

Метод нечеткого вывода для одного класса систем MISO-структуры при нечетких входах

Аннотация. При нечетком моделировании на входы моделируемых систем могут поступать как четкие значения, так и нечеткие. Вычислительная сложность нечеткого логического вывода при нечетких входах соответствует экспоненциальной сложности. В работе описывается новый метод вывода на основе теоремы о декомпозиции многомерной нечеткой импликации и нечеткого значения истинности. Данный метод дает возможность при нечетких входах реализовать вывод с полиномиальной вычислительной сложностью, что делает эффективным его использование для моделирования систем MISO-структуры большой размерности.

Ключевые слова: логический тип вывода, теорема о декомпозиции, нечеткое значение истинности.

Введение

В настоящее время существуют различные методы нечеткого вывода. Согласно классификации, например в [1], все методы можно разделить на три типа: логический, вывод типа Мамдани и вывод типа Такаги-Сугено. В подавляющей части из них используются четкие значения, поступающие на входы моделируемой системы. Известные методы для нечетких входов не применимы в большинстве практических задач из-за экспоненциальной вычислительной сложности, не позволяющей осуществить вывод за приемлемое время для систем с большим количеством входов [2].

В данной статье развивается метод вывода логического типа для систем, в которых входные данные формализуются функциями принадлежности, т.е. представляют собой нечеткие значения, основанный на теореме декомпозиции нечеткой многомерной импликации. Данная теорема доказывается при условии, если лингвистическая связка в антецеденте нечетких правил моделируется t-нормой – min, либо t-конормой – max. Улучшение данного метода осуществляется за счет применения нечеткого значения истинности, определение которого, для некоторых функций принадлежно-

стей, выполняется аналитически [4], а в случае кусочно-линейного представления функции принадлежности разработан эффективный алгоритм [5].

1. Постановка задачи

Лингвистическая модель представляет собой множество нечетких правил R_k , $k = \overline{1, N}$ вида:

R_k : Если x_1 есть A_{1k} * x_2 есть A_{2k} * ... * x_n есть A_{nk} , то y есть B_k , (1)

где N – количество нечетких правил, $A_{ik} \subseteq X_i$, $i = \overline{1, n}$, $B_k \subseteq Y$ – нечеткие множества, которые характеризуются функциями принадлежности $\mu_{A_{ik}}(x_i)$ и $\mu_{B_k}(y)$, соответственно, $i = \overline{1, n}$. $x_1, x_2, \dots, x_n$ – входные переменные лингвистической модели, причем $[x_1, x_2, \dots, x_n]^T = \mathbf{x} \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. Символами X_i , $i = \overline{1, n}$ и Y обозначаются соответственно пространства входных и выходных переменных. Если ввести обозначение $\mathbf{X} = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ и $\mathbf{A}_k = A_{1k} \times A_{2k} \times \dots \times A_{nk}$, то правило (1) представляется в виде нечеткой импликации:

$$R_k : A_k \longrightarrow B_k, \quad k = \overline{1, N}.$$

Правило R_k можно формализовать как нечеткое отношение, определенное на множестве $X \times Y$, т.е. $R_k \subseteq X \times Y$ – это нечеткое множество с функцией принадлежности:

$$\mu_{R_k}(x, y) = \mu_{A_k \longrightarrow B_k}(x, y) = I(\mu_{A_k}(x), \mu_{B_k}(y)),$$

где $I(\bullet)$ – импликация, $*$ – лингвистические связки «И» либо «ИЛИ».

Ставится задача определить нечеткий вывод $B'_k \subseteq Y$ для системы, представленной в виде (1), если на входах – нечеткие множества $A' = A'_1 \times \dots \times A'_n \subseteq X$ или x_i есть A'_i и ... и x_n есть A'_n .

В соответствии с обобщенным нечетким правилом modus ponens [3], нечеткое множество B'_k определяется комбинацией нечеткого множества A' и отношения R_k , т.е.

$$B'_k = A' \circ (A_k \longrightarrow B_k). \quad (2)$$

Сложность выражения (2) – экспоненциальная, т.е. $O(|X|^n * |Y|)$.

