В.Д. Ногин

Комбинированный подход к сужению множества Парето с использованием линейной и мультипликативной сверток критериев[1]

Аннотация. Рассматривается задача многокритериального выбора, постановка которой включает бинарное отношение предпочтения лица принимающего решение (ЛПР). Для ее решения предлагается двухэтапный подход, в соответствии с которым сначала необходимо использовать всю имеющуюся информацию об отношении предпочтения ЛПР, в виде квантов информации, а затем на полученном множестве применить линейную или мультипликативную свертку критериев. Приводится обоснование предлагаемого двухэтапного подхода.

Ключевые слова: многокритериальный выбор, аксиоматический подход, квант информации, линейная свертка критериев, мультипликативная свертка критериев, принцип Эджворта-Парето, сужение множества Парето.

Введение

Множество Парето играет ключевую роль в многокритериальном выборе вариантов, описываемых количественными признаками, поскольку именно в нем следует осуществлять выбор [6-8]. В большинстве задач оно оказывается довольно широким. По этой причине возникает проблема его сужения в процессе принятия решений при помощи той или иной дополнительной информации [1,7,8]. До настоящего времени эта проблема не получила окончательного решения.

Начиная с начала 80-х годов прошлого столетия, автор развивает аксиоматический подход, позволяющий сужать множество Парето на основе информации об отношении предпочтения ЛПР в виде так называемых квантов информации. К настоящему времени доказан целый ряд теорем, которые можно использовать в практике принятия многокритериальных решений [3]. К сожалению, аксиоматический подход также не дает возможности окончательно разрешить проблему сужения множества Парето, так как после его использования полученное подмножество Парето вполне может оказаться сравнительно широким. По этой причине для решения конкретных прикладных задач, в которых, исходя из их специфики, необходимо иметь единственное окончательное решение, требуется выбрать одно или очень небольшое число «наилучших» решений в указанном подмножестве Парето.

В идейном плане данная работа продолжает статью [4], где автором была проанализирована обоснованность применения линейной свертки критериев в многокритериальной оптимизации, а также отмечена возможность ее использования совместно с аксиоматическим подходом. Здесь для решения задач многокритериального выбора проводится обоснование двухэтапного подхода, согласно которому сначала сужается множество Парето на основе произвольного конечного числа непротиворечивых квантов, а затем используется линейная или же мультипликативная свертка критериев. Строго очерчен класс задач, в котором применение рассматриваемых комбинированных подходов является обоснованным.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-07-00899).

В статье приводятся исходные положения и ключевые результаты аксиоматического подхода. Вводится модель многокритериального выбора, включающая множество возможных вариантов, числовой векторный критерий и бинарное отношение предпочтения ЛПР. Формулируются четыре аксиомы, лежащие в основе аксиоматической теории, определение кванта информации, принцип Эджворта-Парето, а также теорема, которая показывает, каким образом можно сузить множество Парето, используя один квант информации. Дальнейшее изложение посвящено описанию комбинированного подхода с использованием линейной, а также мультипликативной сверток критериев. Особое внимание уделяется обоснованию предлагаемого подхода.

1. Основные положения аксиоматической теории

Рассмотрим *модель многокритериального выбора*, состоящую из следующих объектов:

X – абстрактное множество возможных вариантов (решений, альтернатив);

$f=(f_1,f_2,...,f_m)$ – числовой векторный критерий, заданный на множестве X;

$\succ_X$ – иррефлексивное бинарное отношение предпочтения, определенное на множестве X, которым ЛПР руководствуется в процессе выбора (оно, как правило, известно лишь частично).

Задача выбора состоит в отыскании *множества выбираемых вариантов* $C(X)\subset X$, которое в частном случае может оказаться одноэлементным.

