

Исследование алгоритмов вычисления проективного преобразования в задаче наведения на планарный объект по особым точкам¹

Аннотация. Работа посвящена исследованию вычисления проективного преобразования, возникающего во многих задачах машинного зрения. Анализируются подходы к решению задачи и особенности реализации алгоритмов в математических библиотеках. Проводится сравнение алгоритмов по быстродействию и точности работы, на синтезированных и реальных данных.

Ключевые слова: проективное преобразование, сингулярное разложение, Eigen, RANSAC, особые точки.

Введение

В статье рассматривается нахождение невырожденного двумерного проективного преобразования, переводящего точки одной картинки (образца) в соответствующие точки другой картинки (планарный объект наведения), полученной фотографированием объекта камерой с неизвестным фокусным расстоянием и квадратными пикселями [1]. При фотографировании возможны проективные искажения и наложение симметричного гауссова шума (Рис. 1). Получение описанного преобразования (наведение) позволяет трансформировать объект в систему координат образца с тем, чтобы выделить и распознать содержимое необходимых полей (на Рис. 1 и Рис. 2 с целью неразглашения персональных данных они стерты). Качество наведения тем выше, чем более точно определены границы объекта (Рис. 2).

Проективное преобразование T действует на точку $p = (p_x, p_y)$ следующим дробно-линейным преобразованием:

$$T = \begin{pmatrix} t_{00} & t_{01} & t_{02} \\ t_{10} & t_{11} & t_{12} \\ t_{20} & t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} T(p) = \begin{pmatrix} \frac{t_{00}p_x + t_{01}p_y + t_{02}}{t_{20}p_x + t_{21}p_y + t_{22}} \\ \frac{t_{10}p_x + t_{11}p_y + t_{12}}{t_{20}p_x + t_{21}p_y + t_{22}} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Если матрица T невырождена, то она переводит различные точки в различные. Очевидно, что преобразования T и λT одинаково действуют на точки при любом λ , отличном от нуля, так что мы будем искать преобразование T с точностью до нормировки. Наиболее очевидные нормировки:

$$\|T\| = 1, \sum t_{ij}^2 = 1, \sum t_{2j}^2 = 1, t_{22} = 1. \quad (2)$$

Последняя нормировка наиболее проста, но ее можно использовать, только если t_{22} гарантированно отлично от нуля.

Пусть $S_n = (s_1, \dots, s_n)$ – набор различных точек образца и $D_n = (d_1, \dots, d_n)$ – набор соответствующих точек объекта наведения, и мы хотим найти преобразование T , переводящее S_n в D_n . Из (1) получается $2n$ дробно-линейных

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 16-07-00616 а, № 15-29-06079 офи_м, № 15-29-06086 офи_м.



Рис.1. Соответствующие точки на образце (слева) и объекте наведения (справа)

уравнений относительно неизвестных t_{ij} , что вместе с нормировкой дает систему из $2n+1$ уравнений с девятью неизвестными. Здесь возможны 3 случая:

- $n < 4$: система имеет бесконечное множество неколлинеарных решений, и вычисление проективного преобразования невозможно;
- $n = 4$: имеем 9 уравнений с девятью неизвестными, и при некоторых ограничениях возможно точное вычисление преобразования. Этот случай будет рассмотрен в разделе 1.1;
- $n > 4$: система уравнений переопределена. В этом случае можно найти приближенное решение, наилучшее с точки зрения элиминации гауссова шума (раздел 1.2).

Результаты сравнения исследованных методов вычисления проективного преобразования по быстродействию и точности будут описаны в разделе 2.

Следует отметить, что похожая задача наведения на фотографию трехмерного объекта рассмотрена в [2].

