

# Двухэтапная процедура упорядочения объектов по многим критериям<sup>1</sup>

**Аннотация.** Предлагается процедура двухэтапного упорядочения объектов по многим критериям в соответствии с предпочтениями ЛПР для решения многокритериальной обратной задачи об упаковке в контейнеры. Если такая задача возникает многократно на разных наборах объектов, подлежащих оценке по одним и тем же критериям с соответствующими одинаковыми шкалами, на первом этапе для предварительного разделения декартова произведения шкал критериев на классы, упорядоченные в соответствии с предпочтениями ЛПР (порядковая классификация), применяется метод STEPCLASS. Это позволит впоследствии для каждого нового набора объектов сразу определить классы, к которым его объекты относятся, уже без участия ЛПР. Если возникает необходимость более точного упорядочения объектов конкретного набора внутри одного класса, на втором этапе применяется метод UniComBOS. Показывается, что в качестве исходной информации для метода UniComBOS можно использовать предпочтения ЛПР, выявленные на этапе порядковой классификации.

**Ключевые слова:** порядковая классификация по многим критериям, упорядочение объектов по многим критериям, независимость критериев по предпочтениям, согласованность предпочтений, границы классов, STEPCLASS, UniComBOS.

## Введение

Задачи выбора, упорядочения и классификации многокритериальных объектов в соответствии с предпочтениями лица, принимающего решения (ЛПР), являются типовыми в теории и практике принятия решений. Однако нередко их результат является не самоцелью, а лишь предварительным этапом для решения более сложных задач, таких, например, как выбор и упаковка максимального числа объектов, наиболее предпочтительных для ЛПР, в заданное число контейнеров так, чтобы суммарный вес объектов в каждом контейнере не превышал его грузоподъемность [1]. Понятия «контейнер», «вес» и «грузоподъемность» зависят от контекста. Это могут быть, собственно, вес и грузоподъемность, если требуется выбрать максимальное число наиболее важных, по мнению ЛПР, грузов для перевозки на заданном числе автомобилей («контейнеров») опреде-

ленной грузоподъемности. В случае заявок на кредиты, подаваемых предприятиями в банк («контейнер»), «вес» означает запрошенную денежную сумму, а «грузоподъемность» – совокупную сумму, выделенную таким банком для предоставления кредитов.

Если отбросить требование учета предпочтительности объектов, такая задача соответствует одномерной многокритериальной задаче [2] с единичными коэффициентами в целевой функции. Такая задача иногда называется обратной задачей об упаковке в контейнеры, в которой, в отличие от ее классического варианта [3], требуется упаковать не все объекты в минимальное число контейнеров, а максимальное число объектов в имеющиеся контейнеры [4].

В настоящей статье нас интересуют аспекты представленной выше задачи, которые относятся к упорядочению объектов по многим критериям с учетом предпочтений ЛПР, а именно: определение критериев для оценки объектов и, собственно, оценка объектов по таким критери-

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-07-00092.

ям; упорядочение объектов по многим критериям в соответствии с предпочтениями ЛПР.

Если обратная задача упаковки возникает многократно на разных наборах объектов, оцененных по одним и тем же критериям с соответствующими одинаковыми шкалами, для ее решения целесообразно динамически (т.е. в результате решения для очередных наборов объектов) формировать базу правил и предпочтений ЛПР [5]. Это позволит сократить и, в идеале, исключить непосредственное участие ЛПР в упорядочении последующих наборов объектов. При этом имеет смысл начинать упорядочение объектов с их порядковой классификации, которую целесообразно выполнить заранее для всех гипотетически возможных объектов, т.е. на декартовом произведении шкал критериев. Тогда при появлении нового набора объектов можно уже без участия ЛПР определить, к какому классу каждый объект такого набора относится. Если все объекты такого набора из  $l$ -последовательных классов (начиная с наиболее предпочтительного) удастся упаковать в имеющиеся контейнеры, но добавление к ним всех объектов  $(l+1)$ -го класса не позволяет выполнить их упаковку, задача упорядочения возникает только на таких конкретных объектах  $(l+1)$ -го класса.

Для решения задачи порядковой классификации, которая в западной литературе называется задачей многокритериальной сортировки (*multicriteria sorting*), существует ряд подходов. Наиболее известные из них: многокритериальная теория полезности (*MAUT*) [6, 7], методы семейства ELECTRE, основанные на относительном превосходстве (*outranking approach*) [8], теория приближенных множеств (*rough sets theory*) [9, 10], теория нечетких множеств (*fuzzy sets*) [11], вербальный анализ решений (ВАР) [12].

Для задачи упорядочения и/или выбора объектов по многим критериям помимо многочисленных методов, основанных на вышеперечисленных подходах, широко известен также метод АНР (*Analytic Hierarchy Process*) [13].

Предпочтения ЛПР являются основным источником информации и для порядковой классификации, и для упорядочения/выбора объектов по многим критериям. Однако во всех вышеуказанных подходах, кроме ВАР, важность надежного (корректного, с психологической точки зрения) выявления предпочтений

ЛПР практически игнорируется. Кроме того, математический аппарат, применяемый в таких подходах для вывода правил классификации или отношений между объектами, делает результаты решения труднообъяснимыми (если вообще объяснимыми) даже для самого ЛПР.

Методы ВАР свободны от таких недостатков, поскольку используют информацию об отнесении объектов, оцененных по многим критериям, к классам или о предпочтениях ЛПР только на естественном языке (в терминах «более предпочтительно», «равноценно» и «менее предпочтительно», в последнем случае). Такая информация обрабатывается без преобразования в числовую форму и только на основе разумных логических построений, понятных и ЛПР, и пользователю. Справедливости ради следует отметить, что, хотя методы ВАР используют только психологически корректные подходы к выявлению предпочтений ЛПР, они, по сравнению с методами, основанными на перечисленных выше подходах, требуют большего участия, а значит и времени ЛПР.

