В.П. Акимов

Расщепление классических индексов влияния

Аннотация. Степень влияния участников голосовательных систем на результат процедуры принятия решений измеряется методами индексов влияния. Наиболее известными являются индексы Шепли-Шубика и Банцхафа. Оба индекса имеют свойство самодвойственности: влияние поддержки выгодного решения оказывается равным влиянию блокирования невыгодного решения. В настоящей работе предлагается естественный подход к расщеплению значения Шепли на несимметричные компоненты. Соответствующее расщепление индекса Шепли-Шубика приводит к несимметричным влияниям поддержки и подавления. Аналогичным образом расщепляется индекс Банцхафа.

Ключевые слова: значения Шепли, индексы влияния, индекс Шепли-Шубика, индекс Банцхафа.

Введение

Традиционным методом измерения силы политического влияния в голосовательных системах является метод индексов влияния [1]. Известно несколько различных подходов к вычислению индексов, однако, наиболее известными и исследованными являются индексы Шепли-Шубика [2] и Банцхафа [3, 4].

Формально, голосовательная схема принятия решений может быть смоделирована кооперативной игрой, заданной в форме характеристической функции.

Пусть N – есть множество голосующих, S$\in$N – любая их коалиция, W – множество выигрывающих коалиций, а *v(S)* - характеристическая функция (игра). Игра *v* называется простой, если для любой коалиции S выполнено: $v(S)\in\{0,1\}$. Простая игра называется голосовательной, если:

$$v(S)=\begin{cases}1, & если \quad S\in W\\ 0, & если \quad S\notin W\end{cases}$$

$$\varnothing\notin W; \quad N\in W; \quad \{S\in W \quad и \quad S\subset T\}\to T\in W$$

Индекс Шепли-Шубика является частным случаем применения к голосовательным играм более общей концепции значения для кооперативных игр, введенной Шепли [5]. Значение или индекс игрока – есть его априорный шанс стать решающим игроком, т.е. таким игроком, который присоединяясь к проигрывающей коалиции, превращает ее в выигрывающую. Индекс Шепли-Шубика для игрока i есть:

$$\varphi_i=\sum_{\substack{S\subset W\\ S\setminus\{i\}\notin W}}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \qquad (1.1)$$

где s=|S|, n=|N|.

Другая концепция индекса влияния была предложена юристом Банцхафом. Если индекс Шепли-Шубика подсчитывает долю упорядочиваний игроков, при которых игрок i приносит решающий голос, то нормализованный индекс Банцхафа подсчитывает долю коалиций, в которых игрок i – решающий. Пусть θ_i - число коалиций, где игрок i –решающий. Тогда нормализованный индекс Банцхафа есть:

$$\beta_i[v]=\frac{\theta_i}{\sum_{j=1}^{n}\theta_j} \qquad (1.2)$$

Часто рассматривается также ненормализованный индекс:

$$\beta'[v]=2^{1-n}\theta[v] \qquad (1.3)$$

Вероятностная интерпретация индексов (1.1) и (1.3) связана с мультилинейным расширеением игры, введенным Оуэном [6]. Мультилинейное расширение (МЛР) игры *v* есть функция f, определенная следующим образом:

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{S\subset N}\prod_{j\in S}x_j\prod_{j\notin S}\left(1-x_j\right)v(S) \qquad (1.4)$$

где $0\le x_j\le 1;\quad j=1,\dots,n.$

Вероятностная интерпретация МЛР состоит в следующем. Пусть коалиция S формируется случайным образом. Причем, событие $a_i : i\in S$ имеет вероятность x_i. Тогда в предположении, что все события a_i независимы, получаем, что вероятность формирования коалиции S есть:

$$\prod_{j\in S}x_j\prod_{j\notin S}\left(1-x_j\right)$$

и таким образом:

$$f(x_1,\dots,x_n)=M\left[v(S)\right] \qquad (1.5)$$

То есть, в рамках сделанных вероятностных предположений МЛР есть математическое ожидание выигрыша коалиции. Для голосовательных игр в формуле (1.4) вместо N следует использовать W, и тогда она превращается в вероятность прохождения голосуемого решения:

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{S\subset W}\prod_{j\in S}x_j\prod_{j\notin S}\left(1-x_j\right) \qquad (1.6)$$

Важную роль в теории МЛР играет i-ая частная производная от *f(**x**)*, обозначаемая как $f^{(i)}(x)$. Действительно, интеграл от этой величины, взятый вдоль главной диагонали $\left(x_1=x_2=\ldots=x_n\right)$ куба $\left[0,1\right]^N$, дает значение Шепли для игрока i:

$$\int_0^1 f^{(i)}(t,t,\dots,t)dt=\varphi_i\left[v\right] \qquad (1.7)$$

В то же время, значение частной производной в центральной точке куба дает индекс (1.3):

$$f^{(i)}\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\dots,\tfrac{1}{2}\right)=\beta_i'\left[v\right]$$

Straffин [7] дал вероятностную интерпретацию индексов φ и β′. Она основана на идее вероятности индивидуального воздействия. Страффин задает следующий вопрос:

Какова вероятность того, что мой голос повлияет на результат? То есть, какова вероятность того, что голоса остальных распределятся таким образом, что решение пройдет, если я проголосую «за», и не пройдет, если я проголосую «против»?