1. Вычисление проективного преобразования

1.1. Вычисление по четырем парам точек

Невырожденность проективного преобразования $T: S_4 \rightarrow D_4$ гарантирована в случае, если никакие три точки в S_4 и D_4 не лежат на одной прямой [3]. Однако, если какие-либо три точки «почти» лежат на одной прямой, система уравнений для вычисления T будет плохо обусловленной, что приведет к потере точности при вычислении преобразования. Критерий того, что три точки p_1, p_2, p_3 являются точками обще-

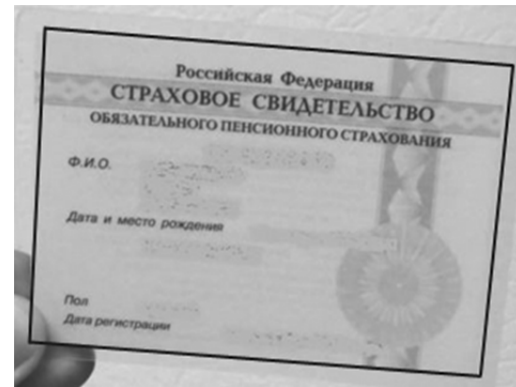


Рис.2. Результат оценки проективного преобразования

го положения, должен быть инвариантен относительно масштабирования. В качестве такого критерия мы предлагаем использовать не слишком малую величину отношения расстояния от точки p_2 до прямой, проходящей через p_1 и p_3 , к $|p_1 - p_3|$ (Рис. 3):

$$R = \frac{d}{|p_1 - p_3|} = \frac{|(p_1 - p_2) \times (p_2 - p_3)|}{|p_1 - p_3|^2} > \varepsilon. \quad (3)$$

Если четверки точек S_4 и D_4 общего положения, то для нахождения более или менее точного решения мы использовали два различных подхода. Первый из них состоит в нахождении правого нуль-пространства [4] системы 8 однородных линейных уравнений с девятью неизвестными, полученной подстановкой s_i и d_i в (1) и приведением каждого уравнения к общему знаменателю. Единичный вектор этого одномерного пространства может быть вычислен при помощи сингулярного разложения (SVD) [5]. Это соответствует использованию нормировки $\sum t_{ij}^2 = 1$.

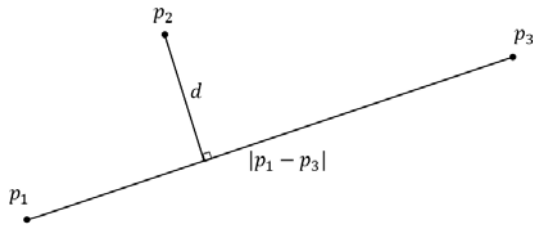


Рис. 3. Критерий общего положения точек

При втором подходе мы будем искать преобразование $T: S_4 \rightarrow D_4$ в виде произведения двух преобразований. Пусть $A_4 = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ – некоторая четверка точек общего положения. Вычислим преобразования $T_S: A_4 \rightarrow S_4$ и $T_D: A_4 \rightarrow D_4$. Тогда

$$T = T_D \times T_S^{-1} \quad (4)$$

Если выбрать в качестве A_4 вершины единичного квадрата: $A_4 = ((0,0), (1,0), (1,1), (0,1))$, получим из (1) систему из восьми уравнений очень простого вида для вычисления $T_s = (t_{ij})$:

$$\begin{aligned} s_1 &= \left(\frac{t_{02}}{t_{22}}, \frac{t_{12}}{t_{22}} \right) \\ s_2 &= \left(\frac{t_{00} + t_{02}}{t_{20} + t_{22}}, \frac{t_{10} + t_{12}}{t_{20} + t_{22}} \right) \\ s_3 &= \left(\frac{t_{00} + t_{01} + t_{02}}{t_{20} + t_{21} + t_{22}}, \frac{t_{10} + t_{11} + t_{12}}{t_{20} + t_{21} + t_{22}} \right) \\ s_4 &= \left(\frac{t_{01} + t_{02}}{t_{21} + t_{22}}, \frac{t_{11} + t_{12}}{t_{21} + t_{22}} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Последовательно преобразуя, получим:

$$ds_1 = s_3 - s_2 \quad ds_2 = s_3 - s_4 \quad ds_3 = s_3 - s_1 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} cr_1 &= ds_1 \times ds_2 = ds_1^x \times ds_2^y - ds_2^x \times ds_1^y = \\ &= \frac{-t_{00}(t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21}) + t_{01}(t_{10}t_{22} - t_{12}t_{20}) - t_{02}(t_{10}t_{21} - t_{11}t_{20})}{(t_{20} + t_{22})(t_{21} + t_{22})(t_{20} + t_{21} + t_{22})} \\ cr_2 &= ds_1 \times ds_3 = ds_1^x \times ds_3^y - ds_3^x \times ds_1^y = \\ &= \frac{-t_{00}(t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21}) + t_{01}(t_{10}t_{22} - t_{12}t_{20}) - t_{02}(t_{10}t_{21} - t_{11}t_{20})}{t_{22}(t_{20} + t_{22})(t_{20} + t_{21} + t_{22})} \\ cr_3 &= ds_3 \times ds_2 = ds_3^x \times ds_2^y - ds_2^x \times ds_3^y = \\ &= \frac{-t_{00}(t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21}) + t_{01}(t_{10}t_{22} - t_{12}t_{20}) - t_{02}(t_{10}t_{21} - t_{11}t_{20})}{t_{22}(t_{21} + t_{22})(t_{20} + t_{21} + t_{22})} \end{aligned} \quad (7)$$

$$t_{21} + t_{22} = t_{22}(cr_2 / cr_1) \quad t_{20} + t_{22} = t_{22}(cr_3 / cr_1) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} s_1 &= \left(\frac{t_{02}}{t_{22}}, \frac{t_{12}}{t_{22}} \right) \\ s_2 &= \left(\frac{t_{00} + s_1^x t_{22}}{t_{22}(cr_3 / cr_1)}, \frac{t_{10} + s_1^y t_{22}}{t_{22}(cr_3 / cr_1)} \right) \\ s_4 &= \left(\frac{t_{01} + s_1^x t_{22}}{t_{22}(cr_2 / cr_1)}, \frac{t_{11} + s_1^y t_{22}}{t_{22}(cr_2 / cr_1)} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

Наконец, решая (8) и (9) относительно t_{ij} , получаем для них окончательные выражения:

$$\begin{aligned} t_{00} &= t_{22}(s_2^x(cr_3 / cr_1) - s_1^x) \\ t_{01} &= t_{22}(s_4^x(cr_2 / cr_1) - s_1^x) \\ t_{02} &= t_{22}s_1^x \\ t_{10} &= t_{22}(s_2^y(cr_3 / cr_1) - s_1^y) \\ t_{11} &= t_{22}(s_4^y(cr_2 / cr_1) - s_1^y) \\ t_{12} &= t_{22}s_1^y \\ t_{20} &= t_{22}(cr_3 / cr_1 - 1) \\ t_{21} &= t_{22}(cr_2 / cr_1 - 1) \end{aligned} \quad (10)$$

Из формул (10) следует, что $t_{22} = 0$ влечет за собой вырожденное нулевое преобразование. Следовательно, если S_4 состоит из точек общего положения, t_{22} отлично от нуля, и мы можем использовать нормировку $t_{22} = 1$. При этом cr_1 , cr_2 и cr_3 отличны от нуля и все преобразования и вычисления по формулам (10) корректны.

Аналогично, заменой s_i на d_i , получаются формулы для вычисления элементов преобразования T_D . Поскольку построенные преобразования T_S и T_D невырождены, то и преобразование T , вычисленное по формуле (4) также будет невырожденным.

1.2. Вычисление по большому ($n > 4$) количеству пар точек

Подстановка всех s_i и d_i в (1) дает систему из $2n$ дробно-линейных уравнений с девятью неизвестными. Поскольку предполагается, что все d_i зашумлены симметричным гауссовым шумом с одинаковой дисперсией, корректным является нахождение решения, минимизирующего сумму квадратов невязок этой системы при некоторой нормировке. Это соответствует

наилучшей элиминации гауссова шума [6]. Но нам неизвестен сколько-нибудь эффективный способ решения систем дробно-линейных уравнений. Поэтому мы ограничимся ее приближенным решением.