На основе парадигмы ВАР для решения задачи порядковой классификации разработаны методы ORCLASS, CLARA, DIFCLASS и CYCLE [14-17], а также расширенный метод STEPCLASS [18], исходно предназначенный для задачи номинальной классификации (когда классы и шкалы критериев не могут быть упорядочены).

Методы упорядочения/выбора, реализующие принципы ВАР, включают методы семейства «ЗАПРОС» [12, 19-21] и UniComBOS [22].

Преимущества расширенного метода STEPCLASS по сравнению с другими указанными методами порядковой классификации, основанными на парадигме ВАР, обосновываются в [18], а метода UniComBOS по сравнению с методами семейства «ЗАПРОС» – в [22].

В статье предлагается процедура двухэтапного упорядочения объектов по многим критериям. На первом этапе выполняется порядковая классификация методом STEPCLASS на декартовом произведении шкал критериев в соответствии с предпочтениями ЛПР. Основные идеи метода STEPCLASS описываются в Разделе 1. Если после этого, как указано выше, возникает необходимость упорядочения объектов внутри одного класса, выполняется второй этап процедуры, описываемый в Разделе 2. Объекты соответствующего класса упорядочиваются мето-

дом UniComBOS с использованием, в том числе, предпочтений ЛПР, выделенных из порядковой классификации, и, если применимо, предпочтений ЛПР, выявленных для предыдущих наборов объектов.

## 1. Применение метода STEPCLASS для предварительной порядковой классификации объектов

Задача порядковой классификации заключается в отображении множества объектов, оцененных по многим критериям, во множество классов, упорядоченных в соответствии с предпочтениями ЛПР так, чтобы соблюдалось условие согласованности: для любых двух объектов, первый из которых более предпочтителен для ЛПР, чем второй, первый объект должен относиться к классу, не менее предпочтительному, чем класс второго объекта. Задача порядковой классификации является слабоструктурированной или даже неструктурированной [23], поскольку только ЛПР может определить ее структуру, т.е. такие параметры, как наименования классов, критериев и их значений, не говоря уже об упорядочении таких значений и самих классов в соответствии с его предпочтениями. В общем случае, в такой задаче предварительно заданным можно считать только либо набор реальных объектов, подлежащих классификации, либо проблемную область, все гипотетически возможные объекты которой подлежат отображению во множество упорядоченных классов в соответствии с предпочтениями ЛПР. Второй вариант целесообразно использовать, когда задача порядковой классификации возникает многократно с одними и теми же классами, критериями и шкалами их значений, а наборы реальных объектов, подлежащих классификации, в каждом конкретном случае разные и заранее неизвестны. Если ЛПР предварительно выполнит порядковую классификацию всех гипотетически возможных объектов (т.е. элементов декартова произведения шкал критериев) и, тем самым, построит полную базу своих классифицирующих правил, для каждого объекта из их реального набора можно, уже без участия ЛПР, определить его класс. Соответственно, мы рассматриваем далее именно такой случай.

Слабоструктурированный характер задачи классификации учтен в методе STEPCLASS [24, 25]: задача ставится в виде взаимосвязанных подзадач: предварительная структуризация проблемной области и, собственно, классификация (с возможностью расширения структуры).

Введем следующие обозначения:

$C = \{C_1, C_2, \dots, C_L\}$  – классы, на которые следует разделить объекты (исходно, такие классы пусты).

$Q = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_M\}$  – наименования критериев, по которым оцениваются объекты;

$X_m$  – дискретный набор  $n_m$  вербальных значений (шкала) критерия  $Q_m$ ,  $m = \overline{1, M}$ .

Декартово произведение шкал критериев  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_M$  определяет множество всех гипотетически возможных комбинаций значений критериев из их заданного набора:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_M)$ ,  $x_m \in X_m$ ,  $m = \overline{1, M}$  (далее для удобства будем иногда также называть множество  $X$  множеством объектов, подлежащих классификации, а каждый кортеж  $x \in X$  – объектом. Кроме того, значение критерия  $Q_m$  у объекта  $x$  будем обозначать  $Q_m(x)$ ). Заметим, однако, что некоторые объекты множества  $X$  могут описываться несовместимыми комбинациями значений критериев и, следовательно, должны исключаться из порядковой классификации. Поэтому введем дополнительный класс  $C^{Inc}$ , не подлежащий упорядочению, к которому будут относиться объекты, содержащие такие несовместимые комбинации:

$V_m(v)$ ,  $m = \overline{1, M}$  – множество допустимых классов для значения  $v \in X_m$ . Допустимость значения критерия для классов означает, что объект, имеющий это значение, может относиться к таким классам и не может относиться ни к одному из остальных классов;

$R \subseteq X \times X$  – (неизвестное) отношение предпочтения на объектах. Введем также вспомогательные отношения:  $I = R \cap R^{-1}$ ,  $P = R \setminus R^{-1}$ ;

$P^C \subset C \times C$  – отношение строгого порядка на множестве классов, отражающее предпочтение ЛПР. В дальнейшем нам также потребуется

отношение предпорядка на множестве классов  
 $R^C = P^C \cup \{(c, c)\}_{c \in C}$ ;

$R(Q_m) \subseteq X_m \times X_m, m = \overline{1, M}$  – отношение полного предпорядка на шкале критерия  $Q_m$ , такое, что пара значений  $(x_m, y_m) \in R(Q_m)$ , если значение  $x_m \in X_m$  не менее предпочтительно для ЛПР, чем значение  $y_m \in X_m$ , в предположении прочих попарно равных значений каждого критерия из  $Q \setminus Q_m$ .

