А.О. Шевляков, М.Г. Матвеев

Сравнение различных нечетких арифметик[1]

Аннотация. В статье дается сравнение алгебры двухкомпонентных нечетких чисел с двумя другими подходами к выполнению операций над нечеткими числами. В качестве первого подхода выбран принцип обобщения Л. Заде, второго - предложенная Ю. Чалко-Кано с соавторами в 2014 г. одноуровневая ограниченная интервальная арифметика. Показаны отношения между параметрами результатов вычислений с использованием данных подходов. Проведено сравнение подходов на ряде численных примеров.

Ключевые слова: нечеткая алгебраическая структура, нечеткая арифметика.

Введение

Теория нечетких множеств Л. Заде успешно используется для отображения неопределенности, обусловленной применением качественных шкал при измерении параметров и переменных исследуемых объектов. В частности, эта неопределенность характерна для многих задач управления и принятия решений. Математические модели таких задач включают параметры и переменные, заданные как нечеткие числа или нечеткие переменные. Это позволяет получать не только численные, но и аналитические решения задач управления и принятия решений в условиях неопределенности. Однако на практике эти возможности используются не в полной мере из-за проблем реализации процессов обработки нечеткой числовой информации. Классические подходы к операциям с нечеткими числами основываются на принципе обобщения [1]. Распространение получили представления нечетких чисел в виде r-чисел с выпуклыми функциями принадлежности, позволяющие существенно упростить вычислительный процесс. На этой основе разработано множество разнообразных алгебраических подходов к реализации нечетких вычислений, некоторые из которых можно найти в работах [2-8]. Тем не менее, некоторые алгебраические и вычислительные особенности операций над нечеткими числами сохраняются и продолжают сдерживать их широкое практическое применение. Выделим следующие негативные особенности:

- операции над нечеткими числами могут повлечь неоправданное расширение неопределенности результата, делая его зачастую практически неприемлемым;
- нечеткие результаты решения задач не всегда могут быть адекватно интерпретируемы из-за искажения формы нечеткого числового результата или (и) искажения естественных свойств и отношений классических моделей (например, нечеткие параметры не сохраняют тождественность уравнения при подстановке решения), что влечет снижение, а иногда и потерю адекватности моделей;
- существующее многообразие инструментальных программных средств решения различных математических задач принятия решений и управления, ориентированное на работу с действительными числами, не может быть использовано при обработке нечетких данных вследствие особенностей реализации арифметических операций над нечеткими числами и операций сравнения нечетких чисел; необходима разработка специального программного инструментария.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ грант №17-01-00251.

В работе [9] была предложена алгебра двухкомпонентных чисел, направленная на устранение указанных недостатков. Целесообразно продолжить начатое в работе исследование и выполнить детальный сравнительный анализ алгебры двухкомпонентных чисел и известных подходов к реализации операций над нечеткими числами.

Для сравнения выбраны классический подход к выполнению операций, основанный на принципе обобщения Л. Заде [1], и современная арифметика, предложенная Лодвигом с соавторами в работе [7] и направленная на преодоление указанных негативных особенностей.

Статья организована следующим образом. В Разделе 1 рассмотрены теоретические основы выполнения операций в сравниваемых подходах. В Разделе 2 приведены соотношения параметров результатов выполнения операций с использованием сравниваемых подходов. Раздел 3 посвящен численным примерам, показывающим некоторые характеристики сравниваемых подходов. В Заключении сформулированы основные выводы.

1. Описание правил выполнения операций в сравниваемых подходах

1.1. Операции на основе принципа обобщения Л. Заде

Теоретическую основу выполнения арифметических операций с нечеткими числами составляет принцип обобщения Л. Заде, применяемый вместе с его принципом декомпозиции, который позволяет разложить произвольное нечеткое множество по его множествам $r-$ уровня [1].

Определение 1. Если задана функция от нечетких аргументов $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, в которой нечеткие числа представлены в виде разложения по r-уровневым множествам:

$$y = \bigcup_{r\in[0,1]} (\underline{y}_r, \overline{y}_r)\ ,\ x_i = \bigcup_{r\in[0,1]} (\underline{x}_{ir}, \overline{x}_{ir})\ ,\ i = \overline{1,n}\ ,$$

то для любого r-уровня значение функции вычисляется по формулам:

$$\underline{y}_r = \inf(f(x^*_{1r}, x^*_{2r}, ..., x^*_{nr}))\ ,$$

$$\overline{y}_r = \sup(f(x^*_{1r}, x^*_{2r}, ..., x^*_{nr}))\ ,$$

где $x^*_{ir} \in [\underline{x}_{ir}, \overline{x}_{ir}]$, $i = \overline{1,n}$.

Принцип обобщения Л. Заде обуславливает приведенные в начале статьи негативные особенности использующих его арифметик нечетких чисел. На преодоление этих особенностей направлена работа [7], содержащая оригинальный подход к выполнению операций над нечеткими числами, позволяющий преодолеть некоторые негативные особенности принципа обобщения.