Он показал, что β′ является ответом на указанный вопрос в предположении о независимости (каждое x_i выбирается независимо из равномерного распределения на [0,1]); φ дает ответ на тот же вопрос в предположении об однородности (случайная величина *x* выбирается независимо из равномерного распределения на [0,1] и $x_i=x$ для любого i).

Пусть W_i – множество выигрывающих коалиций, для которых игрок i является решающим. Тогда ответом на вопрос Страффина является вероятность:

$$P=\sum_{S\subset W_i}\prod_{\substack{j\in S\\ j\ne i}}x_j\prod_{j\notin S}\left(1-x_j\right) \qquad (1.8)$$

Данная вероятность представляет часть вероятности прохождения проекта решения (1.6), причем именно ту ее часть, которая контролируется игроком i. Действительно, если игрок i голосует «против», то коалиции W_i становятся проигрывающими. Если же он голосует «за», то вероятность прохождения решения возрастает на величину (1.8) по сравнению с «против». Вопрос Страффина может, таким образом, быть задан в эквивалентной формулировке: *Насколько варьирует вероятность прохождения проекта в зависимости от моих «за» или «против».*

Целью настоящей работы является разбить традиционные индексы влияния на две, вообще говоря, несимметричные составляющие, отвечающие за влияние «проведения» и влияние «блокировки». То есть, отвечающие за возможности участника по проведению проекта решения или по противодействию ему. Соответственно, вопрос Страффина распадается на два:

1. На сколько я могу увеличить вероятность прохождения проекта решения, если проголосую «за»? (влияние «проведения»)

2. На сколько я могу уменьшить вероятность прохождения проекта решения, если проголосую «против»? (влияние «блокировки»)

Необходимость расщепления индекса влияния диктуется следующими соображениями. Индекс Шепли-Шубика обладает свойством симметричности: влияние «проведения» и влияние «блокировки» любого игрока всегда одинаковы и равны его значению Шепли. В то же время этот результат контр-интуитивен. Легко построить пример, когда влияние блокировки явно выше влияния проведения.

Пусть, например, имеется акционерное общество, состоящее из трех акционеров, обладающих 1, 2 и 3 акциями соответственно. Для прохождения решения требуется не менее 4 голосов. Ясно, что третий акционер обладает правом вето. Он может заблокировать любое решение, проголосовав «против». В то же время он не является диктатором: для того, чтобы провести решение, ему необходима поддержка хотя бы одного из оставшихся акционеров. Ясно, что ситуация несимметрична при оценке возможностей «проведения» и «блокировки». По крайней мере, коалиция, состоящая из одного третьего акционера, является блокирующей, но не является выигрывающей.

Акимов и Керби [8] ввели усредненное значение для кооперативных игр, также приводящее к расщеплению значения Шепли на две составляющие. Однако расщепление на основе вероятностных соображений оказывается несколько иным.

Ответы на два приведенных выше вопроса дают нам:

- идею нового значения для кооперативных игр, расщепляющего в общем случае значение Шепли на две составляющие и, в частном случае, индекс Шепли-Шубика на влияние «проведение» и «блокировки»;
- расширение понятия индекса Банцхафа.

1. Расщепление значения Шепли

Множество T называется носителем игры v, если для любого S выполнено $v(S)=v(S\cap T)$.

Индекс Шепли-Шубика не что иное как значение Шепли, используемое в качестве меры политического (голосовательного) влияния. Значения Шепли для игры v представляют собой n-вектор $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ такой, что каждый игрок i характеризуется значением:

$$\varphi_i[v]=\sum_{\substack{S\subset N\\ i\in S}}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\left[v(S)-v(S\setminus\{i\})\right] \quad (2.1)$$

где N – любой носитель игры v, а s и n представляют числа элементов во множествах S и N соответственно.