Таким образом, одна пара значений из  $R(Q_m)$  соответствует множеству пар объектов, находящихся в отношении предпочтения:

$$\forall \omega_1 \in X_1, \dots, \forall \omega_M \in X_M, \\ ((\omega_1, \omega_2, \dots, x_m, \dots, x_M), (\omega_1, \omega_2, \dots, y_m, \dots, \omega_M)) \in R.$$

Структура многокритериальной задачи порядковой классификации может быть представлена следующим образом:

$$S = (C, Q, \{X_m\}, \{V_m(\cdot)\}, P^C, \{R(Q_m)\}),$$

Будем предполагать, пока не обнаружится обратное, что предпочтения ЛПР обладают следующими свойствами:

С1. Полнота, транзитивность и рефлексивность отношения  $R$ , т.е. отношение  $R$  является полным предпорядком;

С2. Независимость критериев по предпочтению [22, 26]:

$$\forall z_m, w_m \in X_m, \forall x_1, y_1 \in X_1, \dots, \forall x_M, y_M \in X_M \\ ((x_1, x_2, \dots, z_m, \dots, x_M), (y_1, y_2, \dots, z_m, \dots, y_M)) \in R \Rightarrow \\ \Rightarrow ((x_1, x_2, \dots, w_m, \dots, x_M), (y_1, y_2, \dots, w_m, \dots, y_M)) \in R \\ (\text{заметим, что одинаковые значения } j\text{-го критерия в паре объектов меняются на любые другие одинаковые значения});$$

С3. Согласованность порядковой классификации:

$$\forall x, y \in X, (x, y) \in R \Rightarrow (F(x), F(y)) \in R^C.$$

Тогда, задача порядковой классификации может быть поставлена следующим образом:

**Дано:** проблемная область, каждый объект которой может принадлежать только к одному из классов, подлежащих упорядочению в соответствии с предпочтениями ЛПР.

**Требуется:**

1. Определить структуру данной проблемной области:

$$S = (C, Q, \{X_m\}, \{V_m(\cdot)\}, P^C, \{R(Q_m)\});$$

2. Построить отображение  $F: X \rightarrow C \cup C^{Inc}$ , определенное для всех элементов множества  $X$ .

3. Проверять удовлетворяет ли информация, полученная от ЛПР, свойствам С1-С3 и, если не удовлетворяет, устранять противоречия с участием ЛПР, если возможно.

Заметим, применительно к пункту 3, что если ЛПР не сможет устранить такие противоречия, применение метода STEPCLASS, тем не менее, возможно, но без использования вышеуказанных отношений, как это делается в его исходной версии, предназначенной для номинальной классификации.

Решение задачи порядковой классификации должно начинаться с ее структуризации, хотя определение некоторых элементов структуры может возникать и на этапе классификации, если ЛПР захочет добавить новые классы и/или критерии и, соответственно, их значения с одновременным определением допустимости таких значений для всех классов и их упорядочением в соответствии со своими предпочтениями. В [24, 25] предложены две процедуры структуризации задачи классификации, в том числе порядковой. Когда ЛПР впервые приступает к классификации, используется процедура структуризации на примерах:

1. ЛПР перечисляет наименования классов (например, «Объекты высокого качества», «Объекты удовлетворительного качества» и «Объекты низкого качества»).

2. ЛПР описывает в качестве примера по одному объекту для каждого класса либо в виде продукции «Если (набор значений критериев), то (соответствующий класс)», либо в свободном формате с последующим преобразованием в продукцию вышеуказанного вида.

3. Затем ЛПР анализирует каждый пример, чтобы определить:

- наименования критериев, значения которых присутствуют в каждом примере;
- прочие значения, которые каждый из этих критериев может иметь для данного класса;
- прочие классы, для которых допустимо каждое значение каждого из перечисленных критериев;
- прочие значения таких критериев, которые могут быть у объектов, относящихся к другим классам.

В результате выполнения этой процедуры, для каждого значения каждого критерия автоматически определятся его допустимость для каждого класса, а после ее завершения ЛПР предлагается упорядочить значения каждого критерия в соответствии со своими предпочтениями и построить, тем самым отношения  $R(Q_m)$ ,  $m = \overline{1, M}$ .

Обозначим через  $G(x)$  множество классов, к которым может относиться объект  $x \in X$  согласно имеющейся на данный момент информации. По сути,  $G(x)$  можно интерпретировать как дизъюнкцию  $\bigvee_{c \in G(x)} (F(x) = c)$ .

Первоначально, исходя из допустимости значений критериев классам из  $C$ ,

$$\forall x \in X \quad G(x) = \bigcap_{m=1, M} V_m(Q_m(x)).$$

Если для некоторого объекта  $x$  пересечение множеств допустимости пусто ( $G(x) = \emptyset$ ), т.е. значения критериев несовместимы, этот объект относится к введенному выше специальному классу  $F(x) = C^{Inc}$ ,  $G(x) := \{C^{Inc}\}$ .

Если для объекта  $x \in X$   $|G(x)| > 1$ , это означает, что такой объект может принадлежать любому из нескольких классов, номера которых являются элементами множества  $G(x)$ . Класс для объекта может быть установлен либо непосредственно в диалоге с ЛПР, либо косвенно, в результате классификации других объектов и применения приведенной ниже процедуры распространения по доминированию и/или из информации о допустимости значений критериев классам.

Метод STEPCLASS реализует гибкую процедуру диалога с ЛПР для выявления его классифицирующих правил. Для очередного не классифицированного объекта  $x \in X$  ЛПР предъявляется его значение по критерию, выбранному случайным образом (такой случайный выбор, как объясняется в [18], необходим для последующей проверки согласованности классифицирующих правил). Если этой информации ЛПР недостаточно, ему предлагается назвать критерий, значение которого он хочет узнать. Если ЛПР потребуется значение крите-

рия, отсутствующего во множестве  $Q$ , он должен назвать такой критерий, перечислить все его возможные значения, определить их допустимость для всех классов, упорядочить такие значения в соответствии со своими предпочтениями и, тем самым, расширить структуру проблемной области (и, соответственно, множество  $X$ ). К описанию классифицируемого объекта добавляется одно из значений нового критерия и сообщается ЛПР в дополнение к уже известной ему информации об объекте. Эта процедура заканчивается, когда:

(а) ЛПР относит совокупность значений запрошенных им критериев (в предположении любых значений остальных критериев, допустимых для указанного им класса) к классу из множества  $C$  или к новому классу, который будет включен во множество  $C$  (в последнем случае ЛПР должен определить допустимость всех значений всех критериев для нового класса) или

(б) установит несовместимость значений некоторых (или всех) запрошенных им критериев и, тем самым, отнесет объекты, содержащие такую несовместимую комбинацию, к классу  $C^{Inc}$ .

