомо доминируемым, т.е. он потенциально недоминируем.

Наконец, проверим на потенциальную недоминируемость вариант x^3. Объединение множеств

$$\mathrm{A}^{13} = \{\alpha\in\mathrm{A} \mid \alpha_1 > \alpha_2\} \text{ и } \mathrm{A}^{23} = \{\alpha\in\mathrm{A} \mid \alpha_1 > \alpha_3\}$$

является собственным подмножеством множества A. Поэтому, согласно теореме 6, вариант x^3 не является заведомо доминируемым, т.е. он потенциально недоминируем.

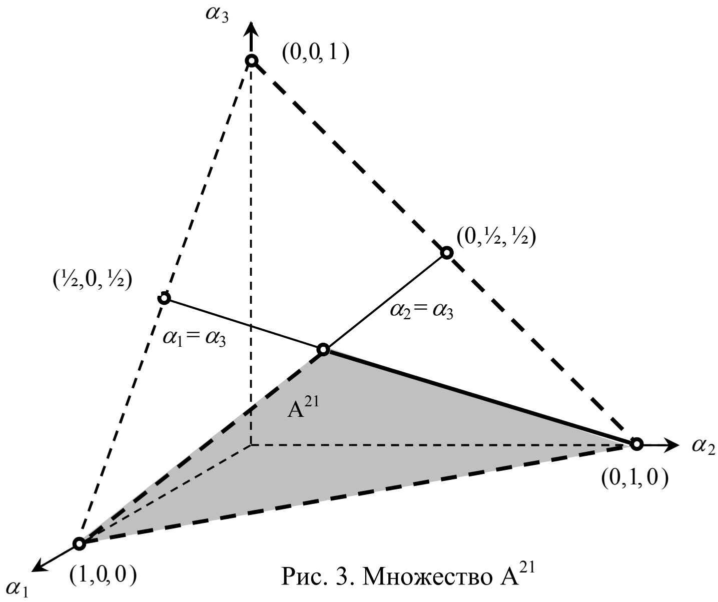

Рис. 3. Множество A^{21}

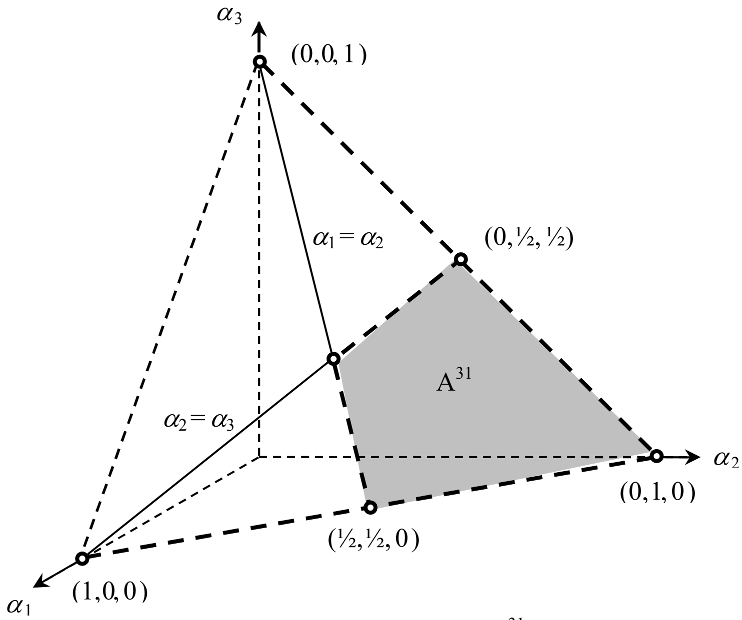

Рис. 4. Множество A^{31}

Естественно, что все эти результаты совпадают с результатами, полученными ранее в примере 4.

Заключение

Введенное в статье понятие потенциальной недоминируемости является обобщением понятия потенциальной оптимальности на случай, когда предпочтения моделируются с использованием семейства не полных, а частичных отношений предпочтения. Оба эти понятия, наряду с понятием недоминируемости, являются базовыми для теории выбора. Использование потенциальной недоминируемости более эффективно в анализе задач выбора с неточной информацией о предпочтениях, чем использование слабого или сильного отношений доминирования, так как позволяет получить более узкое, вообще говоря, множество вариантов – претендентов на наилучший вариант. Его использованием представляется эффективным и в итеративных процедурах решения задач выбора, в частности, с использованием теории важности критериев.

