

Алгоритмы дедукции для некоторых расширений интервальной логики Аллена

Аннотация. Рассматриваются расширяющие интервальную логику Аллена языки, предложениями которых служат булевы комбинации предложений логики Аллена, возможно, с метрической информацией. Представлены некоторые алгоритмы дедукции для этих языков. Алгоритмы основаны на методе аналитических таблиц.

Ключевые слова: темпоральные логики, интервальная логика Аллена, метод аналитических таблиц, алгоритмы дедукции.

Введение. Основные определения

На разработку различных практических темпоральных логических систем искусственного интеллекта большое влияние оказала и оказывает интервальная логика Аллена [1]. Логика Аллена применялась для решения многих задач искусственного интеллекта, например, планирование действий агентов и расписание, понимание естественного языка, рассуждение здравого смысла и т.д. [2-6].

В интервальной логике Аллена (обозначим ее **LA**) рассматриваются 7 базовых интервальных отношений и их инверсии. Эти отношения обозначаются так: **b** (before – раньше), **m** (meets – встречается), **o** (overlaps – перекрывает), **f** (finishes – заканчивает), **s** (starts – начинает), **d** (during – в течение), **e** (equates – равняется). Инверсия отношения обозначается звездочкой «*» (таким образом, например, $A o^* B$ имеет место тогда и только тогда, когда верно $B o A$). Интерпретация этих отношений показана в Табл. 1, где A, B означают временные интервалы, а A^-, A^+, B^-, B^+ – их концы. Мы предполагаем, что интервалы не вырождаются в точки, т.е. всегда $A^- < A^+$ для любого интервала A .

Табл. 1. Связки Аллена

Интервальное отношение	Иллюстрация	Отношение между конечными точками
$A b B$ $B b^* A$		$A^+ < B^-$
$A m B$ $B m^* A$		$A^+ = B^-$
$A o B$ $B o^* A$		$A^- < B^-, B^- < A^+, A^+ < B^+$
$A d B$ $B d^* A$		$B^- < A^-, A^+ < B^+$
$A s B$ $B s^* A$		$A^- = B^-, A^+ < B^+$
$A f B$ $B f^* A$		$B^- < A^-, A^+ = B^+$
$A e B$		$A^- = B^-, A^+ = B^+$

Предложениями логики Аллена **LA** являются выражения вида $A \omega B$, где ω – любое подмножество множества $\Omega = \{b, b^*, m, m^*, o, o^*, f, f^*, s, s^*, d, d^*, e\}$. (Таким образом, при фиксированных A и B имеется ровно 2^{13} различных предложений логики Аллена.) Атомарное предложение логики **LA** – это предложение $A \omega B$ с одноэлементным подмножеством ω , т.е. оно имеет вид $A \{\alpha\} B$, $\alpha \in \Omega$ (но обычно фигурные скобки не ставятся).

Предложение $A \omega B$ интерпретируется так же, как дизъюнкция $\bigvee \{A \alpha B \mid \alpha \in \omega\}$. Поэтому, например, имеют место эквивалентности: $A o^*ds B \approx A o^* B \vee A d B \vee A s B \approx B o A \vee A d B \vee A s B$. Здесь o^*ds – сокращенная запись для подмножества $\{o^*, d, s\}$.

Как и во всякой логике, в логике Аллена имеется отношение \models логического следования. Пусть \mathcal{O} – онтология в языке **LA**, т.е. конечное множество предложений **LA**: $\mathcal{O} = \{A_1 \omega_1 B_1, A_2 \omega_2 B_2, \dots, A_m \omega_m B_m\}$, и $A \omega B$ – произвольное предложение **LA**, где $A, B \in \{A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_m, B_m\}$. По определению $A \omega B$ есть логическое следствие из онтологии \mathcal{O} , если нет такого назначения символам A_i ($1 \leq i \leq m$) темпоральных интервалов, при котором все предложения $A_i \omega_i B_i$ ($1 \leq i \leq m$) истинны, а предложение $A \omega B$ ложно.

Аллен предложил полиномиальный алгоритм для получения логических следствий, основанный на некоторой алгебре с операцией, заданной на множестве Ω . Но, к сожалению, этот алгоритм не является полным (раздел 1.1).

Выразительность логики **LA** можно увеличить, если добавить к атомарным предложениям метрическую информацию. Возьмем, например, атомарное предложение $A o B$. Оно характеризуется неравенствами $A^- < B^-$, $B^- < A^+$, $A^+ < B^+$ (третий столбец Табл.1) и $A^- < A^+$, $B^- < B^+$, которые можно интерпретировать как то, что отрезки $[A^-, B^-]$, $[B^-, A^+]$, $[A^+, B^+]$, $[A^-, A^+]$ и $[B^-, B^+]$ имеют положительные длины. Естественное обобщение состоит в задании длин этих отрезков или в задании оценок для них. Например, если нам известно, что интервал A имеет длину 6, интервал B – длину 5, а длина перекрытия интервалов A и B не меньше 2 и не больше 3, то мы имеем следующие равенства и неравенства: $A^+ - A^- = 6$, $B^+ - B^- = 5$, и $2 \leq A^+ - B^- \leq 3$. Эту информацию мы представляем выражением $A o(A^+ - A^- = 6, B^+ - B^- = 5, 2 \leq A^+ - B^- \leq 3) B$, которое будем считать предложением с метрической информацией в языке, являющимся расширением языка **LA**. Этот расширенный язык обозначим $\mu\mathbf{LA}$. Синтаксис языка $\mu\mathbf{LA}$ определяется так:

- атомарное ограничение – это равенство и неравенства вида $X - Y = r$, $X - Y > r$, $X - Y \geq r$, $X - Y < r$ и $X - Y \leq r$, где X, Y – концы интервалов, $X \neq Y$ и r – натуральное число;

- произвольное ограничение – это конъюнкция атомарных ограничений, причем точка с запятой используется как знак для конъюнкции;

- связка Аллена с метрическими ограничениями – это выражение вида $\alpha(\lambda)$, где $\alpha \in \Omega$ и λ – ограничение. При этом ограничение λ должно быть согласовано со связкой α в следующем смысле: (а) если $\alpha = b$, то λ использует только разности $A^+ - A^-$, $B^+ - B^-$, $B^- - A^+$; (б) если $\alpha = f$, то λ использует только разности $A^+ - A^-$, $B^+ - B^-$, $A^+ - B^+$, $A^- - B^-$; (в) и т.д.;

- предложение логики $\mu\mathbf{LA}$ – это выражение вида $A \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k B$, где α_k – связка Аллена или связка Аллена с метрическими ограничениями.

В данной работе мы будем рассматривать для спецификации онтологий булево расширение логики Аллена, которое обозначим \mathbf{LA}^+ . Синтаксис языка \mathbf{LA}^+ определяется следующим образом.

Сигнатура Σ состоит из конечного множества пропозициональных переменных и конечного множества интервальных переменных. Элементарными предложениями языка \mathbf{LA}^+ в сигнатуре Σ являются:

- пропозициональные переменные $p \in \Sigma$;
- предложения $A \omega B$ языка **LA**, где $A, B \in \Sigma$ и $\omega \subseteq \Omega$;

Произвольными предложениями языка \mathbf{LA}^+ в сигнатуре Σ являются:

- элементарные предложения;
- выражения вида $\sim\phi$, $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$ – предложения в сигнатуре Σ , если ϕ и ψ – предложения в сигнатуре Σ . Кроме того, как сокращение, используется предложение $\phi \rightarrow \psi$.

Семантика языка \mathbf{LA}^+ определяется естественным образом через назначения каждой пропозициональной переменной $p \in \Sigma$ истинностного значения “ p ” $\in \{0, 1\}$ и каждой интервальной пере-

менной $A \in \Sigma$ пары (r, s) чисел $r, s \in \{0, 1, 2, \dots\}$ с $r \leq s$. Значения произвольных предложений языка \mathbf{LA}^+ определяются по правилам: “ $\sim\varphi$ ” = \sim “ φ ”, “ $\varphi \wedge \psi$ ” = “ φ ” \wedge “ ψ ”, “ $\varphi \vee \psi$ ” = “ φ ” \vee “ ψ ”, “ $\varphi \rightarrow \psi$ ” = “ φ ” \rightarrow “ ψ ”, “ $A \omega B$ ” = “ A ” ω “ B ”.

Язык \mathbf{LA}^+ существенно более выразительный, чем язык \mathbf{LA} . В частности, в языке \mathbf{LA}^+ можно описывать знание о действиях агентов с учетом их временных интервалов и условий выполнения действий. Рассмотрим простой пример.