Приведением каждого уравнения системы к общему знаменателю получим систему из $2n$ однородных линейных уравнений:

$$\begin{aligned} s_i^x t_{00} + s_i^y t_{01} + t_{02} - d_i^x s_i^x t_{20} - d_i^y s_i^y t_{21} - d_i^x t_{22} &= 0 \\ s_i^x t_{10} + s_i^y t_{11} + t_{12} - d_i^y s_i^x t_{20} - d_i^x s_i^y t_{21} - d_i^y t_{22} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Пары уравнений системы (11) зашумлены уже по разному, и их зашумленность пропорциональна величине

$$s_i^x t_{20} + s_i^y t_{21} + t_{22}. \quad (12)$$

Если «проективность» искомого преобразования мала (т.е. t_{20} и t_{21} по модулю значительно меньше t_{22}) разницей в зашумлении можно пренебречь, и искать ненулевое решение системы (11), минимизирующее сумму квадратов левых частей уравнений. Если же точность такого приближения недостаточна, можно использовать итеративный процесс уточнения решения, деля коэффициенты каждой пары уравнений (11) на величины (12), вычисленные по результатам предыдущей итерации, и решая вновь полученную систему.

Рассмотрим теперь нахождение ненулевого решения задачи $Bt \rightarrow \min$, где B – матрица размером $2n \times 9$ коэффициентов системы (11), $t = (t_{00}, t_{01}, t_{02}, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{20}, t_{21}, t_{22})^T$ – вектор из элементов преобразования T .

Один из возможных подходов к решению задачи состоит в сингулярном разложении (SVD) матрицы B и последующем извлечении искомого решения из этого разложения [7]. В этом случае мы получаем вектор единичной длины, что соответствует нормировке $\sum t_{ij}^2 = 1$.

Альтернативный подход заключается в использовании нормировки $t_{22} = 1$. Напомним, что эту нормировку можно использовать, если t_{22} гарантированно отлично от нуля, но соответствующие условия на S_n и D_n нам неизвестны. После подстановки в (11) условия нормировки, система уравнений становится неоднородной и для решения задачи $|B't' - b| \rightarrow \min$, где B' – матрица размером $2n \times 8$, t' – вектор-столбец из

восьми элементов матрицы T (за исключением t_{22}), а b – $2n$ -мерный вектор-столбец, состоящий из величин d_i^x и d_i^y , можно применить стандартную технику метода наименьших квадратов. Умножим слева обе части уравнения $B't' = b$ на B'^T . Решение полученной системы линейных уравнений восьмого порядка $B''t' = b'$, где $B'' = B'^T B'$ и $b' = B'^T b$, доставит нам элементы искомого проективного преобразования. Заметим, что матрица B'' – симметрическая и положительно определенная, и системе уравнений с такой матрицей проще всего решать с помощью разложения Холецкого [5].

Наконец, если сдвинуть все точки S_n так, чтобы какая-либо из них перешла в начало координат, то из соответствующей пары уравнений (11) можно определить t_{02} и t_{12} . Подставляя в остальные уравнения (11) координаты сдвинутых точек и найденные t_{02} и t_{12} , получим систему из $2n - 2$ уравнений с шестью неизвестными. Действуя так же, как и в предыдущем абзаце, перейдем к системе уравнений шестого порядка с симметрической матрицей. Применив к решению этой системы обратный сдвиг (вместе с найденными t_{02} , t_{12} и $t_{22} = 1$), получим коэффициенты искомого преобразования.

2. Сравнение исследованных методов вычисления проективного преобразования по быстродействию и точности

Во всех экспериментах по определению быстродействия и точности алгоритмов были использованы функции линейной алгебры из библиотеки Eigen [8]. Эксперименты проводились как на искусственно сгенерированных, так и на реальных данных.