Из (1.4) непосредственно следует, что

$$f(x)=x_i f_+^{(i)}(x)+(1-x_i)f_-^{(i)}(x) \quad (2.2)$$

где

$$f_+^{(i)}(x)=\sum_{\substack{S\subset N\\ i\in S}}\prod_{\substack{j\in S\\ j\neq i}}x_j\prod_{j\notin S}(1-x_j)v(S);$$

$$f_-^{(i)}(x)=\sum_{\substack{S\subset N\\ i\notin S}}\prod_{j\in S}x_j\prod_{\substack{j\notin S\\ j\neq i}}(1-x_j)v(S)$$

Из (2.2) и (2.5) легко видеть, что

$$f^{(i)}(x)=f_+^{(i)}(x)-f_-^{(i)}(x);$$

$$f_+^{(i)}(x)=f(x\,|\,x_i=1)=M[v(S)\,|\,x_i=1]; \quad (2.3)$$

$$f_-^{(i)}(x)=f(x\,|\,x_i=0)=M[v(S)\,|\,x_i=0]$$

В случае голосовательных игр $f_+^{(i)}(x)$ *и* $f_-^{(i)}(x)$ равны вероятностям прохождения проекта решения в предположении однородности и при условии, что игрок i фиксирует свой выбор («за» или «против», соответственно). Для ответа на вопросы, поставленные во введении, осталось выбрать начальную точку отсчета. Такой точкой естественно является вероятность прохождения проекта решения в предположении однородности и невыделенности игрока i, то есть f(x). Ответим теперь на вопросы 1 и 2. Соответствующие вероятности равны:

$$d_{i+}(x)=f_+^{(i)}(x)-f(x)$$

$$d_{i-}(x)=f(x)-f_-^{(i)}(x)$$

Поскольку для голосовательных игр разности 1 и 2 представляют собой отклонения в вероятности прохождения проекта решения, продуцируемые решением игрока i, то их естественно связать с влиянием поддержки и блокирования, соответственно.

В общем случае кооперативной игры $d_{i+}(x)$ и $d_{i-}(x)$ представляют собой “позитивные” и “негативные” изменения в M[v(S)], обусловленные фиксацией позиции игрока i ($i\in S$ или $i\notin S$).

Очевидно, что $f^{(i)}(x)=d_{i+}(x)+d_{i-}(x)$. Тогда с учетом (1.7) получаем:

$$\int_0^1 d_{i+}(t,t,\ldots,t)dt+\int_0^1 d_{i-}(t,t,\ldots,t)dt=\varphi_i \quad (2.4)$$

Введем обозначения:

$\varphi_i^+=\int_0^1 d_{i+}(t,t,\ldots,t)dt$ - значение кооперации (влияние поддержки в голосовательных играх)

$\varphi_i^-=\int_0^1 d_{i-}(t,t,\ldots,t)dt$ - значение оппозиции (влияние блокировки в голосовательных играх).

Тогда (2.4) есть расщепление значения Шепли на две составляющие, или (для голосовательных игр) расщепление полного влияния игрока, представленного индексом Шепли-Шубика, на влияние поддержки и влияние блокировки. Данное расщепление является, вообще говоря, несимметричным. Из дальнейших примеров будет видно, что влияние блокировки часто оказывается выше влияния поддержки, что вполне согласуется с интуитивным представлением о том, что заблокировать решение обычно легче, чем добиться его принятия. Симметричность индекса Шепли-Шубика объясняется тем обстоятельством, что в качестве меры влияния поддержки используется полное влияние игрока.

2. Аксиоматизация значения кооперации

В этом разделе значения кооперации и оппозиции будут выведены аксиоматически. Прежде всего преобразуем $d_{i+}(x)$ с учетом (1.4) и (2.2):

$$d_{i+}(x) = f_+^{(i)}(x) - f(x) =$$

$$= \sum_{S\subset N\setminus\{i\}} (1-x_i)\prod_{j\in S} x_j \prod_{j\notin S}(1-x_j)\,[v(S\cup\{i\}) - v(S)] \tag{3.1}$$

Полагая $x=(t,t,\ldots,t)$ и интегрируя, получаем:

$$\varphi_i^+ = \int_0^1 d_{i+}(t,t,\ldots,t)dt =$$

$$\sum_{S\subset N\setminus\{i\}} \int_0^1 t^s(1-t)^{n-s}\,dt\,[v(S\cup\{i\}) - v(S)] = \tag{3.2}$$

$$= \sum_{S\subset N\setminus\{i\}} \frac{s!(n-s)!}{(n+1)!}[v(S\cup\{i\}) - v(S)]$$

Теперь можно найти условие нормализации:

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^+ = \sum_{i=1}^{n}\sum_{S\subset N\setminus\{i\}} \frac{s!(n-s)!}{(n+1)!}[v(S\cup\{i\}) - v(S)] =$$

$$\sum_{S\subset N}\frac{s(s-1)!(n-s+1)!}{(n+1)!}v(S) - \sum_{s<n}\frac{s!(n-s)!(n-s)}{(n+1)!}v(S) =$$

$$\frac{v(N)}{n+1} + \sum_{s<n}\frac{s!(n-s)!}{(n+1)!}v(S) = \frac{1}{n+1}\sum_{S\subset N}\frac{v(S)}{C_n^s} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{s=0}^{n}\frac{\sum_{|S|=s} v(S)}{C_n^s} = \frac{1}{n+1}\sum_{s=0}^{n} v_s \tag{3.3}$$

где $v_s = M(v(T)\mid |T| = s)$. В выкладках использован тот факт, что игрока i можно выбрать внутри коалиции s способами, а вне коалиции - (n-s) способами. Фактически, суммарное значение кооперации всех n игроков есть v_s, усредненное по всем размерам коалиции, включая пустую коалицию.

Шепли показал, что для любого носителя N игры v существует в точности одна функция значения $\varphi[v]$, задаваемая (2.1) и удовлетворяющая следующим аксиомам:

Для любых игр v и w

S1. ("Симметрия") $\varphi_{\pi(i)}[\pi v] = \varphi_i[v]$ для любой перестановки π множества N.

S2. (“Закон агрегирования”) $\varphi[v+w] = \varphi[v] + \varphi[w]$

S3. (“Эффективность” или “нормализация”) $\sum_{i\in N}\varphi_i[v] = v(N)$ для любого носителя N игры v.

Сохраняя две первые аксиомы неизменными, используем (3.3) в качестве третьей. В результате получаем аналог теоремы Шепли:

Теорема 1. Существует единственная функция значения $\varphi^+[v]$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

Для любых игр v и w

A1. ("Симметрия") $\varphi_{\pi(i)}^+[\pi v] = \varphi_i^+[v]$ для любой перестановки π множества N.

A2. (“Закон агрегирования”) $\varphi^+[v+w] = \varphi^+[v] + \varphi^+[w]$

A3. (“Эффективность” или “нормализация”) $\sum_{i\in N}\varphi_i^+[v] = \frac{1}{n+1}\sum_{s=0}^{n} v_s$ для любого носителя N игры v.

Доказательство теоремы 1 вполне аналогично доказательству классической теоремы Шепли (Приложение).

Определение: Игра v^* называется двойственной к v, если она для любого $S\subset N$ удовлетворяет условию $v^*(S) = v(N) - v(N\setminus S)$.

Для любой функции значения Val определим двойственную функцию Val*:

Val*[v]=Val[v*].

Теорема 2. Значение оппозиции является двойственным по отношению к влиянию кооперации: $\varphi_i^- = \left(\varphi_i^+\right)^*$.

Доказательство. Принимая во внимание, что $\varphi_i^+ + \varphi_i^- = \varphi_i$, а также (3.3) и А3, получаем:

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^- = \sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_i - \varphi_i^+\right) = v(N) - \frac{1}{n+1}\sum_{s=0}^{n} v_s =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{s=0}^{n}\left(v(N) - v_s\right) = \frac{1}{n+1}\sum_{s=0}^{n}\frac{\sum_{|S|=s}\left(v(N) - v(S)\right)}{C_n^s}$$

Положим T=N\S, тогда:

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^- = \frac{1}{n+1}\sum_{t=0}^{n}\frac{\sum_{|N\setminus T|=n-t}\left(v(N) - v(N\setminus T)\right)}{C_n^t} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{t=0}^{n}\frac{\sum_{|N\setminus T|=n-t} v(T)}{C_n^t} = \frac{1}{n+1}\sum_{T\subset N}\frac{v^*(T)}{C_n^t} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{S\subset N}\frac{v^*(S)}{C_n^s}$$

Что и требовалось доказать.

Следствие. $\varphi_i^+ + \left(\varphi_i^+\right)^* = \varphi_i$

3. Возможности расщепления индекса Банцхафа

В случае индекса Банцхафа предполагается, что все голосующие голосуют «за» или «против» с вероятностью ½. Одним из способов обобщения понятия индекса влияния и приближения его к реальным голосовательным процессам является допущение о том, что распределение вероятностей может быть и другим. Это допущение становится особенно важным при анализе таких структур принятия решений как, например, парламенты. Любой законопроект, прежде чем быть поставленным на голосование, публично обсуждается, по крайней мере, в подкомитетах. В силу этого предварительные позиции многих парламентариев более или менее предсказуемы, и можно говорить об априорных вероятностях для них проголосовать «за». Представляется вполне естественным включить априорные вероятности в вычисление индексов влияния.