2. Метод вывода на основе нечеткого значения истинности и теоремы о декомпозиции

Как известно, частным случаем композиционного правила вывода является обобщенное правило modus ponens, которое для систем с одним входом описывается соотношением [1]:

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in X} \{ \mu_{A'}(x) * I(\mu_A(x), \mu_B(y)) \}, \quad (3)$$

где $\mu_{A'}(x)$, $\mu_A(x)$, $\mu_{B'}(y)$, $\mu_B(y)$ – функции принадлежности, $*$ – t -норма, представляющая собой пересечение нечеткого факта A' и нечеткой импликации I , аргументом которой является посылка A и вывод B .

Нечеткие множества описываются на пространстве рассуждений X для посылки и факта и на Y для значения B и результата вывода B' .

Используя правило истинной модификации [6], можно записать:

$$\mu_{A'}(x) = \tau_{A/A'}(\mu_A(x)),$$

где $\tau_{A/A'}(\bullet)$ – нечеткое значение истинности нечеткого множества A относительно A' , которое представляет функцию принадлежности совместности $CP(A, A')$ A по отношению к A' , причем A' рассматривается как достоверное [7]:

$$\tau_{A/A'}(t) = \mu_{CP(A, A')}(t) = \sup_{\substack{\mu_A(x)=t \\ x \in X}} [\mu_{A'}(x)] \quad (4)$$

$$t \in [0, 1].$$

При переходе от переменной x к переменной t , обозначив $t = \mu_A(x)$ получим:

$$\mu_{A'}(x) = \tau_{A/A'}(\mu_A(x)) = \tau_{A/A'}(t).$$

Тогда (3) записывается в следующем виде:

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{t \in [0, 1]} \{ \tau_{A/A'}(t) * I(t, \mu_B(y)) \}. \quad (5)$$

Если функции принадлежности $\mu_A(x)$ и $\mu_{A'}(x)$ задаются в виде гауссовых кривых либо в виде колоколообразной функции, то, как следует из [4], нечеткое значение истинности (4) определяется аналитически. В случае кусочно-линейного представления функций принадлежности разработан алгоритм с полиномиальной вычислительной сложностью [5].

Рассмотрим теперь теорему о декомпозиции многомерной нечеткой импликации. Она может быть использована в том случае, если моделирование лингвистической связки «И» в антецеденте правила (1) применяется t -норма – $\min$, а для лингвистической связки «ИЛИ» – t -норма – $\max$.

Теорема. Если $I[\mu_{A_{ik}}(x_i), \mu_B(y)]$, $i = \overline{1, n}$ не возрастает по аргументу $\mu_{A_{ik}}(x_i)$, то:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \text{В случае лингвистической связки «И»} \\ & I(\mu_{A_k}(x), \mu_B(y)) = I(\min_{i=1, n} \{ \mu_{A_{ik}}(x_i) \}, \mu_B(y)) = \\ & = \max_{i=1, n} \{ I(\mu_{A_{ik}}(x_i), \mu_B(y)) \}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{В случае лингвистической связки «ИЛИ»} \\ & I(\mu_{A_k}(x), \mu_B(y)) = I(\max_{i=1, n} \{ \mu_{A_{ik}}(x_i) \}, \mu_B(y)) = \\ & = \min_{i=1, n} \{ I(\mu_{A_{ik}}(x_i), \mu_B(y)) \}. \end{aligned}$$

Рассмотрим доказательство свойства (1):

Определение. Функция $I(\mu_{A_{ik}}(x_i), \mu_B(y))$ является невозрастающей по аргументу $\mu_{A_{ik}}(x_i)$, если $\forall \mu_B^*(y) \in [0, 1]$ из условия $\mu_{A_{ik}}^l(x_i) > \mu_{A_{ik}}^m(x_i)$, следует неравенство:

$$I(\mu_{A_{ik}}^l(x_i), \mu_B^*(y)) \leq I(\mu_{A_{ik}}^m(x_i), \mu_B^*(y)). \quad (6)$$

Выберем произвольный набор значений аргументов $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ и определим для них антецедент правил (1), когда лингвистическая связка «И» моделируется операцией «MIN»:

$$\mu_{A_{jk}}(x_j^*) = \min_{i=1, n} \{\mu_{A_{ik}}(x_i^*)\}, \quad (7)$$

отсюда следует, что: $\mu_{A_{jk}}(x_j^*) \leq \mu_{A_{ik}}(x_i^*), \forall i = \overline{1, n}$.