Для случая (а) получаем следующее правило:

$$\forall y \in X,$$

$$((G(y) \neq \{C^{Inc}\}, \forall q \in Q^+(x) \quad q(y) = q(x)) \Rightarrow F(y) = c),$$

где  $Q^+(x)$  – подмножество критериев, значения которых были запрошены ЛПР;  $c$  – класс, к которому ЛПР отнес объект  $x$ .

Будем называть такое правило **классифицирующим правилом**. Если при этом для некоторого объекта  $y$ , удовлетворяющего левой части импликации из классифицирующего правила,  $c \in G(y)$ , это означает, что такая классификация согласована с информацией, ранее полученной от ЛПР, и мы можем сжать  $G(y)$  до единственного элемента  $G(y) := \{c\}$ . Если окажется, что  $c \notin G(y)$ , то это является противоречием, которое следует проанализировать и, по возможности, устранить в диалоге с ЛПР. Причиной противоречия может быть ошибка в построении множеств допустимости  $V_m$ , и/или

ошибка в классификации объекта  $x$ , в том числе из-за того, что ЛПР запросил недостаточно критериев в  $Q^+(x)$ , и/или нарушение свойств C1-C3.

Классифицирующее правило может быть не только непосредственно применимым к некоторым объектам, как показано выше, но и косвенно применимым к другим объектам, сокращая их множества  $G(\cdot)$ , в том числе, возможно, до единственного элемента (класса). Рассмотрим объект  $z$  такой, что  $F(z) \neq C^{ink}, \forall q \in Q^+(x), (q(z), q(x)) \in R(q)$ . Согласно классифицирующему правилу, объект  $y$  со значениями критериев из  $Q^+(x)$  такими же, как и  $y$  объекта  $x$ , а критериев из  $Q \setminus Q^+(x)$  – такими же, как у объекта  $z$  ( $y: \forall q \in Q^+(x), q(y) = q(x); \forall q \in Q \setminus Q^+(x), q(y) = q(z)$ ), относится к классу  $c: F(y) = c$ .

Пусть  $O^1 = Q^+$ . Возьмем произвольный критерий  $o^1 \in O^1$ . Построим кортеж  $y^1$  из  $y$ , заменив значение критерия  $o^1$  с  $o^1(y) = o^1(x)$  на  $o^1(y^1) = o^1(z)$ . Поскольку  $(o^1(z), o^1(x)) \in R(o^1)$ , то  $(o^1(y^1), o^1(y)) \in R(o^1)$ . Так как все значения критериев  $Q \setminus O^1$  у объектов  $y$  и  $y^1$  одинаковы, преобразуем отношение на значениях критериев в отношение на объектах:  $(y^1, y) \in R$ . Построим  $O^2$ , удалив  $o^1$  из  $O^1$ :  $O^2 := O^1 \setminus o^1$ . Аналогично, построим  $y^2$  из  $y^1$ , заменив значение критерия  $o^2 \in O^2$  с  $o^2(y) = o^2(x)$  на  $o^2(y^2) = o^2(z)$ . Получим  $(y^2, y^1) \in R$ .  $O^3 := O^2 \setminus o^2$ . И так далее, пока не переберем все критерии множества  $Q^+(x)$ . Последний объект построенной последовательности  $y^{|Q^+(x)|}$  совпадает с  $z$ . Мы получили:

$$(y^1, y) \in R, (y^2, y^1) \in R, (y^3, y^2) \in R, \dots, \\ (z, y^{|Q^+|-1}) \in R.$$

Из транзитивности отношения  $R$  следует  $(z, y) \in R$ . Из условия согласованности клас-

сификации следует  $(F(z), c) \in R^C$ . Таким образом, мы, возможно, сократили множество классов, к которым может относиться объект  $z$  на основе имеющейся информации:  $G(z) := G(z) \cap \{d \mid d \in C, (d, c) \in R^C\}$ . В лучшем случае  $|G(z)| = 1$ , что означает косвенную классификацию объекта  $z$ . Однако может оказаться, что  $G(z) = \emptyset$  и информация ЛПР противоречива.

Аналогично, можно показать, что для всех  $z: F(z) \neq C^{ink}, \forall q \in Q^+(x), (q(x), q(z)) \in R_m$  справедливо  $(c, F(z)) \in R^C$  и

$$G(z) := G(z) \cap \{d \mid d \in C, (c, d) \in R^C\}.$$

Будем называть такое изменение множеств  $G(\cdot)$  **распространением по доминированию**.

Описанная выше процедура предъявления ЛПР объектов, подлежащих классификации, и распространения полученной информации по доминированию (с проверкой непротиворечивости), повторяется, пока не будет получена полная ( $\forall x |G(x)| = 1$ ) и согласованная классификация в рамках определенной структуры.

## 2. Упорядочение объектов на основе метода UniComBOS

На втором этапе предложенной процедуры метод UniComBOS упорядочивает, в случае необходимости, объекты внутри одного из упорядоченных классов. Информация, полученная в результате порядковой классификации, добавляется к базе предпочтений UniComBOS. Качественный характер порядковой классификации позволяет это сделать без потери информации и без ее добавления, в отличие от некоторых методов поддержки принятия решений, которые преобразуют вербальные предпочтения в числовые (например, методы, основанные на нечетких множествах).