Введенные выше отклонения вероятности прохождения законопроекта, обуславливаемые решением игрока i: (d_{i+} и d_{i-}) представляются естественными величинами, характеризующими влияние поддержки и блокировки игрока. В то время как их сумма характеризует его полное влияние. На основе данных характеристик могут быть построены индексы влияния в стиле Банцхафа. Один из способов состоит в вычислении относительного полного влияния игрока:

$$\alpha_i(x) = \frac{f^{(i)}(x)}{\sum_j f^{(j)}(x)} = \frac{d_{i+}(x)}{\sum_j f^{(j)}(x)} + \frac{d_{i-}(x)}{\sum_j f^{(j)}(x)} =$$

$$= \alpha_{i+}(x) + \alpha_{i-}(x) \tag{4.1}$$

где последняя сумма демонстрирует способ декомпозиции полного влияния на компоненты поддержки и блокировки. Другой способ состоит в вычислении относительных влияний поддержки и блокировки:

$$\alpha'_{i+}(x) = \frac{d_{i+}(x)}{\sum_j d_{j+}(x)};\quad \alpha'_{i-}(x) = \frac{d_{i-}(x)}{\sum_j d_{j-}(x)} \tag{4.2}$$

Все вышеприведенные индексы являются функциями распределения априорных вероятностей *x*. Ниже будет показано, что индексы (4.1) и (4.2) являются естественными расширениями индексов Банцхафа. Индексу Банцхафа соответствует предположение о независимости:

$$x = (1/2,\ldots,1/2) \tag{4.3.}$$

В предположении (4.3) получаем из (3.1):

$$d_{i+}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{S\subset N\setminus\{i\}}\left[v(S\cup\{i\}) - v(S)\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \theta_i \tag{4.4.}$$

Аналогично, при тех же предположениях:

$$d_{i-}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \theta_i;\quad f^{(i)}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\theta_i \tag{4.5}$$

Легко видеть из (4.1), (4.2), (4.4), (4.5), что в предположении (4.3), $\alpha_i = \alpha'_{i+} = \alpha'_{i-} = \beta_i$, при этом $f^{(i)}(1/2,\ldots,1/2)$ представляет собой ненормализованный индекс Банцхафа. Индексы Банцхафа определены только для уникального распределения вероятностей *x*, соответствующего центральной точке n-мерного куба $[0,1]^N$. Функция $f^{(i)}(x)$, где x – произвольное распределение вероятностей, может служить естественным расширением ненормализованного индекса Банцхафа на все внутреннее пространство куба. В этом случае величины d и α (в предположении, что $\sum_j f^{(j)}(x) \neq 0$) представляют собой компоненты поддержки и блокировки для ненормализованного и нормализованного индексов, соответственно.

Расщепление индекса Банцхафа на две указанные компоненты тривиально, т.к. $d_{i+}=d_{i-} = ½f_i$

при условии (4.3). Но для любого другого распределения влияния поддержки и блокировки становятся не симметричными. Причем компоненты влияния оказываются линейно зависимыми от собственной априорной позиции игрока i. Пусть все x_j фиксированы для $j \neq i$, тогда $d_{i+} = (1 - x_i) \cdot const; \quad d_{i-} = x_i \cdot const$.

Скажем, если ожидается, что игрок i проголосует «за» (x_i – близко к 1), то его влияние поддержки близко к нулю (он не может сколько-нибудь существенно увеличить вероятность прохождения законопроекта). В то же время блокирующее влияние игрока, связанное с неожиданным «против», близко к максимально возможному.

4. Влияния поддержки и блокировки в Совете Безопасности ООН

Распределение политического влияния в Совете Безопасности ООН многократно рассчитывалось различными авторами. Шепли и Шубик [2] рассчитали данное распределение с точки зрения своего индекса для первоначального состава Совета (11 членов: 5 постоянных и 6 непостоянных). Большинство составляло 7 членов, включая все 5 постоянных. Расчеты для современного состава Совета можно найти во многих публикациях [9-11]. В работах [12] и [13] рассматривается перераспределение влияния в Совете Безопасности ООН при различных вариантах его реформирования. Целью настоящего раздела является иллюстрация возможностей расщепления классических индексов влияния на примере современного состава Совета Безопасности.

Совет Безопасности ООН является прекрасным примером для демонстрации возможностей расщепленных индексов влияния. В современном составе Совета имеется 15 членов, 5 из которых являются постоянными и обладают правом вето. Это означает, что постоянный член может лично заблокировать любое решение Совета. Интуитивно ясно, что постоянные члены, благодаря праву вето, обладают значительными блокирующими возможностями, нежели возможностями по проведению в жизнь поддерживаемых ими решений. Именно это и выявляют расщепленные индексы, в то время как классические индексы влияния считают влияния поддержки и блокирования равными между собой величинами.