В соответствии с определением (6), функция $I(\bullet)$ является невозрастающей. Отсюда имеем:

$$I(\mu_{A_{jk}}(x_j^*), \mu_B^*(y)) \geq I(\mu_{A_{ik}}(x_i^*), \mu_B^*(y)), \forall i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Тогда, учитывая соотношение (8):

$$I(\mu_{A_{jk}}(x_j^*), \mu_B^*(y)) = \max_{i=1, n} \{I(\mu_{A_{ik}}(x_i^*), \mu_B^*(y))\} \quad (9)$$

Так как $I(\mu_{A_{jk}}(x_j^*), \mu_B^*(y))$ существует в правой части выражения (8), то принимая во внимание (7), перепишем (9) в виде:

$$I(\min_{i=1, n} \{\mu_{A_{ik}}(x_i^*), \mu_B^*(y)\}) = \max_{i=1, n} \{I(\mu_{A_{ik}}(x_i^*), \mu_B^*(y))\} \quad (10)$$

Выражение (10) справедливо для $\forall \mu_B^*(y) \in [0, 1]$ и $\forall (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$.

Свойство (1) теоремы доказано. Свойство (2) доказывается аналогично.

Для системы со многими входами (3) имеет вид:

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in X} \{\mu_{A'}(x) * I(\mu_{A_k}(x), \mu_B(y))\}. \quad (11)$$

При выполнении условий теоремы о декомпозиции многомерной нечеткой импликации о не возрастании $I[\mu_{A_{ik}}(x_i), \mu_B(y)], i = \overline{1, n}$ относительно $\mu_{A_{ik}}(x_i)$ и использования лингвистической связки «И» (11) примет вид:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{i=1, n} \{\sup_{x_i \in X_i} \{\mu_{A_i}(x_i) * I(\mu_{A_{ik}}(x_i), \mu_{B_k}(y))\}\}. \quad (12)$$

Выражение (12) может быть записано через нечеткое значение степени истинности, как следует из (4), т.е. (12) будет иметь вид:

$$\mu_{B_k'}(y) = \max_{i=1, n} \{\sup_{t_i \in [0, 1]} \{\tau_{A_{ik}/A_i}(t_i) * I(t_i, \mu_{B_k}(y))\}\}. \quad (13)$$

Дискретный аналог соотношения (13) имеет полиномиальную вычислительную сложность, т.е. $O(|t_i| * |Y| * n)$. Условие о не возрастании $I(t_i, \mu_{B_k}(y)), i = \overline{1, n}$ относительно t_i выполняется для следующих импликаций:

1) Импликация Лукасевича

$$I(t_i, \mu_b) = \min[1, 1 - t_i + \mu_b]$$

2) Импликация Клини-Динса

$$I(t_i, \mu_b) = \max[1 - t_i, \mu_b]$$

3) Импликация Фодора

$$I(t_i, \mu_b) = \begin{cases} 1, t_i \leq \mu_b \\ \max[1 - t_i, \mu_b], t_i > \mu_b \end{cases}$$

4) Импликация Райхенбаха

$$I(t_i, \mu_b) = 1 - t_i + t_i * \mu_b$$

5) Импликация Решера

$$I(t_i, \mu_b) = \begin{cases} 1, t_i \leq \mu_b \\ 0, t_i > \mu_b \end{cases}$$

6) Импликация Гогена

$$I(t_i, \mu_b) = \begin{cases} \min\left[1, \frac{\mu_b}{t_i}\right], t_i > 0 \\ 1, t_i = 0 \end{cases}$$

7) Импликация Геделя

$$I(t_i, \mu_b) = \begin{cases} 1, t_i \leq \mu_b \\ \mu_b, t_i > \mu_b \end{cases}$$

8) Импликация Ягера

$$I(t_i, \mu_b) = \begin{cases} 1, t_i = 0 \\ [\mu_b]^{t_i}, t_i > 0 \end{cases}$$

9) Импликация Алиева (ALI-2)

$$I(t_i, \mu_b) = \begin{cases} 1, t_i \leq \mu_b \\ \min[(1 - t_i), \mu_b], t_i > \mu_b \end{cases}$$