Метод UniComBos решает задачу выбора лучшего объекта/упорядочения объектов по многим критериям в соответствии с предпочтениями ЛПР, которые формализуются в виде бинарных отношений строгого предпочтения  $P$  и равноценности  $I$ . Будем обозначать выявлен-

ные части предпочтений через  $P'$  и  $I'$  соответственно,  $P' \subseteq P$ ,  $I' \subseteq I$ . Изначально ни  $P$  и  $I$ , ни  $P'$  и  $I'$  неизвестны. ЛПР предъявляются для сравнения пары объектов, отличающиеся значениями небольшого числа критериев. Результаты сравнения пополняют отношения  $P'$  и  $I'$ . С помощью натуральной дедукции метод UniComBOS способен на основе отношений  $P'$  и  $I'$ , а также свойств C1 и C2, определить для любой пары объектов, следует ли ее принадлежность отношению  $P$  или  $I$ . Сами отношения  $P$  и  $I$  в явном виде не строятся.

Для дальнейшего изложения нам потребуются отношение доминирования и границы классов. Отношение доминирования строится из порядков на шкалах критериев:

$$P^d = \left\{ (x, y) \mid \forall i, (x_i, y_i) \in R(Q_i); \right. \\ \left. \exists j, (y_j, x_j) \notin R(Q_j) \right\}.$$

Используя свойства транзитивности предпочтений и независимости критериев по предпочтению, можно показать, что  $P^d \subseteq P$ .

Верхняя ( $Top(c)$ ) и нижняя ( $Bottom(c)$ ) границы любого класса  $c$  задаются через отношение доминирования:

$$Top(c) = \{x \mid F(x) = c; \nexists y: F(y) = c, (y, x) \in P^d\}; \\ Bottom(c) = \{x \mid F(x) = c; \nexists y: F(y) = c, (x, y) \in P^d\}.$$

**Утверждение 1.** Для любого объекта, не принадлежащего верхней границе своего класса:  $a: F(a) = c, a \notin Top(c)$ , существует доминирующий его элемент этой верхней границы:  $b \in Top(c), (b, a) \in P^d$ . Для любого объекта  $a: F(a) = c, a \notin Bottom(c)$  существует объект  $b \in Bottom(c), (a, b) \in P^d$ .

**Доказательство.** Пусть  $S = F^{-1}(c)$  – прообраз класса  $c$ . Построим последовательность вида  $(y^0, y^1, \dots, y^n)$ , где  $y^0 = a, n > 0, y^i \in S, (y^{i+1}, y^i) \in P^d$  и  $\nexists y: y \in S, (y, y^n) \in P^d$ . Как минимум, одна такая последовательность существует. Действительно, так как  $y^0 = a$  не принадлежит верхней границе, то  $\exists y^1: F(y^1) = c, (y^1, a) \in P^d$ . Если не существует объекта, доминирующего объект

$y^1$ , получаем последовательность  $(y^0, y^1)$ . В противном случае, добавляем к последовательности соответствующий объект  $y^2$  и так далее. Этот алгоритм обязательно остановится, поскольку в худшем случае он переберет все элементы множества  $S$ . Алгоритм не сможет попасть в цикл, так как отношение доминирования  $P^d$  транзитивно и асимметрично, и, следовательно, один и тот же объект не может появиться в последовательности более одного раза. Объект  $b = y^n$  и есть элемент верхней границы, доминирующий объект  $a$  (что следует из транзитивности отношения доминирования). Аналогично доказывается существование элемента нижней границы, доминируемого объектом  $a$ .

Из Утверждения 1 следует **Утверждение 2.** Для любого класса  $c$  с непустым прообразом ( $\exists a: F(a) = c$ ) существуют объекты, принадлежащие верхней и нижней границам ( $Top(c) \neq \emptyset, Bottom(c) \neq \emptyset$ ).

Из условия согласованности C3, учитывая связь между отношениями  $P$  и  $R$ ,  $P^C$  и  $R^C$ , и применяя правило вывода *modus tollens*, получаем  $\forall x \in X, \forall y \in X, (F(x), F(y)) \in P^C \Rightarrow (x, y) \in P$ .

Следовательно, в отношение  $P'$  можно добавить все пары объектов  $(x, y)$  такие, что объект  $x$  относится к более предпочтительному классу, чем объект  $y$ . Мы используем отношение  $P'$  вместо  $P$ , чтобы обозначить, что такие предпочтения являются входными для метода UniComBOS.

Классификация не дает информации об отношении  $I$ , поскольку нахождение пары объектов в одном классе или на одной границе не означает их равноценность.

Заметим, что в сравнении объектов, подлежащих упорядочению, может помочь информация об отношениях между другими объектами, которую можно извлечь из порядковой классификации, выполненной на первом этапе процедуры. Однако в отношение  $P'$  можно добавить только упорядоченные пары объектов, принадлежащих смежным границам соседних классов. Действительно, рассмотрим пару объектов  $(x, y)$  такую, что  $(F(x), F(y)) \in P^C$  и  $x$  не принадлежит нижней границе своего класса.

Тогда согласно Утверждению 1, в нижней границе класса  $F(x)$  существует такой объект  $z$ , что  $(x, z) \in P$ . Так как объект  $z$  относится к тому же классу, что и  $x$ ,

$$(F(x), F(y)) \in P^C \Rightarrow (F(z), F(y)) \in P^C \\ \Rightarrow (z, y) \in P.$$

По транзитивности получаем, что  $(x, y) \in P$  *всегда* можно вывести из  $(z, y) \in P$ , где  $z \in \text{Bottom}(F(x))$ . Аналогично, если объект  $y$  не принадлежит верхней границе своего класса, существует элемент верхней границы  $w \in \text{Top}(F(y))$ , и  $(x, y) \in P$  *всегда* можно вывести из  $(x, w) \in P$ . Соответственно, для любых двух объектов  $x$  и  $y$  из разных классов, таких что  $(F(x), F(y)) \in P^C$ , существуют объекты  $z \in \text{Bottom}(F(x))$  и  $w \in \text{Top}(F(y))$ , позволяющие вывести сравнение  $(x, y) \in P$ . Кроме того, если классы  $F(x)$  и  $F(y)$  не соседние, т.е.  $\exists c: (F(x), c) \in P^C, (c, F(y)) \in P^C$ , то сравнение  $(x, y) \in P$  можно вывести по транзитивности из сравнений  $(x, t) \in P$  и  $(t, y) \in P$ , где объект  $t$  относится к промежуточному классу  $c$ , которые, в свою очередь, выводятся из элементов отношения  $P$  на соответствующих границах. Таким образом, можно построить цепочку объектов таких, что сравнение любых двух ее последовательных элементов выводится из сравнения объектов на границах их классов, а совокупность таких сравнений позволяет вывести сравнение на исходных объектах  $x$  и  $y$  по транзитивности. Следовательно, достаточно добавлять в отношение  $P'$  только упорядоченные пары объектов из границ соседних классов. Это позволяет существенно сократить объем информации, передаваемой в метод UniComBOS, без потери способности метода сравнивать объекты. Кроме того, метод UniComBos использует порядки на шкалах критериев (отношения  $R(Q_m)$ ).