4.1. Расщепление индекса Шепли-Шубика

Выигрывающая коалиция в Совете Безопасности ООН состоит из всех пяти постоянных членов и, по крайней мере, четырех из 10 непостоянных членов. Обозначая, в соответствии с предположением о равномерности, вероятность проголосовать «за» для каждого из участников через t, получаем:

$$f(t,t,\ldots,t) = t^5 \sum_{i=4}^{10} C_{10}^i t^i (1-t)^{10-i} \qquad (5.1)$$

С учетом (2.3):

$$f_+^{(p)}(t,t,\ldots,t) = t^4 \sum_{i=4}^{10} C_{10}^i t^i (1-t)^{10-i} \qquad (5.2)$$

Таким образом, влияние поддержки для них есть:

$$\varphi_p^+ = \int_0^1 \left[f_+^{(p)}(t,\ldots,t) - f(t,\ldots,t) \right] dt =$$
$$= \sum_{i=4}^{10} C_{10}^i \left[\frac{(i+4)!(10-i)!}{15!} - \frac{(i+5)!(10-i)!}{16!} \right] \cong 0{,}03135;$$

а влияние блокировки с учетом права вето есть:

$$\varphi_p^- = \int_0^1 f(t,\ldots,t) dt = \sum_{i=4}^{10} C_{10}^i \frac{(i+5)!(10-i)!}{16!} \cong 0{,}16492$$

В сумме два вышеприведенных индекса дают значение Шепли: $\varphi_p = \varphi_p^+ + \varphi_p^- \cong 0{,}19627$, но влияние блокирования оказывается более чем в пять раз превышающим влияние поддержки.

Что касается непостоянных членов, то они не обладают правом вето, и их индексы поддержки и блокировки оказываются одного порядка величины:

$$\varphi_{np}^+ = \int_0^1 \left[f_+^{(np)}(t,\ldots,t) - f(t,\ldots,t) \right] dt =$$
$$\sum_{i=3}^{9} C_9^i \frac{(5+i)!(9-i)!}{15!} - \sum_{i=3}^{10} C_{10}^i \frac{(5+i)!(10-i)!}{16!} \cong$$
$$\cong 0{,}00081585$$

$$\varphi_{np}^- = \int_0^1 \left[f(t,\ldots,t) - f_-^{(np)}(t,\ldots,t) \right] dt =$$
$$\sum_{i=4}^{10} C_{10}^i \frac{(5+i)!(10-i)!}{16!} - \sum_{i=4}^{9} C_9^i \frac{(5+i)!(9-i)!}{15!} \cong$$
$$\cong 0{,}00104951$$

$$\varphi_{np}^+ + \varphi_{np}^- = \varphi_{np} \cong 0{,}0018648$$

4.2. Расширенный индекс Банцхафа

Представляется, что соответствие между реальной частотой прохождения решения и теоретически рассчитанной модельной вероятностью его прохождения является одним из важных факторов оценки пригодности модели и, в частности, схемы рандомизации для оценки степени влиятельности участников процесса принятия решений. Индексы Шепли-Шубика и Банцхафа основаны на абсолютно различных схемах рандомизации. Если считать, что проект решения выбран случайным образом, то первая схема дает вероятность его прохождения порядка 16,5%, в то время как вторая – всего лишь 2,6%. Это показывает, что схемы не могут быть справедливыми одновременно. Неслучайно многие авторы придерживаются того мнения, что индекс Шепли-Шубика предпочтительнее использовать в случае оценки влиятельности членов Совета Безопасности ООН. Вероятности прохождения проектов оказываются фиксированными для указанных случаев, поскольку они целиком определяются схемами рандомизации. Для расширенного индекса Банцхафа схема рандомизации не является фиксированной, поэтому вероятность прохождения проекта может гибко изменяться.

Ниже в чисто иллюстративных целях рассчитаны вероятности прохождения проекта решения в СБ ООН и расширенные индексы Банцхафа в упрощенном предположении, что все участники голосуют случайным образом и имеют одинаковые для всех вероятности проголосовать в поддержку решения, т.е. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = t$.

В Табл. 1 полное влияние постоянного члена рассчитывается по формуле (5.2). Непостоянный член имеет решающий голос только в том случае, когда все 5 постоянных членов и ровно 3 непостоянных голосуют «за»: $f^{(np)} = t^5 C_9^3 t^3 (1-t)^6 = 84t^8 (1-t)^6$

При уровне поддержки t=0,7 вероятность прохождения проекта решения по расширенной схеме Банцхафа становится практически равной вероятности по схеме Шепли-Шубика, то есть схемы перестают противоречить друг другу в плане вероятности прохождения решения. Индекс Шепли-Шубика показывает примерно 100-кратное превосходство во влиятельности постоянного члена над непостоянным. Традиционный индекс Банцхафа дает лишь 10-кратное превосходство. Многие исследователи на уровне интуиции отдают преимущество индексу Шепли-Шубика именно потому, что 100-кратное превосходство выглядит естественнее, чем 10-кратное. Из Табл. 2 видно, что при уровне поддержки 0,7 расширенный индекс Банцхафа дает уже 67 кратное преимущество, что гораздо лучше соответствует интуитивным представлениям. В то же время превосходство блокирующей компоненты над поддерживающей оказывается неубедительным (в 2,33 раза). Расщепление индекса Шепли-Шубика дает значительно больший разрыв.