Эксперименты с искусственными данными выполнялись следующим образом:

- генерировалось 1000 случайных точек, равномерно распределенных внутри единичного квадрата;
- строилось 100 случайных выборок S_n , $n \in [4, 32]$ из сгенерированных случайных точек, причем при $n = 4$ проверялось, что это точки общего положения;
- строилось проективное преобразование T углов E единичного квадрата в углы F одного из 600 четырехугольников, являющихся грани-

цами фотообразов реальных прямоугольных документов (пластиковых карт) с различными (небольшими) проективными искажениями, различными ориентацией и разрешением;

- каждая выборка под действием преобразования T переводилась внутрь соответствующего четырехугольника: $D_n = T(S_n)$;

- строилось D_n' добавлением к каждой точке из D_n симметричного гауссова шума с небольшой (порядка нескольких пикселей) дисперсией;

- каждым из исследуемых методов вычислялось проективное преобразование $T': S_n \rightarrow D_n'$ и фиксировалось время выполнения для сравнения быстродействия методов;

- преобразованием T'^{-1} углы четырехугольника F переводились в углы E' «восстановленного» единичного квадрата, и фиксировалась разница между E и E' для сравнения точности методов.

При $n = 4$ алгоритм, использующий сингулярное разложение, оказался на порядок медленнее прямого вычисления по формулам (4) и (10).

При $n > 4$ сравнивались 4 алгоритма:

- алгоритм 1 – использование сингулярного разложения;
- алгоритм 2 – метод наименьших квадратов с решением системы уравнений 8×8 ;
- алгоритм 3 – сведение к системе уравнений 6×6 ;
- алгоритм 4 – двухкратное итерирование алгоритма 2.

В Табл. 1 приведены результаты сравнения точности и быстродействия этих алгоритмов при $n = 8$ и дисперсии гауссова шума, равной 1,5 пикселя.

Наиболее быстрым оказался алгоритм метода наименьших квадратов с использованием разложения Холецкого для решения системы уравнений восьмого порядка. Алгоритм со сведением

задачи к решению уравнения шестого порядка при несколько меньшей точности работает медленнее. Это объясняется тем, что в Eigen используются векторные вычисления с длиной векторов, равной степени двойки. Наконец, итеративный процесс уточнения решения оказывается ожидаемо медленнее, но не дает сколько-нибудь заметного увеличения точности. Это связано с тем, что во всех экспериментах мы имеем дело с преобразованиями с «малой проективностью». Алгоритм 1, основанный на сингулярном разложении, проигрывает в быстродействии алгоритму 2 более чем в 2 раза.

Следует отметить, что ни в одном из описанных экспериментов не наблюдалась невозможность вычислить преобразование (деление на ноль, переполнение), равно как и получение вырожденного преобразования.

Эксперименты с реальными данными проводились в рамках использования технологии RANSAC (RANdom SAmple Consensus) [9] для наведения по особым точкам. Особые точки вычислялись по технологии YAPE (Yet Another Point Extractor) [10], а соответствие особых точек образца и документа устанавливалось по дескрипторам особых точек, вычисленным по технологии RFD (Receptive Fields Descriptor) [11]. Алгоритм прямого вычисления по формулам (4) и (10) для $n = 4$ использовался во внутренних итерациях RANSAC при случайном выборе четверок пар особых точек, а алгоритмы 1 и 2 при $n > 4$ – для финальных вычислений проективного преобразования по всем инлайерам.

В экспериментах участвовали 2200 фотографий документов СНИЛС (Страховой Номер Индивидуального Лицевого Счета) различного качества и типов (Рис. 1, Рис. 2), причем для каждого документа пробовалось наведение по двум наиболее подходящим образцам из 11. Количество инлайеров при этом варьировалось от 16 до 82. Точность наведения фиксировалась

Табл. 1. Результаты сравнения точности и скорости алгоритмов

Алгоритм	Максимальная ошибка	Средняя ошибка	Время вычисления (мксек)
1	$(1.45 \pm 0.20) 10^{-3}$	$(5.06 \pm 0.10) 10^{-5}$	45.5 ± 0.2
2	$(1.39 \pm 0.19) 10^{-3}$	$(4.99 \pm 0.10) 10^{-5}$	20.1 ± 0.2
3	$(1.42 \pm 0.16) 10^{-3}$	$(5.26 \pm 0.11) 10^{-5}$	20.6 ± 0.2
4	$(1.39 \pm 0.19) 10^{-3}$	$(4.99 \pm 0.10) 10^{-5}$	28.6 ± 0.2

по разнице между координатами восстановленных углов документа (Рис. 2) и их истинными значениями, определенными вручную. Время вычисления оценивалось только по интегральному времени проведения эксперимента.