Пример 1. Пусть имеются два агента, причем первый агент может выполнять действия a и b , а второй – действие c . Действия эти требуют некоторого времени, и поэтому с этими действиями ассоциированы соответственно временные интервалы A, B, C . Кроме того, есть некоторые условия p и q , для которых имеет место следующее: (1) Если верно p , то ни в какой момент времени действия a и b не совершаются одновременно; (2) Если верно q , то действие b совершается во время действия c . Рассмотрим вопрос: (3) Какие атомарные временные отношения невозможны между действиями a и c в предположении, что оба условия p и q выполнены?

Легко видеть, что утверждения (1), (2) и вопрос (3) в языке \mathbf{LA}^+ можно записать так: $p \rightarrow A \mathbf{bb}^* B, q \rightarrow B \mathbf{edfs} C$ и $p \wedge q \rightarrow \sim A x C$. (В самом деле, предложение $A \mathbf{bb}^* B$ означает, что интервалы A и B не пересекаются; следовательно, предложение $A \mathbf{bb}^* B$ выражает отсутствие момента времени, при котором действия a и b выполняются одновременно.) Ответом на вопрос служат такие атомарные отношения $x \in \Omega$, что имеет место логическое следствие:

$$\{p \rightarrow A \mathbf{bb}^* B, q \rightarrow B \mathbf{edfs} C\} \models p \wedge q \rightarrow \sim A x C.$$

В дальнейшем мы найдем, что этими отношениями являются d^*, e, f^* и s^* (далее Пример 6).

(Конец примера 1.)

Через $\mu\mathbf{LA}^+$ обозначим логику, предложениями которой служат предложения \mathbf{LA}^+ с метрической информацией.

В данной работе изложим метод дедукции для логик \mathbf{LA}^+ и $\mu\mathbf{LA}^+$ с применением аналитических таблиц [5], и опишем алгоритмы дедукции, основанные на этом методе.

1. Два метода дедукции в логике \mathbf{LA}

Первый метод использует матричное представление онтологии в языке \mathbf{LA} и специальное произведение матриц, использующее операции алгебры Аллена.

1.1. Алгоритм Аллена

Дж. Аллен предложил полиномиальный алгоритм для получения логических следствий в \mathbf{LA} , основанный на некоторой алгебре с операцией « \circ », заданной на множестве Ω . Этот алгоритм обозначим $AL1$.

Для произвольных $\alpha, \beta \in \Omega$ произведение $\alpha \circ \beta$ определяется как множество всех таких $\gamma \in \Omega$, что предложения $A \alpha B, B \beta C$ и $A \gamma C$ совместны (т.е. существует назначение интервалов именам A, B и C такое, что предложения $A \alpha B, B \beta C$ и $A \gamma C$ истинны). Например, $s \circ s^* = s^* \circ s$ (Рис. 1).

Операция « \circ » продолжается на подмножества множества Ω по следующему правилу: $\omega_1 \circ \omega_2 = \bigcup \{\alpha \circ \beta \mid \alpha \in \omega_1, \beta \in \omega_2\}$. Например, $bs \circ df^*s = b \circ d \cup b \circ f^* \cup b \circ s \cup s \circ d \cup s \circ f^* \cup s \circ s = bdmos \cup b \cup b \cup d \cup bmo \cup s = bdmos$.

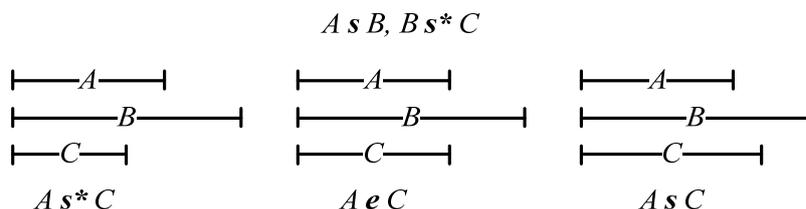


Рис. 1. Нахождение $s \circ s^*$

Табл. 2. Фрагмент таблицы умножения в алгебре Аллена

	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>f*</i>	<i>o</i>	<i>o*</i>	<i>s</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>bdmos</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>bdmos</i>	<i>b</i>
<i>b*</i>	Ω	<i>b*dfm*o*</i>	<i>b*</i>	<i>b*dfm*o*</i>	<i>b*</i>	<i>b*dfm*o*</i>
<i>m</i>	<i>b</i>	<i>dos</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>dos</i>	<i>m</i>
<i>m*</i>	<i>bd*f*mo</i>	<i>dfo*</i>	<i>m*</i>	<i>dfo*</i>	<i>b*</i>	<i>dfo*</i>
<i>s</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>bmo</i>	<i>bmo</i>	<i>dfo*</i>	<i>s</i>

В Табл. 2 показан фрагмент таблицы умножения для алгебры Аллена (полная таблица есть в [1]).

Для онтологии \mathcal{O} можно предполагать, что она не содержит различных предложений с одинаковыми интервалами: если в \mathcal{O} входят предложения $A \omega_1 B$ и $A \omega_2 B$ с $\omega_1 \neq \omega_2$, то их можно заменить на одно предложение $A \omega_1 \cap \omega_2 B$.

С произвольной онтологией \mathcal{O} , содержащей интервалы C_1, C_2, \dots, C_n , следующим образом свяжем матрицу $M(\mathcal{O}) = \|m_{ij}(\mathcal{O})\|$ размера $n \times n$. Положим $m_{ij}(\mathcal{O}) = \omega$, если $C_i \omega C_j \in \mathcal{O}$, и $m_{ij}(\mathcal{O}) = \Omega$, если в \mathcal{O} нет предложения с интервалами C_i и C_j .

Алгоритм Аллена включает возведение матрицы $M(\mathcal{O})$ в степень до получения стабилизации этой матрицы (стабилизированная матрица будет содержать логические следствия из онтологии \mathcal{O}).

Алгоритм AL1:

Вход: онтология \mathcal{O} в языке LA.

Переменная: матрица M.

Выход: онтология \mathcal{O}_1 , содержащая логические следствия из \mathcal{O} .

1. По онтологии \mathcal{O} построить матрицу $M(\mathcal{O})$ и положить $M := M(\mathcal{O})$.
2. Последовательно применять $M := M^2$ до тех пор пока M не стабилизируется, т.е. пока текущее значение M не станет равным предыдущему значению M.
3. По матрице M построить онтологию \mathcal{O}_1 . Выдать \mathcal{O}_1 .

Следующая программа вычисляет стабилизированную матрицу;

$M := M(\mathcal{O}); N := M \circ M; \text{while } M \neq N \text{ do } M := N; N := M \circ M \text{ od}; \text{return } M.$

Алгоритм работает с матрицами, элементами которых служат подмножества множества Ω . Произведение $R = P \circ Q$ матриц P и Q определяется так: $r_{ij} = \cap \{p_{ik} \circ q_{kj} \mid 1 \leq k \leq n\}$.

Рассмотрим пример применения алгоритма Аллена.

Пример 2. Возьмем онтологию $\mathcal{O} = \{A \text{ } b \text{ } m \text{ } B, B \text{ } b \text{ } C, A \text{ } o \text{ } D, C \text{ } o^* \text{ } D\}$ и предложение $B \text{ } d \text{ } D$. Очевидно, что $\mathcal{O} \models B \text{ } d \text{ } D$ (Рис. 2). На Рис. 3 показаны матрицы, являющиеся двумя последовательными значениями переменной M при применении алгоритма. Третье значение M совпадает со вторым. Поэтому матрица $M(\mathcal{O})^2$ стабилизирована. Из матрицы $M(\mathcal{O})^2$ получаем, что предложения $A \text{ } b \text{ } C$ и $B \text{ } d \text{ } D$ логически следуют из онтологии \mathcal{O} .

Рассмотрим, например, как был получен элемент матрицы $M(\mathcal{O})^2$, стоящий в первой строке на третьем месте. Этот элемент равен произведению первой строки матрицы $M(\mathcal{O})$ на ее второй столбец (Табл. 2): $e \circ \Omega \cap b \text{ } m \circ b \cap \Omega \circ e \cap o \circ o = \Omega \cap (b \circ b \cup m \circ b) \cap \Omega \cap b \text{ } m \circ o = (b \cup b) \cap b \text{ } m \circ o = b \cap b \text{ } m \circ o = b$.

(Конец примера 2.)