Модель многокритериального выбора в терминах векторов включает:

Y – множество возможных векторов $Y=f(X)\subset R^m$;

$\succ_Y$ – иррефлексивное бинарное отношение предпочтения, определенное на множестве Y, которое согласовано с отношением $\succ_X$ следующим образом: $f(x_1)\succ_Y f(x_2) \;\Leftrightarrow\; x_1\succ_X x_2$ для всех $x_1\in\widetilde{x}_1, x_2\in\widetilde{x}_2$; $\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2\in\widetilde{X}$, где $\widetilde{X}$ – совокупность классов эквивалентности, порожденных отношением эквивалентности $x_1\sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1)=f(x_2)$ на множестве X; здесь $\widetilde{x}_i$ – класс эквивалентности, порожденный элементом $x_i\in X$, $i=1,2$.

Символом $C(Y)$ обозначается соответствующее множество выбираемых векторов, т.е. $C(Y)=f(C(X))\subset Y$. С использование множества $C(Y)$ выполнение соотношения $y'\succ_Y y''$ равносильно равенству $C(\{y',y''\})=\{y'\}$.

Необходимо отметить, что в соответствии с аксиоматическим подходом множествам $C(X)$ и $C(Y)$ не дается формальных определений. Единственное требование к ним содержится в формулируемой ниже аксиоме 1. Тем самым, в действительности мы будем иметь дело с целым семейством подобных множеств, и поэтому во всех утверждениях, содержащих $C(X)$ или $C(Y)$, им обязательно предшествует квантор всеобщности.

Аксиоматический подход предполагает принятие следующих четырех аксиом.

Аксиома 1 (аксиома исключения доминируемых вариантов)**.** *Для всякой пары вариантов* $x,x'\in X$*, удовлетворяющих* $x\succ_X x'$*, имеет место соотношение* $x'\notin C(X)$.

В соответствии с этой аксиомой вариант x', не выбираемый в паре $\{x,x'\}$, не должен оказаться выбранным и из всего множества X.

Аксиома 2 (аксиома транзитивности отношения предпочтения). *Отношение* $\succ_Y$ *(а значит, и отношение* $\succ_X$*) является транзитивным. Кроме того, существует продолжение* $\succ$ *отношения* $\succ_Y$ *на все критериальное пространство* R^m*, которое также является транзитивным.*

Взаимосвязь отношения предпочтения $\succ$ с критериями оптимальности содержится в следующем требовании.

Аксиома 3 (аксиома согласования критериев с отношением предпочтения). *Каждый из критериев* $f_1,f_2,...,f_m$ *согласован с отношением предпочтения* $\succ$*, т.е. для каждого* $i=1,2,...,m$ *и любых двух векторов* $y',y''\in R^m$*, таких, что*

$$y'=(y'_1,...,y'_{i-1},y'_i,y'_{i+1},...,y'_m),$$

$$y''=(y'_1,...,y'_{i-1},y''_i,y'_{i+1},...,y'_m),\; y'_i>y''_i,$$

выполнено $y'\succ y''$.

Содержательно согласованность с отношением предпочтения означает, что ЛПР при прочих равных условиях заинтересовано в получении по возможности бóльших значений каждого из критериев.

Последняя аксиома представляет собой условие, без которого не удается построить содержательную математическую теорию.

Аксиома 4 (аксиома инвариантности отношения предпочтения). *Отношение предпочтения* $\succ$ *является инвариантным относительно линейного положительного преобразования, т.е. для любой пары векторов* $y', y'' \in R^m$, *связанных соотношением* $y' \succ y''$, *выполняются свойства аддитивности*

для любого вектора $c \in R^m$ *выполнено*

$$(y'+c) \succ (y''+c)$$

и однородности

для любого положительного числа α *имеет место* $\alpha y' \succ \alpha y''$.

Приведенные аксиомы не накладывают никаких ограничений на множества *X* и *Y,* а также на векторный критерий f. В них содержатся ограничение на множество выбираемых векторов или вариантов (Аксиома 1), а также требования к отношению предпочтения ЛПР (Аксиомы 2-4). Тем самым, они лишь регламентируют поведение ЛПР в процессе выбора. Это поведение вполне можно характеризовать как «разумное», т.е. приемлемое для значительного числа ЛПР.