Оказалось, что алгоритм 1, связанный с сингулярным разложением, уступает алгоритму 2 не только по быстродействию, но и по точности. Это связано с тем, что получение сингулярного разложения – процесс итерационный, и имплементация SVD в Eigen [12] (в частности, условия остановки) ориентирована на возможно более точное вычисление сингулярных чисел, а не сингулярных векторов, которые как раз и необходимы для получения проективного преобразования.

В настоящее время алгоритмы, признанные лучшими, успешно используются в коммерческой системе Smart IdReader для наведения на плоские прямоугольные документы различных типов (СНИЛСы, водительские удостоверения, свидетельства о регистрации транспортных средств и т.д.).

Заключение

В работе представлены результаты эмпирического сравнения методов вычисления проективного преобразования. Скорость и точность методов определялись как на синтетических, так и на реальных данных. В случае четырех пар точек наиболее быстрым алгоритмом оказалось прямое вычисление по формулам (4) и (10). При большом количестве сопоставлений метод наименьших квадратов для системы, дополненной линейной нормализацией, показал себя как наиболее точный и быстрый алгоритм. Эксперименты на реальных данных, где сингулярное разложение и решение системы линейных уравнений $2n \times 8$ методом наименьших квадратов использовались как часть технологии

RANSAC, показали, что второй алгоритм дает более точные и быстрые результаты

Авторы выражают благодарность Д. Николаеву, П. Безматерных, Е. Лимоновой, В. Постникову, Д. Слугину, Н. Скорюкиной, и В. Соколову за помощь в работе, а также В.Л. Арлазарову и В.В. Арлазарову за ценные замечания по тексту статьи.

Литература

1. Гаганов В. Инвариантные алгоритмы сопоставления точечных особенностей на изображениях // Компьютерная графика и мультимедиа. 2009. 7(1).
2. Karpenko S., Konovalenko I., Miller A., Miller B., Nikolaev D. Visual navigation of the UAVs on the basis of 3D natural landmarks // Proc. of SPIE. 2015. Vol. 9875. pp. 1-10.
3. Hartley R., Zisserman A. Multiple View Geometry in Computer Vision, 2nd edition. Cambridge University Press, 2004. 925 p.
4. Умнов А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра, 3-е изд. М.: МФТИ. 2013. 544 с.
5. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes in C. Cambridge University Press, 1992. 925 p.
6. Вапник В.Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. М.: Наука. 1979. 448 с.
7. Golub G.H., Reinsch C. Singular value decomposition and least squares solutions // Numerische Mathematik. 1970. 14 (5). pp. 403-420.
8. Guennebaud G., Jacob B. and others. Eigen v3. URL: <https://eigen.tuxfamily.org/> (дата обращения: 22.11.2016).
9. Fischler M.A., Bolles R.C. Random sample consensus: A paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography // Communications of the ACM. 1981. 24(6). pp. 381-395.
10. Lepetit V., Fua P. Towards Recognizing Feature Points using Classification Trees // EPFL Technical Report IC/2004/74. 2004. 13 pp.
11. Fan B., Kong Q., Trzcinski T., Wang Z., Pan C., Fua P. Receptive Fields Selection for Binary Feature Description // IEEE Transactions on Image Processing. 2014. 23, issue 6. pp. 2583-2595.
12. Demmel J., Gu M., Eisenstat S., Slapnicar I., Veselic K., Drmac Z. Computing the singular value decomposition with high relative accuracy // Lin. Alg. Appl. 1999. 299. pp. 21-80.