Рис. 2. Логическое следствие $B \text{ } d \text{ } D$ из \mathcal{O}

<i>e</i>	<i>bm</i>	Ω	<i>o</i>	<i>e</i>	<i>bm</i>	<i>b</i>	<i>o</i>
<i>b*m*</i>	<i>e</i>	<i>b</i>	Ω	<i>b*m*</i>	<i>e</i>	<i>b</i>	<i>d</i>
Ω	<i>b*</i>	<i>e</i>	<i>o*</i>	<i>b*</i>	<i>b*</i>	<i>e</i>	<i>o*</i>
<i>o*</i>	Ω	<i>o</i>	<i>e</i>	<i>o*</i>	<i>d*</i>	<i>o</i>	<i>e</i>
(a) $M(\mathcal{O})$				(б) $M(\mathcal{O})^2$			

Рис. 3. Матрицы, полученные при применении алгоритма Аллена

Замечания. 1) Легко показать, что $O(n^3 \log n)$ является верхней асимптотической оценкой для числа операций, затрачиваемых алгоритмом Аллена для онтологий, содержащих $\leq n$ временных интервалов. 2) Алгоритм Аллена не полон: существуют онтология \mathcal{O} и предложение λ такие, что $\mathcal{O} \models \lambda$, но в выданной алгоритмом матрице нет предложения λ [1]. 3) Известно, что задача распознавания $\mathcal{O} \models \lambda$ coNP-полна [8]. Следовательно, не существует полиномиального алгоритма для этой задачи (если считать, что $P \neq NP$).

Фактически алгоритм Аллена есть способ организации дедукции, использующих правила вывода, указанные в Табл. 3. С онтологией \mathcal{O} можно связать взвешенный ориентированный граф $\Gamma(\mathcal{O})$, вершинами которого служат входящие в онтологию интервалы. Вершина A соединяется с вершиной B дугой с меткой ω , если $A \omega B \in \mathcal{O}$. Граф $\Gamma(\mathcal{O}_1)$ для онтологии \mathcal{O}_1 , полученной в результате применения к \mathcal{O} алгоритма AL1, является транзитивным замыканием графа $\Gamma(\mathcal{O})$.

Табл. 3. Правила вывода для логики LA

$A \omega_1 B \quad B \omega_2 C$	$A \omega_1 B \quad A \omega_2 B$	$A \omega B$
п1: -----	п2: -----	п3: -----
$A \omega_1 \omega_2 C$	$A \omega_1 \cap \omega_2 B$	$B \omega^* A$

Алгоритм Аллена можно применять для выяснения противоречивости (невыполнимости) онтологий. Записанная в языке LA онтология \mathcal{O} противоречива тогда и только тогда, когда, применив алгоритм Аллена к матрице $M(\mathcal{O})$, мы получим матрицу, содержащую пустое множество в качестве элемента.

В онтологию можно включать также отрицания предложений логики LA, т.е. выражения вида $\sim A \omega B$. Легко видеть, что имеет место эквивалентность $\sim A \omega B \approx A -\omega B$, где $-\omega$ обозначает дополнение в Ω множества ω , т.е. $-\omega = \Omega \setminus \omega$. В самом деле, $A \Omega B$ всегда истинно и $A \Omega B \approx A \omega \cup (A \setminus \omega) B \approx A \omega \cup -\omega B \approx A \omega \vee A -\omega B$. Следовательно, $\sim A \omega B \approx A -\omega B$. Благодаря этому входящие в онтологию отрицательные предложения можно заменить на положительные. С другой стороны, отрицательное предложение $\sim A \omega B$ логики Аллена эквивалентно конъюнкции $\bigwedge \{A -\alpha B \mid \alpha \in \omega\}$, и поэтому $\sim A \omega B$ в онтологии можно заменить на множество $\{A -\alpha B \mid \alpha \in \omega\}$.

Второй метод дедукции для распознавания противоречивости онтологии в LA использует критерий противоречивости (несовместности) системы неравенств, ассоциированной с онтологией.

1.2. Сведение задачи о противоречивости онтологий в логике Аллена к задаче о несовместности системы неравенств и равенств

Определим функцию \mathbf{tr} , транслирующую атомарные предложения логики LA в неравенства и равенства, а отрицание атомарных предложений – в дизъюнкцию неравенств и равенств:

$$\begin{aligned} \mathbf{tr}(A \mathbf{b} B) &= \{A^+ < B^-\}, \quad \mathbf{tr}(\sim A \mathbf{b} B) = \{B^- \leq A^+\}, \\ \mathbf{tr}(A \mathbf{m} B) &= \{A^+ = B^-\}, \quad \mathbf{tr}(\sim A \mathbf{m} B) = \{(A^+ < B^-) \vee (B^- < A^+)\}, \\ \mathbf{tr}(A \mathbf{o} B) &= \{A^- < B^-, B^- < A^+, A^+ < B^+\}, \quad \mathbf{tr}(\sim A \mathbf{o} B) = \{(B^- \leq A^-) \vee (A^+ \leq B^-) \vee (B^+ \leq A^+)\}, \\ \mathbf{tr}(A \mathbf{d} B) &= \{B^- < A^-, A^+ < B^+\}, \quad \mathbf{tr}(\sim A \mathbf{d} B) = \{(A^- \leq B^-) \vee (B^+ \leq A^+)\}, \\ \mathbf{tr}(A \mathbf{s} B) &= \{A^- = B^-, A^+ < B^+\}, \quad \mathbf{tr}(\sim A \mathbf{s} B) = \{(A^- < B^-) \vee (B^- < A^-) \vee (B^+ \leq A^+)\}, \\ \mathbf{tr}(A \mathbf{f} B) &= \{B^- < A^-, A^+ = B^+\}, \quad \mathbf{tr}(\sim A \mathbf{f} B) = \{(A^- \leq B^-) \vee (A^+ < B^+) \vee (B^+ < A^+)\}, \\ \mathbf{tr}(A \mathbf{e} B) &= \{A^- = B^-, A^+ = B^+\}, \quad \mathbf{tr}(\sim A \mathbf{e} B) = \{(A^- < B^-) \vee (B^- < A^-) \vee (A^+ < B^+) \vee (B^+ < A^+)\}. \end{aligned}$$

Эту функцию распространим на предложения логики LA и на отрицания таких предложений: $\mathbf{tr}(A \omega B) = \bigvee \{\mathbf{tr}(A \alpha B) \mid \alpha \in \omega\}$, $\mathbf{tr}(\sim A \omega B) = \bigwedge \{\mathbf{tr}(\sim A \alpha B) \mid \alpha \in \omega\}$. Наконец, функцию \mathbf{tr} продолжим на произвольные онтологии, составленные из предложений LA и отрицаний предложений LA: $\mathbf{tr}(\mathcal{O}) = \bigcup \{\mathbf{tr}(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{O}\}$.

Пусть A_1, A_2, \dots, A_m – все имена интервалов, входящие в онтологию \mathcal{O} . Множество $S(\mathcal{O}) = \bigcup \{A_i^- < A_i^+ \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \mathbf{tr}(\mathcal{O})$ неравенств, равенств и дизъюнкций неравенств можно рассматривать как систему с неизвестными $A_i^-, A_i^+ (1 \leq i \leq m)$.

Легко доказать, что онтология \mathcal{O} непротиворечива тогда и только тогда, когда система $S(\mathcal{O})$ совместна, т.е. имеет решение. Таким образом, задача выяснения противоречивости онтологии сводится к задаче выяснения несовместности системы $S(\mathcal{O})$.

Очевидно, если онтология \mathbf{O} состоит только из атомарных предложений, то множество $S(\mathbf{O})$ не содержит дизъюнкций. Вообще, систему неравенств и равенств, не содержащую дизъюнкций, назовем *простой*. Оказывается, систему $S(\mathbf{O})$ для произвольной онтологии \mathbf{O} (возможно содержащей отрицательные предложения) можно заменить на совокупность простых систем S_1, S_2, \dots, S_k так, что онтология \mathbf{O} противоречива тогда и только тогда, когда каждая из систем S_i несовместна. Покажем на примере, как сделать эту замену.