Автором установлено [2, 3, 5], что при выполнении Аксиом 1-3 справедлив

Принцип Эджворта-Парето. *Для любого множества выбираемых вариантов* $C(X)$ *имеет место включение* $C(X) \subset P_f(X)$, *где в правой части записано множество Парето (множество эффективных вариантов)*

$$P_f(X) = \{x^* \in X \mid \text{не существует } x \in X, \text{ для которого } f(x) \geq f(x^*)\},$$

причем $f(x) \geq f(x^*)$ *здесь означает, что* $f_i(x) \geqq f_i(x^*)$ *для всех* i *и, кроме того,* $f(x) \neq f(x^*)$.

В терминах векторов принцип Эджворта-Парето выражается в виде включения $C(Y) \subset P(Y)$ для любого $C(Y)$.

В основе рассматриваемого аксиоматического подхода лежит определение кванта информации об отношении предпочтения ЛПР, введенное автором в 1983 г., хотя до не давнего времени использовалась иная терминология.

Определение. Пусть имеются две группы номеров критериев $A, B \subset I$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \cap B = \varnothing$. Говорят, что *задан квант информации об отношении предпочтения ЛПР с группами A, B и наборами положительных параметров* w_i *для всех* $i \in A$ *и* w_j *для всех* $j \in B$, если для любой пары векторов $u, v \in R^m$, для которых верно

$$u_i - v_i = w_i > 0 \text{ для всех } i \in A,$$

$$v_j - u_j = w_j > 0 \text{ для всех } j \in B,$$

$$u_s = v_s \text{ для всех } s \in \{1,2,...,m\} \setminus (A \cup B)$$

имеет место соотношение $u \succ v$.

На практике в таком виде понятие кванта использовать невозможно из-за того, что для его выявления соотношение $u \succ v$ необходимо проверять для бесконечного числа пар векторов $u, v \in R^m$. Однако, используя Аксиому 4, несложно установить, что в определении квантор всеобщности перед парой векторов u, v можно заменить на квантор существования; при этом полученное определение будет эквивалентно исходному. Более того, в определении кванта в качестве фиксированной пары можно взять первый вектор с компонентами $u_i = w_i$ для всех $i \in A$, $u_j = -w_j$ для всех $j \in B$, $u_s = 0$ для всех $s \in \{1,2,...,m\} \setminus (A \cup B)$ и второй вектор $v = 0_m$. В этом случае параметры кванта получают очень простую и удобную интерпретацию. А именно, наличие кванта информации означает, что ЛПР согласно пойти на компромисс и готово пожертвовать определенным количеством в размере не более чем w_j единиц по каждому менее значимому j- му критерию f_j ($j \in B$) ради получения дополнительного количества в размере не менее чем w_i единиц по каждому более значимому i- му критерию f_i ($i \in A$) при условии сохранения значений всех остальных критериев.

Следующая теорема демонстрирует, каким образом можно использовать квант информации для сужения множества Парето.

Теорема 1 [2, 3]. *Пусть выполнены Аксиомы* 1-4 *и имеется квант информации об отношении предпочтения ЛПР. Тогда для любых множеств выбираемых вариантов* $C(X)$ *и векторов* $C(Y)$ *выполнены включения:*

$$C(X) \subset P_g(X) \subset P_f(X),\quad C(Y) \subset f(P_g(X)) \subset P(Y) \tag{1}$$

где g *- новый p-мерный,* $p = m - |B| + |A| \cdot |B|$, *векторный критерий, составленный из всех тех компонент* f_i *векторного критерия* f, *для которых* $i \in \{1, 2, ..., m\} \setminus B$, *а также компонент вида*

$$g_{ij} = w_j f_i + w_i f_j \text{ для всех } i \in A \text{ и всех } j \in B.$$

Согласно Теореме 1 для сужения множества Парето $P_f(X)$ необходимо по простым правилам этой теоремы сформировать новый векторный критерий g и построить новое множество Парето $P_g(X)$, которое является подмножеством исходного множества Парето. Тем самым, наличие кванта информации позволяет исключить из рассмотрения определенную часть исходного множества Парето и в дальнейшем поиске «наилучших» решений сосредоточить внимание на более узком множестве $P_g(X)$.