Шемякина Юлия Александровна. Аспирант Федерального государственного учреждения ФИЦ ИУ РАН. Окончила СПбГУ в 2013 году, Московский физико-технический институт (государственный университет) в 2015 году. Автор одной печатной работы. Область научных интересов: проективная геометрия, распознавание образов. E-mail: jshemiakina@gmail.com

Жуковский Александр Евгеньевич. Аспирант и преподаватель кафедры алгоритмов и технологий программирования Московского физико-технического института (государственного университета). Окончил Московский физико-технический институт (государственный университет) в 2013 году. Автор шести печатных работ. Область научных интересов: компьютерное зрение, распознавание образов, машинное обучение. E-mail: zhukovsky@phystech.edu

Фараджев Игорь Александрович. Главный научный сотрудник Федерального государственного учреждения ФИЦ ИУ ИСА РАН. Окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1970 году. Кандидат физико-математических наук, доцент. Автор более 100 печатных работ. Область научных интересов: комбинаторика, дискретные алгоритмы, компьютерная алгебра. E-mail: ifardjev@yahoo.com

The Research of the Algorithms of a Projective Transformation Calculation in the Problem of Planar Object Targeting by Feature Points

J.A. Shemiakina, A.E. Zhukovsky, I.A. Faradjev

Abstract. The work is devoted to the research on the calculation of a projective transformation, which arises in the problems in machine vision. The details of the calculation of projective transformation and found specificities of mathematical libraries implementations are carefully analyzed. The comparisons of different approaches are provided in terms of both productivity and accuracy, using both artificially generated and real data.

Keywords: projective transformation, SVD, Eigen, RANSAC, feature points.

References

1. Gaganov V. 2009. Invariantnye algoritmy sopostavleniya tochechnykh osobennostey na izobrazheniyakh [Invariant algorithms of matching of point features on images]. *Kompyuternaya grafika i multimedia* [Computer Graphics and Multimedia] 7(1).
2. Karpenko S., Konovalenko I., Miller A., Miller B., Nikolaev D. Visual navigation of the UAVs on the basis of 3D natural landmarks // *Proc. of SPIE*. 2015. Vol. 9875. pp. 1-10.
3. Hartley R., Zisserman A. *Multiple View Geometry in Computer Vision*, 2nd edition. Cambridge University Press, 2004. 925 p.
4. Umnov A. *Analiticheskaya geometriya i lineynaya algebra* [Analytical geometry and linear algebra], 3rd edition. M.: MIPT, 2013. 544 p.
5. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, 1992. 925 p.
6. Vapnik V.N. *Vosstanovlenie zavisimostey po empiricheskim dannym* [Recovery Dependencies Using Empirical Data]. «Nauka», M., 1979. 448 p.
7. Golub G.H., Reinsch C. Singular value decomposition and least squares solutions // *Numerische Mathematik*. 1970. 14 (5). pp. 403-420.
8. G. Guennebaud, B. Jacob and others, *Eigen v3*. Available at: <https://eigen.tuxfamily.org/> (accessed November 22, 2016).
9. Fischler M.A., Bolles R.C. Random sample consensus: A paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography // *Communications of the ACM*. 1981. 24(6). pp. 381-395.
10. Lepetit V., Fua P. Towards Recognizing Feature Points using Classification Trees // *EPFL Technical Report IC/2004/74*. 2004. 13 pp.
11. Fan B., Kong Q., Trzcinski T., Wang Z., Pan C., Fua P. Receptive Fields Selection for Binary Feature Description // *IEEE Transactions on Image Processing*. 2014. 23, issue 6. pp. 2583-2595.
12. Demmel J., Gu M., Eisenstat S., Slapnicar I., Veselic K., Drmac Z. Computing the singular value decomposition with high relative accuracy // *Lin. Alg. Appl.* 1999. 299. pp. 21-80.

Julia Shemiakina is a PhD. Candidate at Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Institute for Systems Analysis, 9 pr. 60-letiya Oktyabrya, Moscow. Her research interests include projective geometry and pattern recognition.

Alexander Zhukovsky is a PhD. Candidate and a lecturer at the Department of Innovation and High Technology at Moscow Institute of Physics and Technology, 9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow. He is the author of 5 papers. His research interests include computer vision, pattern recognition, machine learning.

Igor Faradjev is a chief research scientist at Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Institute for Systems Analysis, 9 pr. 60-letiya Oktyabrya, Moscow. He has the Ph.D. of Physical and Mathematical Sciences. He is the author of more than 100 papers. His research interests include combinatorial theory, discrete algorithms, computerized algebra.