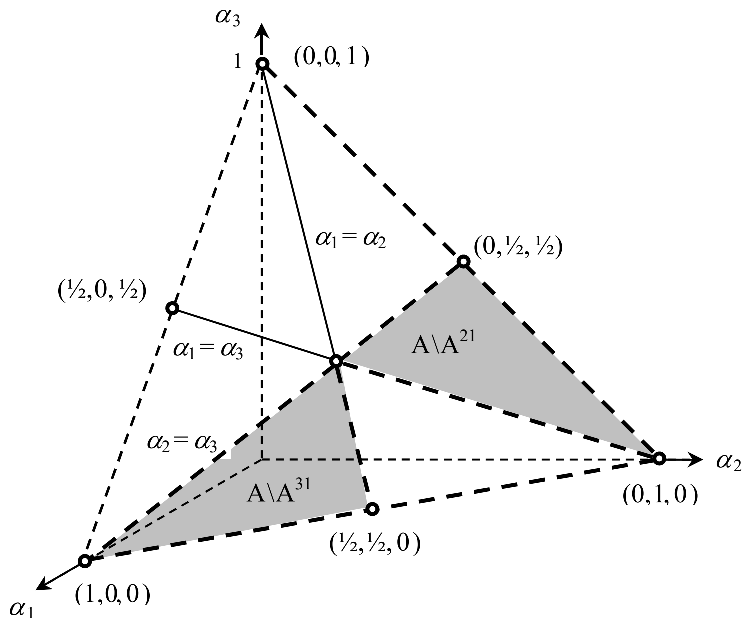

Рис. 5. Множества A\A^{21} и A\A^{31}

Приложение

Доказательство теоремы 1. Предположим, что потенциально недоминируемый для $\wp$ вариант x^* не является недоминируемым по P_0, т.е. найдётся вариант x такой, что верно соотношение xP_0x^*. Тогда для каждого $P\in\wp$ будем иметь xPx^*. А это противоречит предположению, что вариант x потенциально недоминируем.

Доказательство теоремы 2. Если $x\notin X(\wp)$, то, согласно равенству (2), для любого фиксированного $P\in\wp$ верно $x\notin X(P)$. Если множество X конечно, то во внешне устойчивом (по P) множестве $X(P)$ найдется вариант x^* такой, что верно x^*Px. Согласно (2) $x^*\in X(\wp)$.

Доказательство теоремы 3. Поскольку для любого $R\in\mathfrak{R}$ верно $P\subseteq P'$, то $X(P)\supseteq X(P')$. Равенство (2) показывает, что справедливо вложение $X(\wp')\subseteq X(\wp)$.

Доказательство теоремы 4. Пусть $x'\notin X^w(\wp)$, так что существует вариант x'', для которого выполнено $x''P^w(\wp)x'$. Тогда, согласно (1), для любого $P\in\wp$ справедливо $x''Px'$, так что $x'\notin X(P)$. Поэтому, как показывает (2), $x'\notin X(\wp)$.

Доказательство теоремы 5. Поскольку множество $X^s(\mathfrak{R})$ внешне устойчиво, то найдется $x^t\in X^s(\mathfrak{R})$ такой, что верно $x^tR^s(\mathfrak{R})x^j$, т.е. x^tRx^j имеет место для каждого $R\in\mathfrak{R}$. Так как $x^j\in X^w(\wp)$, то x^tPx^j не может выполняться для всех $R\in\mathfrak{R}$. Следовательно, существует $R\in\mathfrak{R}$, при котором верно x^tIx^j.

Доказательство теоремы 6. Объединение множеств из равенства (13) вложено в A. Если это вложение является строгим, то для $\alpha^*\in$A, не входящего в указанное объединение, при любом $t\in\{1, \ldots, n\}$ соотношение $x^tP(\alpha^*)x^j$ не будет выполнено ни для одного варианта x^t, так что вариант x^j не является заведомо доминируемым. Наоборот, если вариант x^j заведомо доминируем, то для любого фиксированного $\alpha^*\in$A найдется некоторое непустое множество A^{tj}, в которое входит α^*. Поэтому первое равенство в (13) верно. Далее, если пересечение множеств из (13) не пусто, то α^*, входящее в это пересечение, не входит ни в одно из множеств A^{tj}, $t\neq j$, а потому для любого варианта x^t не будет выполняться $x^tP(\alpha^*)x^j$. Следовательно, вариант x^j потенциально недоминируем. Наоборот, если x^j потенциально недоминируем, то существует $\alpha^*\in$A, которое не входит ни в одно из множеств A^{tj}, $t\neq j$, а потому является элементом всех множеств A \ A^{tj}. Следовательно, пересечение в (13) содержит α^* и поэтому не пусто.