10) Импликация Алиева (ALI-3)

$$I(t_i, \mu_b) = \begin{cases} 1, t_i \leq \mu_b \\ \frac{\mu_b}{[t_i + (1 - \mu_b)]}, t_i > \mu_b \end{cases}$$

11) Импликация Алиева (ALI-4)

$$I(t_i, \mu_b) = \begin{cases} \frac{1 - t_i + \mu_b}{2}, t_i > \mu_b \\ 1, t_i \leq \mu_b \end{cases}$$

На Рис. 1-Рис. 6 показано выполнение данного условия графически для некоторых импликаций при табулировании μ_b от 0 до 1 с шагом 0.1.

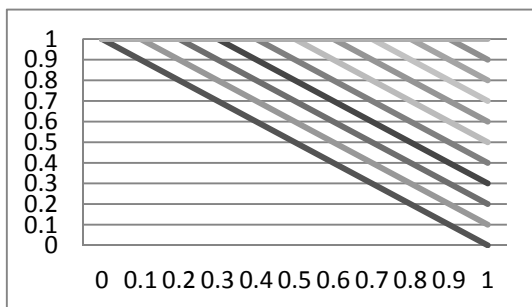


Рис. 1. Импликация Лукасевича

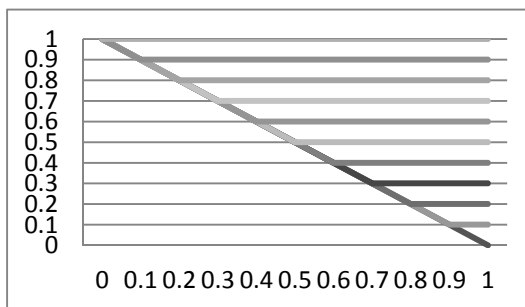


Рис. 2. Импликация Клини-Динса

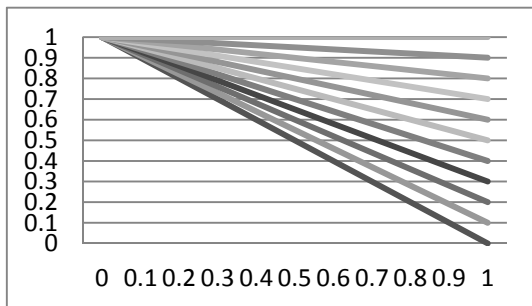


Рис. 3. Импликация Райхенбаха

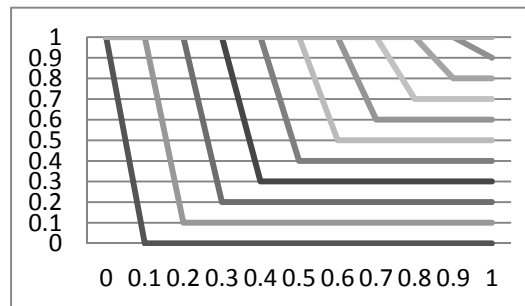


Рис. 4. Импликация Геделя

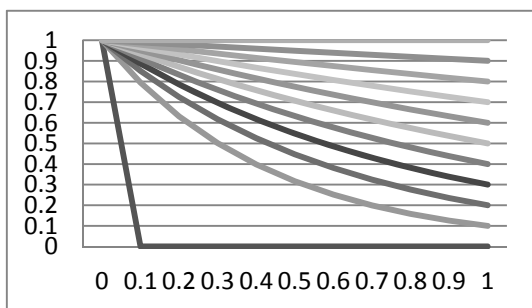


Рис. 5. Импликация Ягера

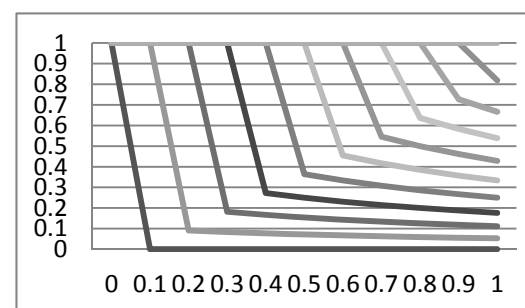


Рис. 6. Импликация Алиева (ALI-3)