Табл.1. Ненормализованные расширенные индексы Банцхафа для членов СБ ООН

Вероятность поддержки (t)		0.7	0.5 (Банцхаф)	0.3
Вероятность прохождения		0.16629	0.025879	0.000851
Постоянный член	Блокирующее влияние (d_{i-})	0.16629	0.025879	0.000851
	Влияние поддержки (d_{i+})	0.071267	0.025879	0.001987
	Полное влияние (f_i)	0.237557	0.051758	0.002838
Непостоянный член	Блокирующее влияние	0.002471	0.002563	0.000195
	Влияние поддержки	0.001059	0.002563	0.00454
	Полное влияние	0.00353	0.005127	0.000648

Табл. 2. Нормализованные индексы и некоторые отношения

Вероятность поддержки (t)	0.7	0.5	0.3
Полное влияние непостоянного члена	0.002886	0.016535	0.031362
Полное влияние постоянного члена	0.194227	0.166929	0.137277
Постоянный/непостоянный	67.29401	10.09524	4.377219
Поддержка/блокирование	0.428571	1	2.333333

Заключение

В настоящей работе показано, что вероятностный подход, основанный на идее мультилинейного расширения игр, помогает найти естественный способ расщепления значения Шепли на значения кооперации и оппозиции. Указанные значения являются двойственными, а сумма их равна соответствующему значению Шепли. В случае голосовательных игр указанные значения естественным образом представляют позитивное (поддержки) и негативное (блокирующее) влияние игроков, отражающие их возможности по проведению в жизнь желательных и блокированию нежелательных проектов решений. В полном соответствии с ожиданиями здравого смысла эти влияния оказываются, вообще говоря, не симметричными в отличие от теоретически симметричных классических индексов.

Те же идеи позволяют расщепить и другой классический индекс влияния – индекс Банцхафа и расширить область его применения, отказавшись от жесткой схемы рандомизации.

Приложение. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы основано на последовательности лемм.

Пусть $\mathbf{N}\in\mathbf{U}$ - конечный носитель игры *v*. Обозначим $\alpha=\varphi^{+}$.

Лемма 1. Для любой коалиции S, определим игру w_s следующим образом:

$$w_s(T)=\begin{cases}0, & S\not\subset T\\ 1, & S\subset T\end{cases}$$

Тогда, если s есть число игроков в S, то

$$\alpha_i\left[w_s\right]=\begin{cases}\dfrac{1}{(s+1)s}, & i\in S\\ 0, & i\notin S\end{cases}\tag{7.1}$$

Доказательство. Ясно, что S является носителем для w_s. Если $i\notin S$, то $v(S)=v(S\cup\{i\})$ и $\alpha_i\left[w_s\right]=0$ по аксиоме А3.

Выберем i и j во множестве S, и выберем $\pi\in\pi(U)$ такое, что $\pi S=S$ и $\pi i=j$. Тогда мы имеем $\pi w_s=w_s$ и по аксиоме А1

$$\alpha_i\left[w_s\right]=\alpha_j\left[w_s\right]\tag{7.2}$$

По аксиоме А3 имеем:

$$\sum_i\alpha_i\left[w_s\right]=\frac{1}{s+1}\sum_{c=0}^{s}\frac{w_s(C)}{C_s^c}=\frac{1}{s+1}\tag{7.3}$$

так как $w_s(C)=0$ для всех $c=|C|<s$.

Теперь (7.1) следует из (7.2) и (7.3).

Следствие. Если $c>0$, тогда

$$\alpha_i\left[cw_s\right]=\begin{cases}\dfrac{c}{s(s+1)}, & i\in S\\ 0, & i\notin S\end{cases}$$

Лемма 2 [Шепли]. Любая игра с конечным носителем представима в виде линейной комбинации симметричных игр w_s:

$$v=\sum_{\substack{S\subseteq N\\ S\neq\varnothing}}c_s w_s$$

где N – любой носитель игры, а коэффициенты равны:

$$c_s(v)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{s-t}v(T)\tag{7.4}$$

Доказательство дано в [Shapley, 1953].