Обращаем внимание на то, что с точки зрения размерности новые критерии $w_j f_i + w_i f_j$ определены корректно, так как единицами измерения каждого слагаемого является произведение единиц измерения участвующих двух критериев.

Когда в наличии имеется некоторый конечный набор подобных квантов информации, необходимо проверить этот набор на непротиворечивость и для учета данного непротиворечивого набора использовать соответствующую теорему из [2, 3]. Если же имеющийся набор квантов не отвечает условиям ни одной из полученных к настоящему времени теорем, то для сужения множества Парето можно воспользоваться разработанными на этой случай алгоритмами [3]. Несомненным достоинством аксиоматического подхода является его математическая проработанность и универсальность, проявляющаяся в том, что он может быть использован для каких угодно множеств возможных вариантов и числовых критериев. Между тем, учет даже большого числа квантов информации не гарантирует сравнительно небольшие размеры множества $P_g(X)$, поскольку разница между исходным и новым множествами Парето в сильной степени зависит не только от вида и количества используемых квантов информации, но и от множества X, а также векторного критерия f.

На практике, исходя из условий конкретной задачи, нередко множество выбираемых вариантов должно быть одноэлементным. В этой связи возникает необходимость дальнейшего сужения множества Парето, полученного в результате применения аксиоматического подхода, с целью выявления в нем какого-то одного «наилучшего» варианта.

2. Комбинированный подход с использованием линейной свертки критериев

Комбинированный подход включает два этапа. На первом в результате опроса ЛПР предполагается выявить максимально широкий набор непротиворечивых квантов информации о неизвестном отношении предпочтения ЛПР и сформировать новый векторный критерий, который позволяет учесть полученную информацию. Этот этап осуществляется в соответствии с указанным аксиоматическим подходом. Как показывает аксиоматическая теория [3], компоненты нового векторного критерия всегда имеют вид линейных комбинаций компонент исходного критерия с неотрицательными коэффициентами. Второй этап сводится к скаляризации многокритериальной задачи на основе линейной или же мультипликативной свертки критериев.

На первом этапе для сужения множества Парето выявляется информация об отношении предпочтения ЛПР в виде одного или нескольких квантов информации. Как правило, эту информацию удается извлечь в результате прямого опроса ЛПР. Для задания одного кванта информации необходимо предъявить ЛПР пару векторов $u, v \in R^m$, несравнимых по отношению $\geq$, и предложить выбрать один из них. Если ЛПР отдаст предпочтение одному из них, например $u \succ v$, это будет означать наличие кванта информации. В общем случае в распоряжении исследователя может оказаться некоторый конечный набор несравнимых пар векторов, для которых выполнено $u^i \succ v^i, i = 1,2,...,k$. В соответствии с аксиоматическим подходом [2, 3] необходимым и достаточным условием непротиворечивости указанного набора служит отсутствие неотрицательных одновременно не равных нулю решений λ_i, μ_s у следующей однородной системы линейных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e^i + \sum_{s=1}^{k} \mu_s (u^s - v^s) = \mathbf{0}.$$

Абсолютные величины компонент векторов $u^i - v^i, i = 1,2,...,k$ определяют параметры квантов w_i, w_j и участвуют в формировании компонент нового векторного критерия g, для которого справедливо включение (1). А именно, каждая компонента g представляет собой линейную комбинацию исходных критериев с неотрицательными коэффициентами в виде указанных абсолютных величин. Далее для удобства компоненты новой вектор-функции будем обозначать привычным образом: $g = (g_1, g_2, ..., g_p)$. Заметим, что в общем случае $p \geq m$. Это вытекает из соответствующих результатов аксиоматической теории [2, 3].

Обоснование предлагаемого комбинированного подхода содержится в следующем утверждении.