Литература

1. Xu Z. A survey of preference relations // International journal of general systems. 2007. V. 36. P. 179–203.
2. Подиновский В.В. Анализ устойчивости результатов выбора при частичном отношении предпочтения // Искусственный интеллект и принятие решений. 2009. № 4. С. 45 – 52.
3. Fishburn P.C. Decision and value theory. New York: Wiley, 1964.
4. Подиновский В.В. О взаимосвязи понятий потенциальной оптимальности и недоминируемости // Автоматика и телемеханика. 2012. № 1. С. 184 – 187.
5. Podinovski V.V. Non-dominance and potential optimality for partial preference relations // European journal of operational research. 2013. V. 229. P. 482 – 486.
6. Hazen G.B. Partial information, dominance, and potential optimality in multi-attribute utility theory // Operation research. 1986. V. 34. P. 296 – 310.
7. Athanassopoulos A.D., Podinovski Vic.V. Dominance and potential optimality in multiple criteria decision analysis with imprecise information. Journal of the operational research society. 1997. V. 48. P. 142 – 150.
8. Eum E.S., Park K.S., Kim S.H. Establishing dominance and potential optimality in multi-criteria decision analysis with imprecise weight and value // Computers and operation research. 2001. V. 28. P. 397 – 409.
9. Подиновский В.В. Анализ решений при множественных оценках коэффициентов важности критериев и вероятностей значений неопределенных факторов в целевой функции // Автоматика и телемеханика. 2004. № 11. С. 141 – 159.
10. Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений: Учебное пособие. М.: Физматлит. 2007.
11. Подиновский В.В., Нелюбин А.П. Потенциальная недоминируемость в задачах выбора // Материалы XLI Международной конференции «Информационные технологии в науке, социологии и бизнесе (IT + SE`13) (Украина, Крым, Ялта – Гурзуф, 2 – 10 октября 2013 г.). Приложение к журналу «Открытое образование». Запорожье: Запорожский университет.2013. С. 31 – 34.
12. Подиновский В.В. Потенциальная оптимальность в многокритериальной оптимизации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 3. С. 44 – 45.
13. Подиновский В.В. Коэффициенты важности критериев в задачах принятия решений. Порядковые, или ординальные, коэффициенты важности // Автоматика и телемеханика. 1978. № 10. С. 130 – 141.
14. Подиновский В.В. Об использовании информации в итеративных методах выбора оптимальных решений // Научно-техническая информация. Серия 2. Информационные процессы и системы. 2004. № 2. С. 29 – 31.
15. Подиновский В.В. Количественная важность критериев // Автоматика и телемеханика. 2000. № 5. С. 110 – 123.
16. Podinovski V.V. The quantitative importance of criteria for MCDA // Journal of multi-criteria decision analysis. 2002. V. 11. P. 1 – 15.
17. Нелюбин А.П., Подиновский В.В. Взаимосвязь качественной и количественной важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений // Открытое образование. 2011. № 6 (89). С. 108 – 115.

Подиновский Владислав Владимирович. Профессор кафедры высшей математики на факультете экономики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики». Окончил Военную артиллерийскую инженерную академию им. Ф.Э. Дзержинского (ныне – Академия ракетных войск стратегического назначения им. Петра Великого) в 1960 году. Доктор технических наук. Автор более 150 печатных работ и семи монографий. Область научных интересов: теория принятия решений и ее приложения. E-mail: podinovski@mail.ru

Нелюбин Андрей Павлович. Младший научный сотрудник Института машиноведения им. А.А.Благонравова РАН. Окончил Московский физико-технический институт в 2010 году. Автор 13 печатных работ. Область научных интересов: многокритериальный анализ. E-mail: nelubin@gmail.com.