Вместе с предпочтениями на границе классов они образуют отношения  $P'$  и  $I'$ .

Метод UniComBOS содержит как процедуру вывода отношения предпочтения на произвольной паре объектов из информации, полученной на первом этапе предлагаемой процедуры, так и интерактивную процедуру выявления дополнительных предпочтений, если сравнение не выводится из имеющейся информации.

Рассмотрим пример. Пусть объекты оцениваются по трем критериям  $Q_1, Q_2, Q_3$  с тремя значениями каждый:  $X_i = \{1, 2, 3\}$ , где 1 – лучшее значение, а 3 – худшее. Соответственно, порядок на шкале каждого критерия имеет вид:

$$R(Q_i) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}.$$

В результате порядковой классификации получены следующие верхние (*Top*) и нижние (*Bottom*) границы классов:

$$\text{Top}(C_1) = \{(1, 1, 1)\};$$

$$\text{Bottom}(C_1) = \{(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)\};$$

$$\text{Top}(C_2) =$$

$$= \{(1, 1, 3), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (1, 3, 1), (2, 2, 1), (3, 1, 1)\};$$

$$\text{Bottom}(C_2) = \{(3, 3, 3)\}.$$

Пусть требуется сравнить два внутренних объекта, относящихся к классу  $C_2$ :  $(2, 1, 3)$  и  $(3, 3, 2)$ . Воспользуемся свойствами транзитивности предпочтений и независимости критериев по предпочтению, а также свойством согласованности в виде

$$\forall x \in X, \forall y \in X, (F(x), F(y)) \in P^C \Rightarrow (x, y) \in P :$$

1. Из  $(F((2, 1, 1)), F((1, 3, 1))) = (C_1, C_2) \in P^C$  следует  $((2, 1, 1), (1, 3, 1)) \in P$ .

2. Из независимости критериев по предпочтению следует  $((2, 1, 3), (1, 3, 3)) \in P$  (одинаковые значения (1) по критерию  $Q_3$  заменены на (3)).

3. Вывести искомое сравнение не получится без дополнительной информации о предпочтениях. Попросим ЛПР сравнить объекты  $(1, \omega_2, 3)$  и  $(3, \omega_2, 2)$ , где  $\omega_2$  означает, что по второму критерию допустимы любые значения, одинаковые для обоих объектов. Пусть для ЛПР первый объект предпочтительнее второго:  $((1, \omega_2, 3), (3, \omega_2, 2)) \in P'$ .



4. Поскольку

$$P' \subseteq P, ((1, \omega_2, 3), (3, \omega_2, 2)) \in P.$$

5. Из независимости критериев по предпочтению следует  $((1, 3, 3), (3, 3, 2)) \in P$  (одинаковые значения  $(\omega_2)$  по критерию  $Q_2$  заменены на (3)).

6. Из формул, полученных на шагах 2 и 5, и свойства транзитивности следует  $((2, 1, 3), (3, 3, 2)) \in P$ . Это и есть искомое сравнение.

В этом примере для сравнения пары объектов потребовалась дополнительная информация. В некоторых ситуациях информации о границах может оказаться достаточно, например, для вывода отношения  $((2, 1, 3), (1, 3, 3)) \in P$ , которое мы получили на втором шаге.

## Заключение

В статье предлагается двухэтапная процедура упорядочения объектов по многим критериям в соответствии с предпочтениями ЛПР применительно к многокритериальной обратной задаче об упаковке в контейнеры, когда она носит повторяющийся характер.

На первом этапе процедуры применяется метод STEPCLASS для предварительной порядковой классификации декартова произведения шкал критериев. Это позволяет для любого набора объектов, подлежащих упаковке, уже без участия ЛПР определить класс, к которому каждый объект этого набора относится. Если все объекты этого набора из нескольких наиболее предпочтительных классов удастся упаковать в имеющиеся контейнеры, но добавление к ним всех объектов из следующего по предпочтительности класса не позволяет выполнить их упаковку, на втором этапе применяется метод UniComBOS для упорядочения объектов только такого класса. Впервые показывается, что помимо информации о предпочтениях ЛПР, которая обычно используется в методе UniComBOS, можно (и нужно) использовать предпочтения ЛПР, выявленные в процессе порядковой классификации всех объектов такого набора, и, если применимо, предпочтения ЛПР, выявленные для предыдущих наборов объектов.