Пример 3. Возьмем онтологию $\mathbf{O} = \{A \mathbf{b} m B, B \mathbf{b} C, A \mathbf{o} D, C \mathbf{o}^* D, \sim B \mathbf{d} D\}$ и покажем, что эта онтология противоречива. (Заметим, что эта задача эквивалентна задаче $\{A \mathbf{b} m B, B \mathbf{b} C, A \mathbf{o} D, C \mathbf{o}^* D\} \models B \mathbf{d} D$, которая рассматривалась в Примере 2). Имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{tr}(A \mathbf{b} m B) &= \{A^+ < B^- \vee A^+ = B^-\}, \quad \mathbf{tr}(B \mathbf{b} C) = \{B^+ < C^-\}, \quad \mathbf{tr}(A \mathbf{o} D) = \{A^- < D^-, D^- < A^+, A^+ < D^+\}, \\ \mathbf{tr}(C \mathbf{o}^* D) &= \mathbf{tr}(D \mathbf{o} C) = \{D^- < C^-, C^- < D^+, D^+ < C^+\}, \\ \mathbf{tr}(\sim B \mathbf{d} D) &= \sim\{D^- < B^-, B^- < D^+\} = \{B^- \leq D^- \vee D^+ \leq B^+\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S(\mathbf{O}) = \{A^- < A^+, B^- < B^+, C^- < C^+, D^- < D^+, A^+ < B^- \vee A^+ = B^-, B^+ < C^-, A^- < D^-, D^- < A^+, A^+ < D^+, D^- < C^-, C^- < D^+, D^+ < C^+, B^- \leq D^- \vee D^+ \leq B^+\}.$$

Распределяя дизъюнкции $A^+ < B^- \vee A^+ = B^-$ и $B^- \leq D^- \vee D^+ \leq B^+$ из системы $S(\mathbf{O})$ получаем 4 простые системы:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{A^- < A^+, B^- < B^+, C^- < C^+, D^- < D^+, A^+ < B^-, B^+ < C^-, A^- < D^-, D^- < A^+, A^+ < D^+, D^- < C^-, C^- < D^+, D^+ < C^+, B^- \leq D^-\}; \\ S_2 &= \{A^- < A^+, B^- < B^+, C^- < C^+, D^- < D^+, A^+ < B^-, B^+ < C^-, A^- < D^-, D^- < A^+, A^+ < D^+, D^- < C^-, C^- < D^+, D^+ < C^+, D^+ \leq B^+\}; \\ S_3 &= \{A^- < A^+, B^- < B^+, C^- < C^+, D^- < D^+, A^+ = B^-, B^+ < C^-, A^- < D^-, D^- < A^+, A^+ < D^+, D^- < C^-, C^- < D^+, D^+ < C^+, B^- \leq D^-\}; \\ S_4 &= \{A^- < A^+, B^- < B^+, C^- < C^+, D^- < D^+, A^+ = B^-, B^+ < C^-, A^- < D^-, D^- < A^+, A^+ < D^+, D^- < C^-, C^- < D^+, D^+ < C^+, D^+ \leq B^+\}. \end{aligned}$$

Ясно, что система $S(\mathbf{O})$ совместна тогда и только тогда, когда совместна хотя бы одна из систем S_i . Следовательно, система $S(\mathbf{O})$ несовместна тогда и только тогда, когда несовместны все четыре системы S_i .

(Конец Примера 3.)

Существует простой и быстрый алгоритм, выясняющий несовместность простых систем неравенств и равенств. С простой системой S свяжем ориентированный помеченный граф $\Gamma(S)$, вершинами которого объявляем неизвестные из S , а дугу из вершины X в вершину Y с меткой «<», « \leq » или «= \Rightarrow » проводим тогда и только тогда, когда $X < Y, X \leq Y$ или $X = Y$ (соответственно) содержатся в S . Легко доказать, что система S несовместна тогда и только тогда, когда граф $\Gamma(S)$ имеет цикл, содержащий хотя бы одну дугу, отвечающую строгому неравенству. Например, для систем S_i ($1 \leq i \leq 4$) из Примера 3 имеем графы $\Gamma(S_i)$, изображенные на Рис. 4 (где знак «<» дугах не обозначен). В графе $\Gamma(S_1)$ содержится цикл A^+, B^-, D^-, A^+ , определяющий цепь неравенств $A^+ < B^- \leq D^- < A^+$, из которой следует противоречие $A^+ < A^+$. В графах $\Gamma(S_2), \Gamma(S_3)$ и $\Gamma(S_4)$ также имеются цикл B^+, C^-, D^+, B^+ , цикл A^+, B^-, D^-, A^+ и цикл B^+, C^-, D^+, B^+ , определяющие противоречивые цепи неравенств.

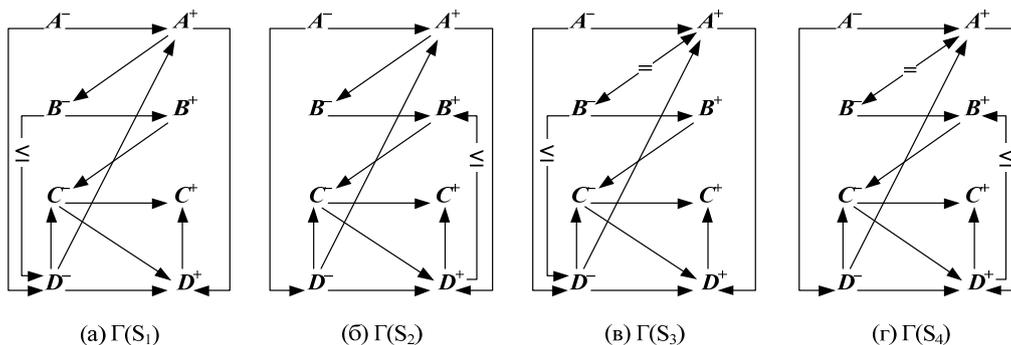


Рис. 4. Графы для систем S_i из Примера 3

1.3. Алгоритм для второго метода выяснения противоречивости онтологий в логике Аллена

Второй метод для распознавания противоречивости онтологий (и значит, также распознавания логических следствий из онтологий) может быть реализован в следующем алгоритме.

Алгоритм AL2:

Вход: онтология O в логике LA.

Выход: сообщения « O противоречива» или « O непротиворечива»

1. По онтологии O , составленной из предложений логики Аллена и отрицаний таких предложений, используя преобразование tr , построить систему неравенств и равенств $S(O)$.
2. Распределяя содержащиеся в O дизъюнкции, построить последовательность простых систем S_1, S_2, \dots, S_k .
3. Для каждой простой системы S_i построить граф $\Gamma(S_i)$.
4. К каждому графу $\Gamma(S_i)$ применить процедуру поиска цикла, содержащего хотя бы одну дугу со знаком «<».
5. Если в каждом графе $\Gamma(S_i)$ найден такой цикл, то выдать сообщение « O противоречива»; в противном случае выдать сообщение «онтология O непротиворечива».

Приведенные примеры работы алгоритмов AL1 и AL2 свидетельствуют, что алгоритм AL2 гораздо более трудоемкий по сравнению с алгоритмом AL1. Однако алгоритм AL2 является полным в отличие от алгоритма AL1. Достоинством алгоритма AL2 является также возможность его обобщения, позволяющего учесть метрическую информацию.

Вычислительная сложность алгоритма AL2 существенно зависит от числа дизъюнктов в $S(O)$ и размеров этих дизъюнктов. Если в $S(O)$ содержатся дизъюнкции $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l$ с r_1, r_2, \dots, r_l неравенствами и равенствами (соответственно), то число k простых систем, получаемых в пункте 2 алгоритма, равно произведению $r_1 r_2 \dots r_l$.

2. Онтологии в языке μLA

2.1. Сведение задачи о противоречивости онтологий в языке μLA к задаче о несовместности систем неравенств

Определенная в параграфе 1.2 функция tr естественным образом определяется также для предложений и отрицаний предложений языка μLA , в результате чего получаются система равенств вида $X = Y$ и нестрогих неравенств вида $X - Y \geq r$ или $X - Y \geq -r$, где r – целое неотрицательное число. Как это делается, можно понять из следующих примеров.

Пример 4.

$$tr(A \ o(B^+ - A^+ \geq 2) \ B) = \{A^- < B^-, B^- < A^+, A^+ < B^+, B^+ - A^+ \geq 2\} = \{B^- - A^- > 0, A^+ - B^+ > 0, B^+ - A^+ > 0, B^+ - A^+ \geq 2\} = \{B^- - A^- \geq 1, A^+ - B^+ \geq 1, B^+ - A^+ \geq 1, B^+ - A^+ \geq 2\}. \quad (2.1.1)$$

$$tr(B \ bm \ C) = \{B^+ < C^- \vee B^+ = C^-\} = \{C^- - B^+ > 0 \vee C^- - B^+ = 0\} = \{C^- - B^+ \geq 1 \vee \{C^- - B^+ \geq 0, B^+ - C^- \geq 0\}\}. \quad (2.1.2)$$

$$tr(\sim A \ b(C^+ - A^- \geq 2) \ C) = \sim \{A^+ < C^-, C^+ - A^- \geq 2\} = \{\sim(A^+ < C^-) \vee \sim(C^+ - A^- \geq 2)\} = \{A^+ \geq C^- \vee C^+ - A^- < 2\} = \{A^+ - C^- \geq 0 \vee A^- - C^+ \geq -1\}. \quad (2.1.3)$$

Напомним: считаем, что время дискретно и принимает значения $0, 1, 2, \dots$, поэтому строгое неравенство $Z > r$ эквивалентно нестрогому неравенству $Z \geq 1+r$.