Доказательство теоремы 1. Согласно Лемме 2 любая игра может быть представлена в виде линейной комбинации игр w_s. По Лемме 1 функция α единственным образом определена для таких игр. Некоторые коэффициенты c_s могут быть отрицательными, тем не менее, легко увидеть из аксиомы A2, что если *u, v, (u-v)* – все игры, то $\alpha[u-v]=\alpha[u]-\alpha[v]$. Далее, по аксиоме A2 функция α единственным образом определена для любой игры *v*. Точная формула для функции α выводится ниже.

$$\alpha_i[v]=\sum_{S\subseteq N}c_s\alpha_i[w_s]=\sum_{\substack{S\subseteq N\\ i\in S}}c_s\frac{1}{s(s+1)}$$

Используя (7.4) имеем:

$$\alpha_i[v]=\sum_{\substack{S\subseteq N\\ i\in S}}\sum_{T\subseteq S}(-1)^{s-t}v(T)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)=\sum_{T\subseteq N}v(T)\sum_{\substack{S\subseteq N\\ T\cup\{i\}\subseteq S}}(-1)^{s-t}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)$$

Пусть

$$\delta_n(T)=\sum_{\substack{S\subseteq N\\ T\cup\{i\}\subseteq S}}(-1)^{s-t}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)=\sum_{s=t}^{n}(-1)^{s-t}C_{n-t}^{s-t}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)=$$

$$=\sum_{s=t}^{n}(-1)^{s-t}C_{n-t}^{s-t}\int_0^1\left(x^{s-1}-x^{s}\right)dx=\int_0^1x^{t-1}\sum_{s=t}^{n}(-1)^{s-t}C_{n-t}^{s-t}x^{s-t}dx-$$

$$\int_0^1x^{t}\sum_{s=t}^{n}(-1)^{s-t}C_{n-t}^{s-t}x^{s-t}dx=\int_0^1x^{t-1}(1-x)^{n-t}dx-\int_0^1x^{t}(1-x)^{n-t}dx=$$

$$=\frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}-\frac{t!(n-t)!}{(n+1)!}=\gamma_n(T)\left(1-\frac{t}{n+1}\right)$$

Тогда значение α есть:

$$\alpha_i[v]=\sum_{T\subseteq N}v(T)\gamma_n(T)\left(1-\frac{t}{n+1}\right)=\sum_{\substack{T\subseteq N\\ i\in T}}\gamma_n(T)\left(1-\frac{t}{n+1}\right)\left[v(T)-v(T\setminus\{i\})\right]$$

Литература

1. Brams, S.J., W.F.Lucas, P.D.Straffin Jr. (Eds) Political and Related Models. - New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1983.
2. Shapley,L.S. and M. Shubik. A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System. - The American Political Science Review, 48,1954: pp.:787-792
3. Banzhaf, J. Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis. Rutgers Law Review 18, 1965, pp.:317-43.
4. Banzhaf, J. (1968). One Man 3.312... votes: A Mathematical Analysis of the Electoral College; Villanova Law Review, Vol.13(2), 1968, pp.304-332.
5. Shapley, Lloyd S. A value for n person games, Ann. Math. Studies 28, 1953: pages 307-318.
6. Owen, G. Multilinear extensions of games, Management Sci., 1972: pp.64-79.
7. Straffin, P.D. Homogeneity, independence and power indices, Public Choice, 30, 1977: 107-118.
8. Akimov, V. and W. Kerby: "An Average Value Function for Cooperative Games", in "Power Indices and Coalition Formation", edited by M. J. Holler and G. Owen and published by Kluwer Academic Publishers; preliminary publication: Homo Oeconomicus 17 (1/2), 2000.
9. Owen, G. Game Theory, Acad.Press, 1982.
10. Lucas, W.F. Measuring Power in Weighted Voting Systems. In: "Political and Related Models", New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag. Ed. by Brams, S.J., W.F.Lucas, P.D.Straffin Jr, 1983.
11. Straffin, P.D. Jr. (1994) Power and stability in politics. In: Handbook of Game Theory, V.2, Ed. by R.J. Aumann and S. Hart, Elsevier Science B.V.
12. Kerby, W., and Gobeler F. The distribution of voting power in the UN. Nova Journal of Mathematics, Game Theory, and Algebra, 6, No.1, 1996: pp.55-63.
13. O'Neill, B. Power and satisfaction in the UN Security Council, J. of Conflict Resolution, V. 40, #2, 1996: pp.219-237.

Акимов Владимир Павлович. Профессор кафедры математических методов и информационных технологий Московского государственного института международных отношений. Окончил Московский физико-технический институт в 1978 году. Доктор физико-математических наук, доцент. Автор более 50 печатных работ. Область научных интересов: искусственный интеллект, математическое моделирование, теория игр. E-mail: V_Akimov55@mail.ru