3. Вывод выходного значения для блока правил

Рассмотрим выходные значения для N правил вида (1), используя метод дефаззификации центра тяжести [1]:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1, N} \bar{y}_k * \mu_{B'}(\bar{y}_k)}{\sum_{k=1, N} \mu_{B'}(\bar{y}_k)}, \quad (14)$$

где $\bar{y}$ – четкий выход системы состоящей из N правил вида (1); $\bar{y}_k$, $k = \overline{1, N}$ – центры функций принадлежности $\mu_{B_k}(y)$, т.е. значения, в которых $\max_y \mu_{B_k}(y) = 1$. B' получается при

логическом подходе с помощью операции пересечения [1] в соответствии с выражением:

$$B' = \bigcap_{j=1, N} B'_j.$$

Функция принадлежности B' вычисляется с использованием t -нормы, т.е.:

$$\mu_{B'}(y) = T_{j=1, N} \mu_{B'_j}(y). \quad (15)$$

Если выполняется условие о не возрастании импликации $I(t_i, \mu_{B_k}(y))$, $i = \overline{1, n}$ относительно t_i и используется лингвистическая связка «И» в (1), то из соотношений (14), (15) и (13) получим выражение:

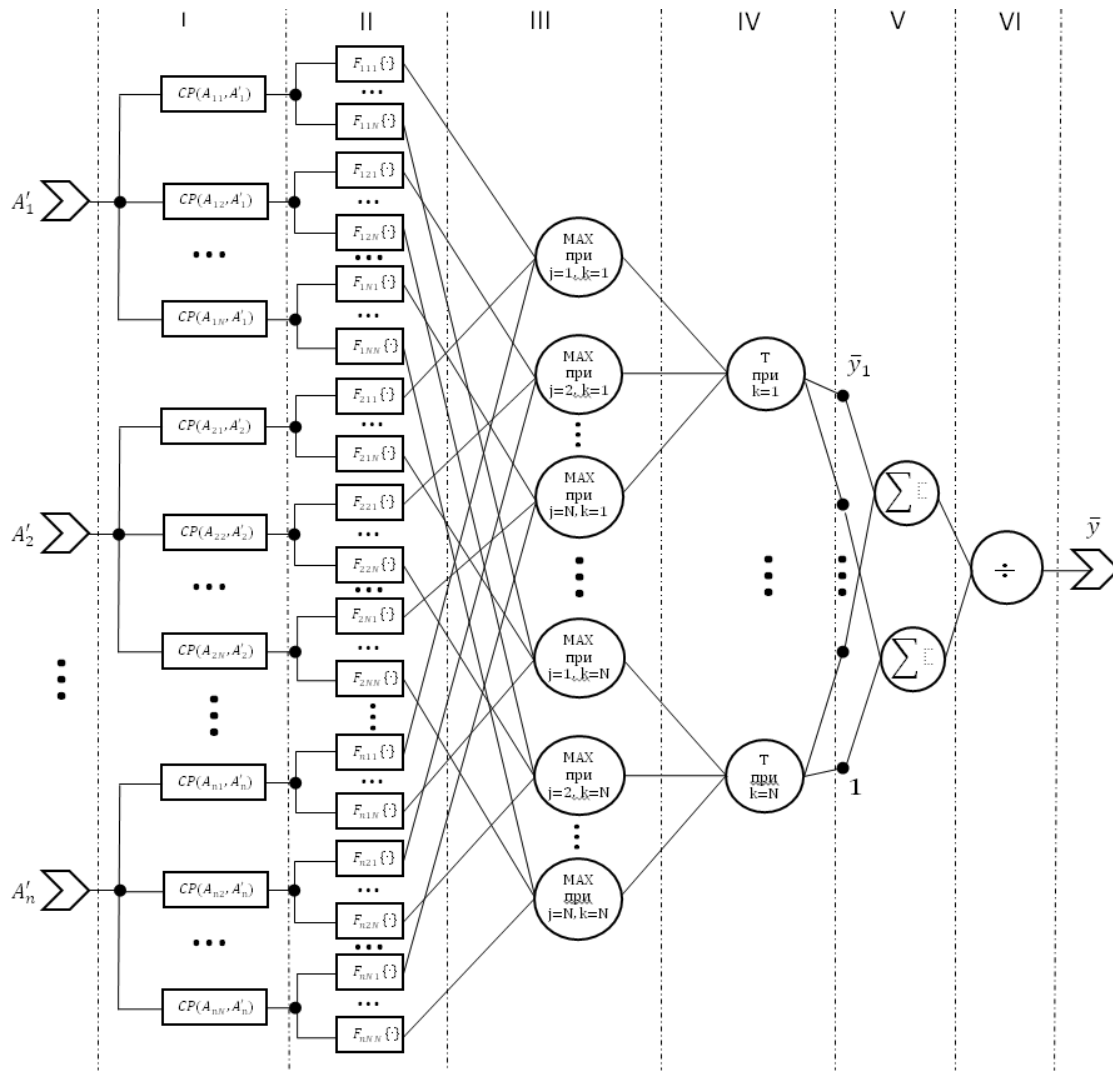


Рис. 7. Сетевая структура для блока правил

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1, N} \bar{y}_k \cdot T_{j=1, N} \{ \max_{i=1, n} \{ \sup_{t_i \in [0, 1]} \{ \tau_{A_{ik}/A_i}(t_i) * I(t_i, \mu_{B_j}(\bar{y}_k)) \} \} \}}{\sum_{k=1, N} T_{j=1, N} \{ \max_{i=1, n} \{ \sup_{t_i \in [0, 1]} \{ \tau_{A_{ik}/A_i}(t_i) * I(t_i, \mu_{B_j}(\bar{y}_k)) \} \} \}} \quad (16)$$

Соотношению (16) ставится в соответствие сетевая структура (Рис. 7), где на втором уровне определяется выражение:

$$F_{ijk} \{ \cdot \} = \sup_{t_i \in [0, 1]} \{ \tau_{A_{ik}/A_i}(t_i) * I(t_i, \mu_{B_j}(\bar{y}_k)) \}.$$

Данная сетевая структура, используя алгоритмы обучения, соответственно преобразовывается в нейро-нечеткую систему с нечеткими входами.

Заключение