(Конец Примера 4.)

Для произвольной онтологии O , состоящей из предложений и отрицаний предложений языка μLA , положим: $tr(O) = \bigcup \{tr(\sigma) \mid \sigma \in O\}$ и $S(O) = \bigcup \{A_i^+ - A_i^- \geq 1 \mid 1 \leq i \leq m\} \cup tr(O)$, где $A_i (1 \leq i \leq m)$ – все интервалы из онтологии O .

Распределяя дизъюнкции из системы неравенств $S(O)$, получаем простые системы неравенств S_1, S_2, \dots, S_k . (Как и раньше, простой называется система, не содержащая дизъюнкций). С каждой простой системой $S_j (1 \leq j \leq k)$ связываем граф $\Gamma(S_j)$. Вершинами этого графа объявляются концы

входящих в онтологию \mathbf{O} интервалов, а помеченными дугами объявляются тройки (X, Y, r) такие, что неравенство $X - Y \geq r$ входит в S_j , и тройки $(X, Y, 0)$ такие, что равенство $X = Y$ входит в S_j . Рассмотрим пример.

Пример 5. Возьмем онтологию $\mathbf{O} = \{A \ o(B^+ - A^+ \geq 2, B \ bm \ C, \sim A \ b(C^+ - A^+ \geq 2) \ C)\}$. Тогда согласно (2.1.1), (2.1.2) и (2.1.3):

$$S(\mathbf{O}) = \{A^+ - A^- \geq 1, B^+ - B^- \geq 1, C^+ - C^- \geq 1, B^- - A^- \geq 1, A^+ - B^- \geq 1, B^+ - A^+ \geq 2, C^- - B^+ \geq 1 \vee \{C^- - B^+ \geq 0, B^+ - C^- \geq 0\}, A^+ - C^- \geq 0 \vee A^- - C^+ \geq -1\},$$

$$S_1 = \{A^+ - A^- \geq 1, B^+ - B^- \geq 1, C^+ - C^- \geq 1, B^- - A^- \geq 1, A^+ - B^- \geq 1, B^+ - A^+ \geq 2, C^- - B^+ \geq 1, A^- - C^+ \geq 0\},$$

$$S_2 = \{A^+ - A^- \geq 1, B^+ - B^- \geq 1, C^+ - C^- \geq 1, B^- - A^- \geq 1, A^+ - B^- \geq 1, B^+ - A^+ \geq 2, C^- - B^+ \geq 1, A^- - C^+ \geq -1\},$$

$$S_3 = \{A^+ - A^- \geq 1, B^+ - B^- \geq 1, C^+ - C^- \geq 1, B^- - A^- \geq 1, A^+ - B^- \geq 1, B^+ - A^+ \geq 2, C^- - B^+ \geq 0, B^+ - C^- \geq 0, A^- - C^+ \geq 0\},$$

$$S_4 = \{A^+ - A^- \geq 1, B^+ - B^- \geq 1, C^+ - C^- \geq 1, B^- - A^- \geq 1, A^+ - B^- \geq 1, B^+ - A^+ \geq 2, C^- - B^+ \geq 0, B^+ - C^- \geq 0, A^- - C^+ \geq -1\}.$$

На Рис. 5 изображены графы $\Gamma(S_1), \dots, \Gamma(S_4)$ (Метка «1» ради простоты представления на дугах не обозначена). В графе $\Gamma(S_1)$ имеется цикл A^+, B^+, C^+, A^+ , этот цикл имеет длину 3, которая может быть получена путем сложения неравенств $B^+ - A^+ \geq 2, C^- - B^+ \geq 1, A^- - C^+ \geq 0$: $B^+ - A^+ + C^- - B^+ + A^- - C^+ \geq 2 + 1 + 0 = 3$. Отсюда получаем противоречие $0 \geq 3$.

Замечание. Вообще, легко доказать, что произвольная простая система неравенств (строгих и нестрогих) совместна тогда и только тогда, когда она не имеет циклов положительной длины [10, 11].

В графах $\Gamma(S_2), \Gamma(S_3)$ и $\Gamma(S_4)$ также имеются цикл A^+, B^+, C^+, A^+ (длины 4), цикл A^+, B^+, C^+, A^+ (длины 2), и цикл A^+, B^+, C^+, A^+ (длины 3), определяющие противоречия $0 \geq 4, 0 \geq 2$ и $0 \geq 3$ соответственно.

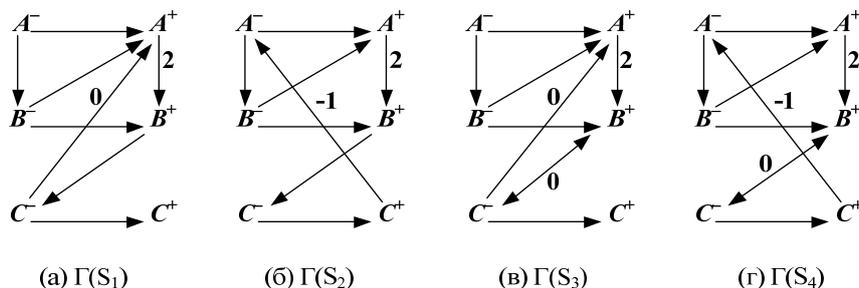


Рис. 5. Графы для систем неравенств S_j из Примера 5

(Конец Примера 5.)

2.2. Алгоритм распознавания противоречивости онтологий в языке μLA

Пример 5 иллюстрирует применение алгоритма AL3 для распознавания противоречивости онтологий, который вполне подобен алгоритму AL2. Алгоритм AL3 получается путем замены в алгоритме AL2 словосочетаний «LA» на « μLA » и «цикла, содержащего хотя бы одну дугу со знаком «<>» (в пункте 4) на «цикла положительной длины».

Замечание. Если ограничиться онтологиями, составленными только из атомарных предложений (т.е. вида $A \ \alpha \ B$ ($\alpha \in \Omega$), то алгоритм AL3 будет, очевидно, полиномиальным).

3. Алгоритмы, основанные на методе аналитических таблиц

3.1. Алгоритмы для логики LA+

В Табл. 4 представлены правила вывода по методу аналитических таблиц для предложений с пропозициональными связками. Здесь рассматриваются означенные предложения. Запись вида $+s$ означает, что предложение истинно (в предполагаемой интерпретации), а запись $-s$ означает, что оно ложно. Эти правила соответствуют обычным определениям пропозициональных связок. Например, правило $(+ \wedge)$ соответствует тому, что если $\phi \wedge \psi$ истинно, то ϕ и ψ истинны, а правило $(- \wedge)$ соответствует тому, что если $\phi \wedge \psi$ ложно, то ϕ ложно или ψ ложно. Рассмотрим пример применения правил вывода.

Пример 6. Возьмем снова онтологию и предложение из Примера 1: $\mathcal{O} = \{p \rightarrow A \text{ bb}^* B, q \rightarrow B \text{ edfs } C\}$ и запрос $p \wedge q \rightarrow \sim A x C$, где x – неизвестная, значениями которой служат подмножества Ω .

Для того чтобы доказать логическое следствие $\mathcal{O} \models p \wedge q \rightarrow \sim A x C$, мы строим дерево вывода, изображенное на Рис.7. Построение дерева начинается с начальной ветви, содержащей формулы $+ p \rightarrow A \text{ bb}^* B, + q \rightarrow B \text{ edfs } C$ и $- p \wedge q \rightarrow \sim A x C$, что соответствует предположению о том, что множество формул $\{+ p \rightarrow A \text{ bb}^* B, + q \rightarrow B \text{ edfs } C, - p \wedge q \rightarrow \sim A x C\}$ невыполнимо, т.е. нет логического следствия $\mathcal{O} \models p \wedge q \rightarrow \sim A x C$.