Теорема 2. *Пусть выполнены Аксиомы* 1–4 *и имеется некоторый конечный непротиворечивый набор квантов информации об отношении предпочтения ЛПР. При этом* $g = (g_1, g_2, ..., g_p)$ *есть вектор-функция, которая участвует в* (1). *Предположим, что множество* $X \subset R^n$ *выпукло, а вектор-функция* f *вогнута на нем* (*покомпонентно*). *Тогда для любого множества выбираемых вариантов* $C(X)$ *имеет место включение*

$$C(X) \subset \bigcup_{\mu} \{x^* \in X \mid \sum_{i=1}^{p} \mu_i g_i(x^*) = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^{p} \mu_i g_i(x)\}, \tag{2}$$

где вектор μ *принимает свои значения в пределах множества*

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p) \geq \mathbf{0}, \quad \sum_{i=1}^{p} \mu_i = 1. \tag{3}$$

Доказательство. В соответствии с аксиоматическим подходом для любого множества выбираемых вариантов $C(X)$ выполняется включение (1): $C(X) \subset P_g(X)$. Поскольку компоненты исходной вектор-функции f вогнуты, а компоненты новой вектор-функции g представляют собой их линейные неотрицательные комбинации, то все новые компоненты также являются вогнутыми функциями. В этих условиях справедливо включение:

$$P_g(X) \subset \bigcup_{\mu} \{x^* \in X \mid \sum_{i=1}^{p} \mu_i g_i(x^*) = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^{p} \mu_i g_i(x)\},$$

где вектор μ изменяется в пределах множества (3) (правое включение (12) из [7] на с. 102). Комбинация полученных двух включений приводит к требуемому результату.

Если к предположениям Теоремы 2 добавить, что множество выбираемых вариантов (или векторов) состоит в точности из одного элемента, то, очевидно, включение (2) можно заменить более простым соотношением

$$C(X) \subset \{x^* \in X \mid \sum_{i=1}^{p} \mu_i g_i(x^*) = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^{p} \mu_i g_i(x)\} \tag{4}$$

при некотором векторе μ вида (3). Это означает, что в данном случае достаточно выбрать единственный вектор весовых коэффициентов линейной свертки критериев и решить одну соответствующую задачу скалярной максимизации для того, чтобы получить множество вариантов, которое заведомо содержит подлежащий нахождению единственный «наилучший» вариант. Поскольку неравнозначность критериев была учтена при формировании и использовании квантов информации об отношении предпочтения ЛПР, компоненты вектора μ можно выбрать одинаковыми. Однако если требуется дополнительная корректировка степени неравнозначности критериев, то этого можно добиться перераспределением коэффициентов линейной свертки критериев. При этом следует иметь в виду, что изначально непростая задача назначения коэффициентов вектора μ усложняется тем, что эти коэффициенты относятся к компонентам $g_1, g_2, ..., g_p$ новой вектор-функции, которые в отличие от $f_1, f_2, ..., f_m$ не уже имеют конкретного прикладного смысла, если они представляют собой линейные комбинации исходных критериев.

Кроме того, в общем случае среди коэффициентов линейной свертки в (4) могут встретиться и нулевые, так как вектор μ имеет вид (3). Наличие нулевых коэффициентов требует рассмотрения линейных комбинаций исходных критериев, в которых могут присутствовать от одного до p слагаемых, что вносит определенное неудобство при реализации разбираемого подхода.

Вариант Теоремы 2, избавленный от этого недостатка, можно получить, лишь усилив предположения этой теоремы. А именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполнены Аксиомы* 1–4 *и имеется некоторый конечный непротиворечивый набор квантов информации об отношении предпочтения ЛПР, учет которых следует производить с помощью вектор-функции* $g = (g_1, g_2, ..., g_p)$. *Предположим, что множество* $X \subset R^n$ *выпукло и компактно, а вектор-функция* f *вогнута и непрерывна на нем, причем, по крайней мере, одна из ее компонент строго вогнута. Тогда для любого множества выбираемых вариантов* $C(X)$ *имеет место включение:*

$$C(X) \subset cl\left(\bigcup_{\mu} \{x^* \in X \mid \sum_{i=1}^{p} \mu_i g_i(x^*) = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^{p} \mu_i g_i(x)\} \right), \tag{5}$$

где $cl(A)$ *означает замыкание множества А, а вектор* μ *принимает значения в пределах*

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p) > \mathbf{0}, \quad \sum_{i=1}^{p} \mu_i = 1. \tag{6}$$

Теорема 3 немедленно вытекает из результатов аксиоматической теории и следствия 5 ([7], с. 145).