В работе предложен метод нечеткого вывода для систем логического типа с использованием теоремы о декомпозиции многомерной нечеткой импликации и нечеткого значения истинности. Вычислительная сложность предложенного метода соответствует полиномиальным алгоритмам.

Разработана сетевая структура получения выходного значения для блока правил, что дает возможность провести дальнейшие исследования по обучению, варьируя вид нечеткой импликации, а также параметры функций принадлежности и, как следует из структуры сети, применить методы параллельных вычислений.

Полиномиальная вычислительная сложность позволяет использовать этот метод для решения задач моделирования систем с большим количеством нечетких входов, таких как диагностика, прогнозирование, управление [8].

Литература

1. Рутковский Л. Методы и технологии искусственного интеллекта / Пер. с польск. — М.: Горячая линия-Телеком, 2010. 520 с. (Rutkowski L. Methods and techniques of artificial intelligence. PWN, 2009. 452 p.)
2. Куценко Д. А., Синюк В. Г. Методы вывода для систем со многими нечеткими входами // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2015. №. 3. С. 49-57.
3. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир. 1976.
4. Синюк В. Г., Пивненко Е. В. Об аналитическом вычислении нечеткого значения истинности. //Сборник трудов Всероссийской научной конференции по нечетким системам и мягким вычислениям (НСМВ-2006). М.: Физматлит. 2006. С. 129-133.
5. Куценко Д. А., Синюк В. Г. Алгоритмы нахождения СР при кусочно-линейном представлении функций принадлежности // Сборник трудов второй Всероссийской научной конференции по нечетким системам и мягким вычислениям (НСМВ-2008). Ульяновск: Ул-ГТУ. 2008. С. 87-92.
6. Борисов А. Н., Алексеев А. В., Крумберг О. А. и др. Модели принятия решений на основе лингвистической переменной. Рига. Зинатне. 1982. 256 с.
7. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. М.: Радио и связь. 1990.
8. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. М.: Бином. Лаборатория знаний. 2009. С. 798.