Табл. 4. Правила вывода для пропозициональных связок

$\begin{array}{l} + \sim \varphi \\ (+ \sim): \text{-----} \\ - \varphi \end{array}$	$\begin{array}{l} - \sim \varphi \\ (- \sim): \text{-----} \\ + \varphi \end{array}$	$\begin{array}{l} + \varphi \wedge \psi \\ (+ \wedge): \text{-----} \\ + \varphi \\ + \psi \end{array}$	$\begin{array}{l} - \varphi \wedge \psi \\ (- \wedge): \text{-----} \\ - \varphi \mid - \psi \end{array}$
$\begin{array}{l} + \varphi \vee \psi \\ (+ \vee): \text{-----} \\ + \varphi \mid + \psi \end{array}$	$\begin{array}{l} - \varphi \vee \psi \\ (- \vee): \text{-----} \\ - \varphi \\ - \psi \end{array}$	$\begin{array}{l} + \varphi \rightarrow \psi \\ (+ \rightarrow): \text{-----} \\ - \varphi \mid + \psi \end{array}$	$\begin{array}{l} - \varphi \rightarrow \psi \\ (- \rightarrow): \text{-----} \\ + \varphi \\ - \psi \end{array}$

В этом дереве справа от формул указана информация о применении правила вывода. Например, указанная для формулы $+ q \rightarrow B \text{ edfs } C$ информация $[5, (+ \rightarrow)]$ говорит о том, что к этой формуле на пятом шаге было применено правило вывода $(+ \rightarrow)$. Слева от формулы может стоять номер шага вывода, на котором была получена эта формула. Например, записи $5: - q$ и $5: + B \text{ edfs } C$ означают, что формулы $- q$ и $+ B \text{ edfs } C$ были получены на пятом шаге вывода.

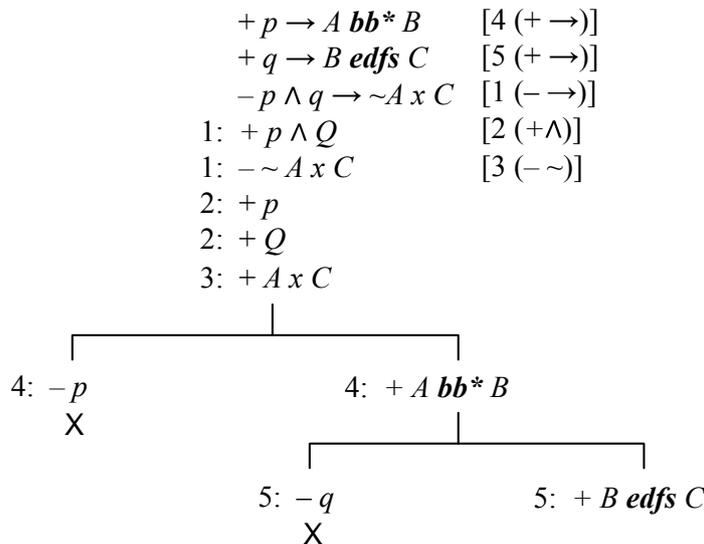


Рис. 6. Дерево вывода для доказательства логического следствия из Примера 6

Мы видим, что первая слева ветвь дерева замкнута в том смысле, что она содержит формулы, которые при любой интерпретации не могут быть одновременно истинными, так как здесь имеются противоречивые формулы $+ p$ и $- p$. Вторая ветвь также замкнута благодаря тому, что она содержит противоречивые формулы $+ q$ и $- q$ (замкнутость ветвей мы отметили знаком X).

Покажем, что третья ветвь, содержащая формулы $+ A x C, + A \text{ bb}^* B, + B \text{ edfs } C$, также замкнута, когда $x \subseteq d^*f^*s^*$. Для этого применим алгоритм Аллена к онтологии $\mathcal{O}_1 = \{A \text{ bb}^* B, B \text{ edfs } C, A x C\}$. На Рис. 7 показаны матрицы $M(\mathcal{O}_1)$ и $M(\mathcal{O}_1)^2$, полученные в результате применения алгоритма Аллена к онтологии \mathcal{O}_1 на шагах 1 и 2.

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccc} e & bb^* & x \\ bb^* & e & edfs \\ x^* & ed^*f^*s^* & e \end{array} \right| \\
 M(O_1)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccc} e & bb^* \cap x^*ed^*f^*s^* & bb^*mm^*oo^*dfs \cap x \\ bb^* \cap x^*edfs & e & bb^*e_x \cap edfs \\ bb^*mm^*oo^*d^*f^*s^* \cap x^* & bb^*e_x^* \cap ed^*f^*s^* & e \end{array} \right| \\
 M(O_1)^2
 \end{array}$$

Рис. 7. Матрицы, полученные на шагах 1 и 2 применения алгоритма Аллена к онтологии O_1

Стоящий в первой строке и третьем столбце элемент матрицы $M(O_1)^2$ получается так:

$$\begin{aligned}
 e_x \cap bb^*edfs \cap x^*e &= x \cap bb^*edfs \cap x = bb^*edfs \cap x \\
 &= (b \cdot e \cup b \cdot d \cup b \cdot f \cup b \cdot s \cup b^* \cdot e \cup b^* \cdot d \cup b^* \cdot f \cup b^* \cdot s) \cap x \\
 &= (b \cup bdmos \cup bdmos \cup b \cup b^* \cup b^*dfm^*o^* \cup b^* \cup b^*dfm^*o^*) \cap x \\
 &= bb^*dfmm^*oo^*s \cap x.
 \end{aligned}$$

Таким образом, предложение $A \ bb^*dfmm^*oo^*s \ \cap \ x \ C$ логически следует из O_1 . Но это предложение противоречиво тогда и только тогда, когда $bb^*dfmm^*oo^*s \ \cap \ x = \emptyset$, т.е. когда $x \subseteq \Omega \setminus bb^*dfmm^*oo^*s = d^*ef^*s^*$. Поэтому ответом на запрос $p \wedge q \rightarrow \sim A \ x \ C$ служит множество $x = d^*ef^*s^*$ и все его подмножества, в частности, d^* , e , f^* и s^* .

(Конец примера 6.)

В Табл. 5 представлены правила вывода для предложений, содержащих связки Аллена. Эти правила в точности соответствуют правилам, определяющим преобразование tr (параграф 1.2). Рассмотрим пример применения правил вывода из Табл. 4 и Табл. 5.

Табл. 5. Правила вывода для связок Аллена

$(+b):$ ----- $A^+ < B^-$	$(-b):$ ----- $B \leq A^+$
$(+m):$ ----- $A^+ = B^-$	$(-m):$ ----- $A^+ < B^- \mid B^- < A^+$
$(+o):$ ----- $A^- < B^-$ $B^- < A^+$ $A^+ < B^+$	$(-o):$ ----- $-A \ o \ B$ $B^- \leq A^- \mid A^+ \leq B^- \mid B^+ \leq A^+$
$(+f):$ ----- $B^- < A^-$ $A^+ = B^+$	$(-f):$ ----- $-A \ f \ B$ $A^- \leq B^- \mid A^+ < B^+ \mid B^+ < A^+$
$(+s):$ ----- $A^- = B^-$ $A^+ < B^+$	$(-s):$ ----- $-A \ s \ B$ $A^- < B^- \mid B^- < A^- \mid B^+ \leq A^+$
$(+d):$ ----- $B^- < A^-$ $A^+ < B^+$	$(-d):$ ----- $-A \ d \ B$ $A^- \leq B^- \mid B^+ \leq A^+$
$(+e):$ ----- $A^- = B^-$ $A^+ = B^+$	$(-e):$ ----- $-A \ e \ B$ $A^- < B^- \mid B^- < A^- \mid A^+ < B^+ \mid B^+ < A^+$

Пример 7. Возьмем онтологию $O = \{p \rightarrow A \ ds \ B, q \rightarrow B \ f \ C\}$ и докажем, что из этой онтологии логически следует предложение $p \wedge q \rightarrow A \ d \ C$.

Рассмотрим дерево вывода, показанное на Рис. 8. На четырех ветвях этого дерева содержатся предложения языка LA^+ , определяющие вместе со стандартными неравенствами $A^- < A^+$, $B^- < B^+$, $C^- < C^+$ следующие простые системы неравенств и равенств:

$$S_1 = \{A^- < A^+, B^- < B^+, C^- < C^+, C^- < B^-, B^+ = C^+, A^- \leq C^-, B^- < A^-, A^+ < B^+\},$$

$$S_2 = \{A^- < A^+, B^- < B^+, C^- < C^+, C^- < B^-, B^+ = C^+, A^- \leq C^-, A^- = B^-, A^+ < B^+\},$$

$$S_3 = \{A^- < A^+, B^- < B^+, C^- < C^+, C^- < B^-, B^+ = C^+, C^+ \leq A^+, B^- < A^-, A^+ < B^+\},$$

$$S_4 = \{A^- < A^+, B^- < B^+, C^- < C^+, C^- < B^-, B^+ = C^+, C^+ \leq A^+, A^- = B^-, A^+ < B^+\}.$$

Эти системы несовместны, так как содержат соответственно следующие противоречивые циклы неравенств и равенств: (1) $A^- \leq C^- < B^- < A^-$; (2) $A^- \leq C^- < B^- = A^-$; (3) $A^+ < B^+ = C^+ \leq A^+$; (4) $A^+ < B^+ = C^+ \leq A^+$. Таким образом, все четыре ветви в дереве вывода замкнуты. Следовательно, имеет место $\mathbf{O} \models p \wedge q \rightarrow A \mathbf{d} C$.