## Литература

1. Фуремс Е.М. Обратная задача об упаковке в контейнеры при наличии качественных критериев // Искусственный интеллект и принятие решений. № 3. 2016. С. 31-43.
2. Martello, S., & Toth, P. Solution of the zero-one multiple knapsack problem // *European Journal of Operational Research*. 4(4). 1980. pp.276-283.
3. Johnson D. S., Demers A., Ullman J. D., Garey M. R., Graham R. L. Worst-case performance bounds for simple one-dimensional packing algorithms // *SIAM Journal on Computing*. 3(4). 1974. pp.299-325.
4. Coffman E.G., Jr., Leung J.Y.-T., Ting D. Bin Packing: Maximizing the Number of Pieces Packed // *Acta Infomat.* vol. 9. 1978. pp. 263-271.
5. Ашихмин И. В. Продукционные правила и предпочтения/Третья Международная конференция «Системный анализ и информационные технологии» САИТ – 2009: Труды конференции. М. 2009. С. 247-251.
6. Neumann von J., Morgenstern O. Theory of games and economic behavior, 2nd ed. Princeton University Press, Princeton. 1947.
7. Keeney R., Raiffa H. Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs. J. Wiley, New York. 1976.
8. Figueira J., Mousseau V., Roy B. Electre methods. In: Figueira J, Greco S, and Ehrgott M (eds) Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys. Springer-Verlag, Boston. 2005. pp.133-162.
9. Greco S., Matarazzo B., Slowinski R. Rough sets methodology for sorting problems in presence of multiple attributes and criteria. *European Journal of Operational Research*. vol. 138. 2002. pp. 247-259.
10. Greco S. Dominance-based Rough Set Approach for Decision Analysis – a Tutorial. *Lecture Notes in Computer Science*. vol. 5009. 2008. pp. 23-24.
11. Zadeh L. Fuzzy sets. *Information Control*. vol. 8. 1965. pp.338-353.
12. Ларичев О.И., Мошкович Е.М. Качественные методы принятия решений. М.: Физматлит. 1996.
13. Saaty T.L. The Analytic Hierarchy Process. New York. McGraw Hill. 1980.
14. Ларичев О.И., Мечитов А.И., Мошкович Е.М., Фуремс Е.М. Выявление экспертных знаний. М.: Наука. 1989.
15. Larichev O.I., Moshkovich H.M., Furems E.M., Mechitov A.I., Morgoev V.K. Knowledge Acquisition for the Construction of the Full and Contradiction Free Knowledge Bases. Iec ProGAMMA, Groningen, The Netherlands. 1991.
16. Larichev O., Kochin D., Kortnev A. Decision Support System for Classification of a Finite Set of Multicriteria Alternatives. *Decision Support Systems*. 33. 2002. pp.13-21.
17. Ларичев О. И., Болотов А. А. Система ДИФКЛАСС: построение полных и непротиворечивых баз экспертных знаний в задачах дифференциальной диагностики // Научно-техническая информация. Серия 2. М.: ВИНТИ. 1996. С.9-15.
18. Фуремс Е.М. Многокритериальная порядковая классификация на основе метода STEPCLASS // Искусственный интеллект и принятие решений. № 4. 2012. С. 95-100.

19. Larichev O.I., Moshkovich H.M. ZAPROS-LM – A method and system for ordering multiattribute alternatives//European Journal of Operational Research.82. 1995. pp. 503-521.
20. Larichev O.I., Moshkovich H.M. Verbal Decision Analysis for Unstructured Problems. Kluwer Academic Publishers. Berlin. 1997.
21. Moshkovich H.M., Mechitov A.I., Olson D.L. Ordinal judgements in multiattribute decision analysis. European Journal of Operational Research. 137. 2002.pp. 625-641.
22. Ashikhmin I., Furems E. UniComBOS—Intelligent Decision Support System for multi-criteria comparison and choice //Journal of Multi-Criteria Decision Analysis. V. 13. No. 2-3. 2005. pp.147-157.
23. Simon H. The New Science of Management Decision. Harper and Row. New York. 1960.
24. Фуремс Е.М. Структуризация задач классификации, основанных на знаниях// Информационные технологии и вычислительные системы. № 3. 2007. С. 7-17.
25. Furems Eugenia M. Domain Structuring For Knowledge-Based Multiattribute Classification (A Verbal Decision Analysis Approach) TOP, Springer Berlin / Heidelberg. 19. 2001.pp.402–420.
26. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений/ Пер. с англ. М.:Наука. 1978. (Fishburn P. C. Utility theory for decision making. – Research Analysis Corp Mclean va. 1970. №. RAC-R-105).

**Ашихмин Илья Владимирович.** Научный сотрудник Норвежского университета естественных и технических наук. Окончил МФТИ в 2001 году. Кандидат физико-математических наук. Количество печатных работ: 26. Область научных интересов: теория и методы принятия решений, экспертные системы, искусственный интеллект. E-mail: ivashikhmin@gmail.com

**Фуремс Евгения Марковна.** Ведущий научный сотрудник ИСА ФИЦ ИУ РАН. Окончила Московский инженерно-экономический институт им. С. Орджоникидзе в 1973 году. Кандидат технических наук. Количество печатных работ: более 60 и соавтор трех монографий. Область научных интересов: принятие решений по многим критериям, комбинаторная оптимизация, построение систем поддержки диагностических решений. E-mail: fem@mail.ru

## Two-Stage Procedure for Items' Ordering upon Multiple Criteria

I.V. Ashikhmin, E.M. Furems

**Abstract.** Two-stage procedure for items ordering upon multiple criteria according to DM's preferences is proposed for inverse multicriteria bin packing problem solving. If such a problem arises repeatedly for different set of items, estimated upon the same criteria with the same scales, the STEPCLASS method is applied at the first stage for preliminary multicriteria sorting on the Cartesian product of the criteria's scales. Then, it allows determining a class for each item from each new set without DM's participation. In the case of necessity to order more precisely the objects from particular set within the only class, the UniComBOS method is applied at the second stage. It is shown that it is possible to use DM's preferences extracted at the stage of multicriteria sorting as source information for the UniComBOS method.

**Keywords:** multicriteria sorting, multicriteria ordering, criteria preference-independence, consistency of preferences, class borders, STEPCLASS, UniComBOS.