Синюк Василий Григорьевич. Профессор Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова». Окончил Харьковский политехнический институт в 1976 году. Кандидат технических наук. Количество печатных работ: 110, в том числе 3 монографии. Область научных интересов: мягкие вычисления, принятие решений, методы искусственного интеллекта. E-mail: vgsinuk@mail.ru

Панченко Максим Владимирович. Аспирант Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова» (БГТУ им. Шухова). Окончил БГТУ им. Шухова в 2011 году. Количество печатных работ: 15, в том числе 1 монография. Область научных интересов: методы и технологии искусственного интеллекта, представление знаний, мягкие вычисления. E-mail: panchenko.maks@gmail.com

Method of fuzzy inference for one class of MISO-structure systems with fuzzy inputs

V.G. Sinyuk, M.V. Panchenko

Abstract. In fuzzy modeling, the inputs of the simulated systems can receive both crisp values and fuzzy. Computational complexity of fuzzy inference with fuzzy inputs corresponds to an exponential. This paper describes a new method of inference, based on the theorem of decomposition of a multidimensional fuzzy implication and a fuzzy truth value. This method is considered for fuzzy inputs and has a polynomial complexity, which makes it possible to use it for modeling large-dimensional MISO-structure systems.

Keywords: logical type of inference, decomposition theorem, fuzzy truth value.

References

1. Rutkowski, L. 2010. Methods and techniques of artificial intelligence. PWN, 2009. 452 p.
2. Kutsenko, D. A., Sinuk, V. G. 2015. Metody vyvoda dlya sistem so mnogimi nechetkimi vhodami [Methods of inference for systems with many fuzzy inputs]. Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Theory and control systems]. vol. 3. 49-57.
3. Zadeh, L. 1976. Ponyatie lingvisticheskoy peremennoi i ego primenenie k prinyatiu priblizhennih resheniy [Concept of a linguistic variable and its application to the approximate reasoning]. Moscow: Mir.
4. Sinuk, V. G., Pivnenko, E. V. 2006. Ob analiticheskom vychislenii nechetkogo znacheniya istinnosti [About an analytic calculation of fuzzy truth value]. Sbornik trudov Vserossijskoj nauchnoj konferencii po nechetkim sistemam i myagkim vychisleniyam (NSMV-2006) [Proceedings of the All-Russian Scientific Conference on Fuzzy Systems and Soft Computing (FSSC-2006)]. Moscow. 129-133.
5. Kutsenko, D. A., Sinuk, V. G. 2008. Algoritmy nahozhdeniya CP pri kusочно-linejnom predstavlennii funkcion pri nadlezhnosti [Algorithms for finding CP under a piecewise linear representation of membership functions]. Sbornik trudov vtoroj Vserossijskoj nauchnoj konferencii po nechetkim sistemam i myagkim vychisleniyam (NSMV-2008) [Proceedings of the Second All-Russian Scientific Conference on Fuzzy Systems and Soft Computing (FSSC-2008)]. Ulyanovsk. 87-92.

6. Borisov, A.N. et al. 1982. Modeli prinyatiya reshenij na osnove lingvisticheskoy peremennoj [Models of decision-making based on a linguistic variable]. Riga: Zinatne. 256 p.
7. Dubua, D., and Prad, A. 1990. Teoriya vozmozhnostej. Prilozheniya k predstavleniyu znanij v informatike [Theory of opportunities. Application to knowledge representation in computer science]. Moscow: Radio and communication.
8. Pegat, A. 2009. Nechetkoe modelirovanie i upravlenie [Fuzzy modeling and control]. Moscow: Binom. Knowledge lab. 798 p.

Sinyuk V.G. Professor of the Federal state budget educational institution of higher education «Belgorod state technological university named after V.G. Shouhov» (BSTU named after V.G. Shouhov), Belgorod, Kostyukova str., 46. Ph.D., assistant professor. Number of publications: 110 (including 3 monograph). Research interests: soft computing, decision making, methods of artificial intelligence. E-mail: vgsinuk@mail.ru

Panchenko M.V. Ph.D. student of the of the Federal state budget educational institution of higher education «Belgorod state technological university named after V.G. Shouhov» (BSTU named after V.G. Shouhov), Belgorod, Kostyukova str., 46,. Number of publications: 15 (including 1 monograph). Research interests: methods and techniques of artificial intelligence, knowledge representation, soft computing. E-mail: panchenko.maks@gmail.com