(Конец Примера 7.)

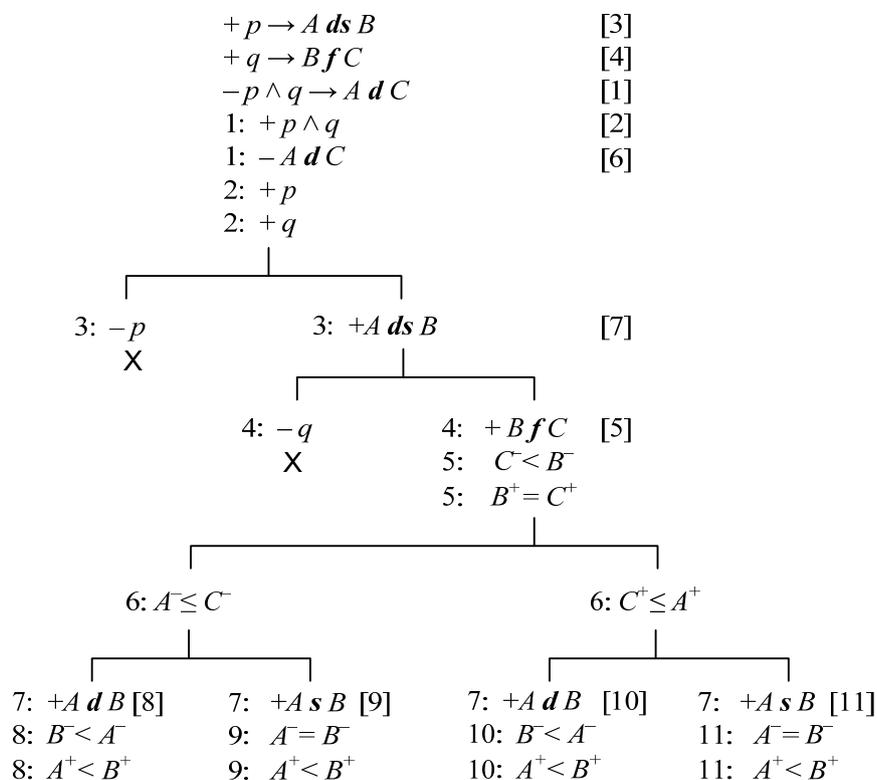


Рис. 8. Дерево вывода для онтологии \mathbf{O} из Примера 7

Пример 7 иллюстрирует применение следующего алгоритма.

Алгоритм AL4:

Вход: онтология \mathbf{O} в языке \mathbf{LA}^+ .

Выход: сообщения « \mathbf{O} противоречива» и « \mathbf{O} непротиворечива».

1. Построить дерево вывода для \mathbf{O} , используя правила из Табл. 4 и Табл. 5.
2. Из каждой незамкнутой ветви Vg_i ($1 \leq i \leq k$) выписать все равенства и неравенства и, добавив к ним неравенства $A^- < A^+$ для каждого интервала A из \mathbf{O} , сформировать систему неравенств и равенств S_i .

3. Построить графы $\Gamma(S_i)$ ($1 \leq i \leq k$) и в каждом из них искать циклы, содержащие знак «<». Если хотя бы в одном из этих графов нет таких циклов, выдать сообщение « \mathbf{O} непротиворечива». В противном случае выдать сообщение « \mathbf{O} противоречива».

Замечание. 1) Основанные на методе аналитических таблиц алгоритмы имеют преимущество (с точки зрения вычислительной сложности) перед алгоритмами, основанными на сведениях к задаче о невыполнимости систем неравенств. Это связано с возможностью использования различных тактик, определяющих порядок применения правил вывода. Время вычисления по методу аналитических таблиц пропорционально размеру (т.е. числу вершин) дерева вывода, а этот размер будет, очевидно, меньше, если каждый раз из вершин с «нераскрытыми» формулами, выби-

рать вершину с формулой, к которой применимо правило вывода с меньшим числом альтернатив. Другими словами, эта тактика использует следующий приоритет при выборе правила вывода: $(+ \sim), (- \sim), (+ \wedge), (- \vee), (- \rightarrow), (+ \sim)$, затем $(+b), (-b), (+m), (-m), (+f), (+s), (+d), (+o), (+e), (-\bullet), (+*)$, $(-*)$, затем $(-d), (-m)$, затем $(-f), (-s), (-o)$, затем $(-e)$. 2) Алгоритм AL4 является полным.

3.2. Дедукция в логике $\mu\mathbf{LA}^+$

В дальнейшем в качестве атомарных ограничений для связок Аллена будем рассматривать только неравенства вида $X - Y \geq r$ или $X - Y \geq -r$, так как атомарные ограничения других видов можно заменить на указанного вида: неравенство $X - Y > r$ можно заменить на неравенство $X - Y \geq r + 1$, неравенство $X - Y < r$ на неравенство $Y - X \geq 1 - r$, а равенство $X - Y = r$ на конъюнкцию $X - Y \geq r$ и $Y - X \geq -r$.

Правила вывода для логики $\mu\mathbf{LA}^+$ состоят из несколько модифицированных правил для логики \mathbf{LA}^+ и двух правил, указанных в Табл. 6. В этой таблице $\alpha \in \Omega$, λ – ограничение, Z – атомарное ограничение, а $\sim Z$ обозначает отрицание неравенства Z . На основе эквивалентностей $\sim X = Y \Leftrightarrow X < Y \vee Y < X \Leftrightarrow (X - Y \geq 1) \vee (Y - X \geq 1)$ и $\sim X - Y \geq r \Leftrightarrow Y - X > -r \Leftrightarrow Y - X \geq 1 - r$ мы формулируем правила вывода, указанные во второй строке Табл. 6.

Табл. 6. Дополнительные правила вывода для логики $\mu\mathbf{LA}^+$

$(+ m) \frac{+A \alpha(Z; \lambda) B}{Z}$ $\frac{+A \alpha(\lambda) B}{\sim X - Y \geq r}$	$(- m) \frac{-A \alpha(Z; \lambda) B}{\sim Z \mid -A \alpha(\lambda) B}$ $\frac{\sim X = Y}{X - Y \geq 1 \mid Y - X \geq 1}$
$(\sim \geq) \frac{\sim X - Y \geq r}{Y - X \geq 1 - r}$	$(\sim =) \frac{\sim X = Y}{X - Y \geq 1 \mid Y - X \geq 1}$

В Табл. 5 заменим неравенства вида $X < Y$ на $Y - X \geq 1$ и вида $X \geq Y$ на $X - Y \geq 0$. Полученную таблицу назовем Табл. 5 М.

Рассмотрим пример вывода в логике $\mu\mathbf{LA}^+$, с помощью которого выясняется противоречивость онтологии.

Пример 8. Пусть дана онтология $\mathbf{O} = \{p \rightarrow A d(A^- - B^- \geq 2; B^+ - A^+ \geq 3) B, q \rightarrow B f(B^- - C^- = 2) C, \sim(p \wedge q \rightarrow A d(C^+ - C^- \geq 4) C)\}$. В этой онтологии условие $B^- - C^- = 2$ нормализуем, т.е. заменим на его на конъюнкцию условий $B^- - C^- \geq 2$ и $C^- - B^- \geq -2$.

На Рис. 9 изображено дерево вывода с помощью правил, приведенных в Табл. 4, Табл. 5 М и Табл. 6.

Из трех незамкнутых ветвей дерева вывода выпишем неравенства и равенство и, добавив стандартные неравенства вида $A^+ - A^- \geq 1$, сформируем простые системы неравенств:

$$S_1 = \{A^- - B^- \geq 2, B^+ - A^+ \geq 3, B^- - C^- \geq 2, C^- - B^- \geq -2, B^+ = C^+, C^- - C^+ \geq -3, A^+ - A^- \geq 1, B^+ - B^- \geq 1, C^+ - C^- \geq 1\},$$

$$S_2 = \{A^- - B^- \geq 2, B^+ - A^+ \geq 3, B^- - C^- \geq 2, C^- - B^- \geq -2, B^+ = C^+, C^- - A^- \geq 0, A^+ - A^- \geq 1, B^+ - B^- \geq 1, C^+ - C^- \geq 1\},$$

$$S_3 = \{A^- - B^- \geq 2, B^+ - A^+ \geq 3, B^- - C^- \geq 2, C^- - B^- \geq -2, B^+ = C^+, A^+ - C^+ \geq 0, A^+ - A^- \geq 1, B^+ - B^- \geq 1, C^+ - C^- \geq 1\}.$$

Замечание. Выписывая из ветви неравенства, мы не включали в простую систему те из них, которые поглощаются другими (например, неравенство $B^+ - A^+ \geq 1$ поглощается неравенством $B^+ - A^+ \geq 3$ в том смысле, что $B^+ - A^+ \geq 3$ влечет $B^+ - A^+ \geq 1$).