## References

1. Furems, E.M., Obratnaya zadacha upakovli pri nalichii kachestvennykh kriteriev [Inverse bin packing problem with multiple qualitative criteria]. Iskustvennyi Intellect i Prinyatie Reshenii [Artificial Intelligence and Decision Making], 2016, No.3, pp. 31-43.
2. Martello, S., & Toth, P. 1980. Solution of the zero-one multiple knapsack problem// European Journal of Operational Research, 4(4), 276-283.
3. Johnson, D. S., Demers, A., Ullman, J. D., Garey, M. R., & Graham, R. L. 1974. Worst-case performance bounds for simple one-dimensional packing algorithms//SIAM Journal on Computing, 3(4), 299-325.
4. Coffman, E.G., Jr., Leung, J.Y.-T., Ting, D. 1978. Bin Packing: Maximizing the Number of Pieces Packed// Acta Infomat., vol. 9, 263-271.
5. Ashikhmin, I.V., Productzionnye pravila I predpochtenya [Production rules and preferences]. Trudy Tret'yey Mezhdunarodnoy konferentsiyi 'Sistemnyi Analiz i Informatzionnye Tehnologii' (SAIT – 2009) [Proceedingth of the 3<sup>rd</sup> International Conference 'System Analysis and Information Technology' (SAIT 2009)]. M., 2009, pp. 247-251.
6. von Neumann, J. and Morgenstern, O., 1947. Theory of games and economic behavior, 2nd ed. Princeton University Press, Princeton.
7. Keeney, R., Raiffa, H., 1976. Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs. J. Wiley, New York.
8. Figueira, J., Mousseau, V., Roy, B., 2005. Electre methods. In: Figueira J, Greco S, and Ehrgott M (eds) Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys. Springer-Verlag, Boston, pp. 133-162.
9. Greco, S., Matarazzo, B., Slowinski, R., 2002. Rough sets methodology for sorting problems in presence of multiple attributes and criteria. European Journal of Operational Research, vol. 138: 247-259.

10. Greco, S., 2008. Dominance-based Rough Set Approach for Decision Analysis –a Tutorial. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 5009/2008: 23-24.
11. Zadeh, L., 1965. Fuzzy sets. *Information Control*, vol. 8: 338-353
12. Larichev, O.I., Moshkovich, E.M., 1996. *Kachestvennye metody prinyatiya reshenii* [Qualitative methods of decision making], M.: 'Fizmatlit'.
13. Saaty, T.L., *The Analytic Hierarchy Process*. 1980. New York, USA: McGraw Hill,
14. Larichev, O.I., Mechitov, A.I., Moshkovich, E.M., Furems, E.M., 1989. *Выявление экспертных знаний* [Expert's knowledge acquisition]. M.: 'Nauka'.
15. Larichev O.I., Moshkovich H.M., Furems E.M., Mechitov A.I., Morgoev V.K. 1991. Knowledge Acquisition for the Construction of the Full and Contradiction Free Knowledge Bases. *Iec ProGAMMA*, Groningen, The Netherlands.
16. Larichev, O., Kochin, D., Kortnev, A. 2002. Decision Support System for Classification of a Finite Set of Multicriteria Alternatives. *Decision Support Systems*. 33:13-21
17. Larichev, O.I., Bolotov A.A., 1996. Sistema 'DIFCLASS': postroenie polnyh and neprotevorechivyh baz expertnyh znaniy v zadachah differentsial'noi diagnostiki [System DIFCLASS for constructing complete and non-contradictory expert's knowledge bases in differential diagnostics problems]// *Nauchno-technicheskaya informatsiya* [Scientific and Engineering Information], series 2, VINITI, 9:9-15.
18. Furems, E.M., 2012. Mnogocriterial'naya porjadkovaya klassifikatsiya na osnove metoda STEPCLASS [STEPCLASS-based approach to multicriteria sorting]// *Iskusstvennyi Intellekt i Prinyatie Reshenii* [Artificial Intelligence and Decision Making], No.4, pp. 95-100.
19. Larichev O.I., Moshkovich H.M. 1995. ZAPROS-LM – A method and system for ordering multiattribute alternatives//*European Journal of Operational Research* 82, 503-521.
20. Larichev O.I., Moshkovich H.M. 1997. *Verbal Decision Analysis for Unstructured Problems*. Kluwer Academic Publishers, Berlin.
21. Moshkovich H.M., Mechitov A.I., Olson D.L., 2002. Ordinal judgements in multiattribute decision analysis. *European Journal of Operational Research* 137, 625-641.
22. Ashikhmin I., Furems E. 2005. UniComBOS—Intelligent Decision Support System for multi-criteria comparison and choice // *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*. – V. 13. – No. 2-3: 147-157.
23. Simon H. 1960. *The New Science of Management Decision*. Harper and Row, New York
24. Furems, E.M., 2007. Strukturizatsiya zadach klassifikatsii osnovannyh na znaniyah [Structuring of knowledge-based classification problems]// *Iskusstvennyi Intellekt i Prinyatie Reshenii* [Artificial Intelligence and Decision Making], no. 3, pp. 7-17
25. Furems Eugenia M. 2001. Domain Structuring For Knowledge-Based Multiattribute Classification (A Verbal Decision Analysis Approach) TOP, Springer Berlin / Heidelberg, 19:402–420
26. Fishburn P. C. *Utility theory for decision making*. – Research Analysis Corp Mclean va, 1970. – №. RAC-R-105.

**Ilya V. Ashikhmin** is a research scientist in the Norwegian University of Science and Technology. Ilya graduated from Moscow Institute of Physics and Technology with distinction in 2001. He defended the PhD thesis «The method for combination of pair-wise comparisons and the system for intelligent support of multi-criteria choice» in 2006. The author of 26 papers. His scientific interests lie in the theory of decision making, expert systems, mathematical logic, weak artificial intelligence. E-mail: ivashikhmin@gmail.com

**Eugenia M. Furems** is Leading Researcher at Russian Academy of Sciences Federal Research Center 'Informatics and Control', Institute for System Analysis of the RAS (ISA), 9, Prospect of 60 let Otyabrya, 117312, Moscow, Russia. She graduated from Moscow Institute for engineering and economics with distinction in 1973. She defended the PhD thesis 'Multicriteria decision making problems with constrained resources' in 1984 at the ISA. She has published more than 60 papers and two monographs (with coauthors). Her scientific interests lie in the theory of decision making, combinatorial optimization, and diagnostics decision support systems. E-mail: fem@mail.ru