В этой теореме все компоненты вектора μ положительны, однако наличие операции замыкания множества в правой части включения (5) несколько снижает значимость данного утверждения. Однако если допустить, что выбираемый вариант единственный и, кроме того, он является собственно эффективным [7], то можно сформулировать следующее удобное для практического применения утверждение.

Теорема 4. *Пусть выполнены Аксиомы* 1–4 *и имеется некоторый конечный непротиворечивый набор квантов информации об отношении предпочтения ЛПР, учет которых следует производить с помощью вектор-функции* $g = (g_1, g_2, ..., g_p)$. *Предположим, что множество* $X \subset R^n$ *выпукло, а вектор-функция* f *вогнута на нем. Тогда для любого одноэлементного множества* $C(X)$, *представляющего собой собственно эффективный вариант, существует вектор* μ *вида* (6), *при котором имеет место включение* (4).

Справедливость Теоремы 4 следует из результатов аксиоматической теории и теоремы Джоффриона ([7], с. 104) о характеризации собственной эффективных точек с помощью линейной свертки критериев в случае вогнутых критериев на выпуклом множестве вариантов.

Таким образом, на втором этапе комбинированного подхода при указанных предположениях единственный «наилучший» вариант можно искать среди собственно эффективных точек в результате решения одной задачи максимизации линейной свертки критериев $g = (g_1, g_2, ..., g_p)$ при некотором μ с положительными компонентами.

При определенных ограничениях на векторный критерий и множество возможных вариантов всякая эффективная точка является собственно эффективной. В таком случае от требования собственной эффективности в последней теореме можно отказаться. Рассмотрим этот случай подробнее.

Напомним, что числовая функция h называется полиэдрально вогнутой [7], если она имеет вид $h(x_1, x_2, ..., x_n) = \min_{i=1,2,...,k} (\sum_{j=1}^{n} c_j^i x_j + \alpha_i)$. Такая функция вогнута, а в частном случае $k = 1$ она является аффинной (линейной). Можно проверить, что линейная комбинация полиэдрально вогнутых функций с положительными коэффициентами также полиэдрально вогнута.

Далее, автором в начале 80-х годов прошлого века ([7], с. 113) было установлено совпадение множеств эффективных и собственно эффективных точек в классе задач с покомпонентно полиэдрально вогнутой вектор-функцией f и множеством X, которое представляет собой множество решений конечной системы нестрогих неравенств, образованных полиэдрально вогнутыми функциями. В частности, множество X может быть полиэдральным (многогранным).

Между тем, согласно упомянутой выше теореме Джоффриона в данном классе задач все собственно эффективные точки можно получить в результате максимизации линейной свертки критериев с положительными коэффициентами. Таким образом, *в описанных выше условиях для любого множества выбираемых вариантов* $C(X)$ *справедливо включение* (2), *а для одноэлементного множества* $C(X)$ - *включение* (4), *где вектор* μ *имеет вид* (6). В частности, сказанное имеет место в классе задач с линейными критериями.

3. Комбинированный подход с использованием мультипликативной свертки критериев

Наряду с линейной сверткой критериев для сведения многокритериальной задачи к однокритериальной (скалярной) в предположении, что все критерии принимают положительные значения, используют мультипликативную свертку $\prod_{i=1}^{m} f_i^{\mu_i}(x)$, где вектор μ имеет вид (3) или (6). Максимизацию произведения критериев нередко связывают с реализацией, так называемого принципа справедливого компромисса. Заметим, что в теории кооперативных игр арбитражное решение Нэша по существу также является результатом максимизации произведения функций выигрышей игроков.