На Рис. 10 изображены графы $\Gamma(S_i)$. Как видим, в каждом из этих графов есть положительный цикл: в $\Gamma(S_1)$ – цикл $C^-, B^-, A^+, B^+, C^+, C^-$ длины $2+2+1+3+0+(-3) = 5$; цикл C^-, B^-, A^-, C^- длины $2+2+0 = 4$; цикл A^+, B^+, C^+, A^+ длины $3+0+0 = 3$.

(Конец Примера 8.)

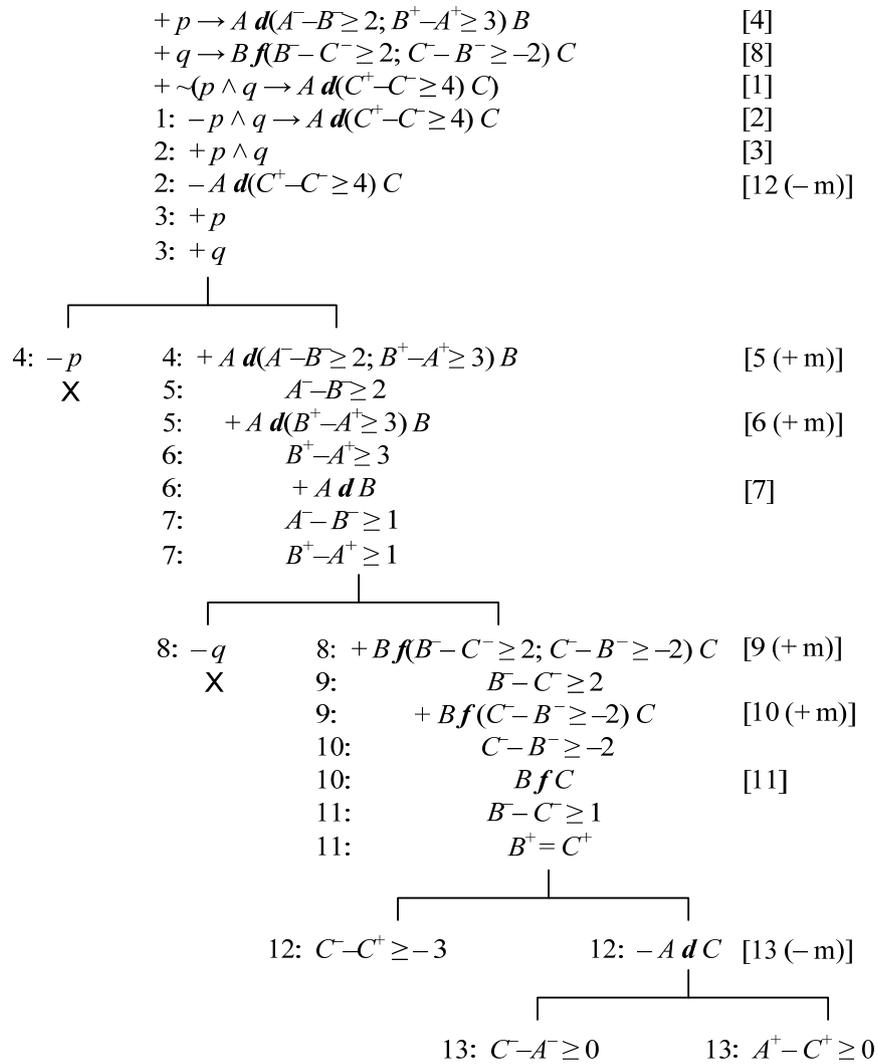


Рис. 9. Дерево вывода для запроса к онтологии из Примера 8

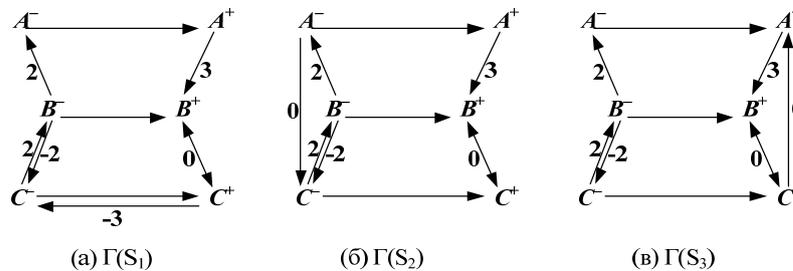


Рис.10. Графы $\Gamma(S_i)$ из Примера 8

Алгоритм AL5 для распознавания противоречивости онтологий в языке $\mu\mathbf{LA}+$ вполне аналогичен алгоритму AL4. Нужно только в алгоритме AL5 сделать следующие замены: « $\mathbf{LA}+$ » на « $\mu\mathbf{LA}+$ »; слова «из Табл. 4 и Табл. 5» на слова «из Табл. 4, Табл. 5М и Табл. 6» (в шаге 1); слова «искать циклы, содержащие знак «<»» на слова «циклы положительной длины» (в шаге 3).

Заключение

Для дедукции в булевом расширении интервальной логики Аллена и этой логики с метрической информацией были предложены алгоритмы, основанные на методе аналитических таблиц. Эти алгоритмы имеют преимущество (с точки зрения вычислительной сложности) перед алгоритмами, прямо использующими распределение дизъюнкций, так как при построении деревьев вывода возможно применение тактик, приводящих к уменьшению размера деревьев.

Литература

1. Allen J.A. Maintaining knowledge about temporal intervals // *Communications of the ACM*, 20(11), 1983. – P. 832-843.
2. Allen J.A. Planning as temporal reasoning // *Proceedings of the 2nd International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, 1991. – P. 3-14.
3. Allen J.A., Hayes P.I. Common-sense theory of time // *Proceedings of the 9th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, 1985. – P. 528-531.
4. Allen J.A., Koomen J.A. Planning using a temporal word model // *Proceedings of the 8th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, 1983. – P. 741-747.
5. Brunner K., Metcalf G. (eds.) *Automatic reasoning with analytic tableaux and related Methods*, LNAI 6793, 2011. – P. 279.
6. Koubarakis M. Tractable Disjunctions of Linear Constraints // *Proceedings of the 2nd International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming (CP96)*, LNCS 1118. – P. 297-307.
7. Litman, D., Allen, J.A Plan Recognition Model for Subdialogues in Conversation // *Cognitive Science*, 11(2), 1987. – P. 163-200.
8. Vilain M., Kautz H. Constraint Propagation Algorithms for Temporal Reasoning // *Proceedings of the 5th Conference on Artificial Intelligence*, 1986. P. 377-382.
9. Плесневич Г.С., Нгуен Тхи Минь Ву, Карабеков Б.С. Алгоритм дедукции для булева расширения интервальной логики Аллена // *Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте. Сборник научных трудов VIII-й Международной научно-практической конференции (Коломна, 18-20 мая 2015г.)*. – М.: Физматлит, 2015. – С. 181-189.
10. Dechter R., Meiri I., Pearl J. Temporal constraint networks // *Artificial Intelligence*, 45(1), 1991. – P. 61-95.
11. Shostak R. Deciding linear inequalities by computing loop residues // *Journal of the ACM*, 28(4), 1981. – P. 769-779.

Нгуен Тхи Минь Ву. Аспирант кафедры Прикладной математики Московского энергетического университета. Окончила НИУ Томский политехнический университет в 2012 году. Автор 9 печатных работ. Область научных интересов: искусственный интеллект, компьютерная лингвистика, интеллектуальный анализ данных, извлечение информации. E-mail: minhvu.357@gmail.com

Плесневич Геральд Станиславович. Профессор кафедры Прикладной математики Национального исследовательского университета «МЭИ», кандидат физико-математических наук. Окончил в 1959 году Ростовский-на-Дону университет. Автор 105 печатных работ. Область научных интересов: дискретная математика, прикладная математическая логика, искусственный интеллект, интеллектуальный анализ знаний и данных. E-mail: salve777@mail.ru