Полученные выше результаты для линейной свертки критериев можно без труда перенести на случай мультипликативной свертки. Это позволяет осуществить следующая цепочка эквивалентностей:

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_i \ln g_i(x^*) \geqq \sum_{i=1}^{p} \mu_i \ln g_i(x) \Leftrightarrow \ln \prod_{i=1}^{p} g_i^{\mu_i}(x^*) \geqq$$

$$\geqq \ln \prod_{i=1}^{p} g_i^{\mu_i}(x) \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{p} g_i^{\mu_i}(x^*) \geqq \prod_{i=1}^{p} g_i^{\mu_i}(x),$$

а также тот факт, что операция логарифмирования вогнутой функции, принимающей положительные значения, не нарушает ее свойство вогнутости. Например, следующее утверждение вытекает непосредственно из сказанного выше и Теоремы 4.

Следствие. *Пусть выполнены Аксиомы* 1–4 *и имеется некоторый конечный непротиворечивый набор квантов информации об отношении предпочтения ЛПР, учет которых следует производить с помощью вектор-функции* $g = (g_1, g_2, ..., g_p)$. *Предположим, что множество* $X \subset R^n$ *выпукло, а вектор-функция* f *вогнута и положительна на нем. Тогда для любого одноэлементного множества* $C(X)$, *представляющего собой собственно эффективный вариант, существует вектор* μ *вида* (6), *при котором имеет место включение:*

$$C(X) \subset \{x^* \in X \mid \prod_{i=1}^{p} g_i^{\mu_i}(x^*) \geqq \prod_{i=1}^{p} g_i^{\mu_i}(x)\}.$$

Заключение

Предложены два варианта комбинированного двухэтапного подхода к решению проблемы сужения множества Парето. Оба варианта на первом этапе предполагают выявление информации об отношении предпочтения ЛПР в форме конечного набора непротиворечивых квантов информации. Обычно это происходит в результате прямого опроса ЛПР. Полученная информация на основе результатов аксиоматического подхода к сужению множества Парето позволяет сформировать новый векторный критерий, который дает возможность получить более точную оценку сверху для множества выбираемых вариантов, чем исходное множество Парето. Однако строить новое множество Парето не требуется. Второй этап комбинированного подхода заключается в максимизации свертки нового векторного критерия на исходном множестве вариантов. Рассмотрены два вида свертки – аддитивная и мультипликативная. Получены теоремы, которые очерчивают классы задач, в которых применение описанных комбинированных методов является обоснованным. Это задачи с вогнутыми целевыми функциями и выпуклыми множествами вариантов. Отсюда, в частности, следует, что применение указанных сверток в случае конечного множества исходных вариантов не является обоснованным.

В заключение автор выражает признательность РФФИ за многолетнюю финансовую поддержку исследований автора.

Литература

1. Ногин В.Д. Проблема сужения множества Парето: подходы к решению// Искусственный интеллект и принятие решений, № 1, 2008.С. 98-112.
2. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: Физматлит, 2005.
3. Ногин В.Д. Сужение множества Парето: аксиоматический подход. М.: Физматлит, 2016.
4. Ногин В.Д. Линейная свертка в многокритериальной оптимизации//Искусственный интеллект и принятие решений,№ 4, 2014. С. 73-82.
5. Ногин В.Д. Обобщенный принцип Эджворта-Парето//Журнал вычислительной математики и математической физики, т. 55, № 12, 2015.С. 2015–2021.
6. Петровский А.Б. Теория принятия решений. М.: Издательский центр Академия, 2009, 400 с.
7. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Физматлит, 2007.
8. Trends in multiple criteria decision analysis (Greco S., Ehrgott M., Figueira, J., eds.) Springer, New York,2010, 412 p.

Ногин Владимир Дмитриевич. Профессор кафедры теории управления факультета прикладной математики-процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. Окончил Ленинградский государственный университет в 1971 году. Доктор физико-математических наук. Действительный член Международной академии наук высшей школы. Автор около 150 печатных работ, среди которых ряд монографий и учебных пособий. Область научных интересов: принятие решений при многих критериях, многокритериальная оптимизация.