1.2. Операции на основе одноуровневой ограниченной интервальной арифметики

Одноуровневая ограниченная интервальная арифметика использует, введенное в [10], представление интервалов в виде однозначной линейной функции с двумя параметрами (границами интервала).

Определение 2. Любой интервал $[\underline{x}, \overline{x}]$ можно представить в виде однозначной функции

$$X^I(\lambda_x),\ \ X^I(\lambda_x) = (1-\lambda_x)\underline{x} + \lambda_x \overline{x} = \omega_x \lambda_x + \underline{x}\ ,$$
$$0 \le \lambda_x \le 1\ ,$$

где $\omega_x = \overline{x} - \underline{x} \ge 0$ - ширина интервала, $\underline{x}$ и $\overline{x}$ - левая и правая границы интервала.

Одноуровневая ограниченная интервальная арифметика рассматривает один и тот же параметр (уровень) λ для каждого интервала, вовлеченного в операцию. Так, если значение одного интервала представляется точкой на расстоянии 1/3 от левого края, то и все другие интервалы должны быть представлены точкой, отстоящей от левой границы на 1/3 длины интервала.

Определение 3. Пусть $A = [\underline{a}, \overline{a}] \in I$ - произвольный интервал. Тогда непрерывная функция $A:[0,1] \to \mathbb{R}$, такая что $\min\limits_{0\le\lambda\le1} A(\lambda) = \underline{a}$, $\max\limits_{\lambda\le\lambda\le1} A(\lambda) = \overline{a}$, называется ограниченной функцией интервала А. Определим связанную с интервалом А убывающую выпуклую ограниченную функцию $A:[0,1] \to \mathbb{R}$ как $A(\lambda) = \lambda\underline{a} + (1-\lambda)\overline{a}$, $0 \le \lambda \le 1$, или эквивалентно $A(\lambda) = (\underline{a} - \overline{a})\lambda + \overline{a}$, $0 \le \lambda \le 1$.

Выполнение операций проводится на основе обобщенной оценки четкого выражения с нечеткими операндами

Определение 4. Рассмотрим четкое выражение $E(x_1, ..., x_n)$. Обобщенная оценка выражения $E(u_1, ..., u_n)$ с нечеткими операндами

$u_1,...,u_n \in \mathbb{R}_F$ производится в соответствии со следующим правилом:

$$E(u_1,...,u_n)_r = \begin{bmatrix} \inf\limits_{\beta \ge r} \min\limits_{\lambda \in [0,1]} E((u_1)_\beta(\lambda),...,(u_n)_\beta(\lambda), \\ \sup\limits_{\beta \ge r} \max\limits_{\lambda \in [0,1]} E((u_1)_\beta(\lambda),...,(u_n)_\beta(\lambda)) \end{bmatrix},$$

$$r \in [0,1],$$

где $(u_1)_\beta(\lambda),...,(u_n)_\beta(\lambda)$ - убывающие выпуклые ограниченные функции, связанные с $u_1,...,u_n$.

Выполнение операций этим способом требует значительных вычислительных затрат и специально написанных для их выполнения программ.

1.3. Алгебра двухкомпонентных чисел (W-чисел)

При построении алгебры используется понятие двухкомпонентного треугольного числа.

Определение 5. Треугольным однокомпонентным числом X (далее X-число) будем называть конструкцию, представленную в виде: $X = x(r) = (a + br)$, где *a, b, r* - вещественные параметры, $r \in [0,1]$, $r \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Однокомпонентное число $(3 + 2r)$ показано на Рис. 1.

Определение 6. Двухкомпонентным треугольным числом W (далее W-число) будем называть конструкцию, представленную вектором $(v^L(r); v^R(r))$, $v^L(r) \in X$, $v^R(r) \in X$, для которой выполняется условие $v^L(1) = v^R(1)$ (совпадают значения при r=1).

Треугольные нечеткие числа можно представить в виде W-чисел, когда $v^L(r) = a^L + b^L r$, $b^L \ge 0$ и $v^R(r) = a^R + b^R r$, $b^R \le 0$.

Алгебра W-чисел (далее W-алгебра) предполагает автономное выполнение арифметических операций над левыми компонентами операндов с записью результата в левую компоненту итогового числа и над правыми компонентами с соответствующей записью в правую компоненту итогового числа.

Определение 7. Пусть компоненты (левые или правые) двух W-чисел представлены в виде $x(r) = x(0) + (x(1) - x(0))r$, где $x(0)$, $x(1)$ - действительные числа. Тогда, в результате выполнения операции, компонента (левая или правая) результирующего W-числа примет вид: $x_1(r) * x_2(r) = x(0) + (x(1) - x(0))r$, где $x(0) = x_1(0) * x_2(0)$, $x(1) = x_1(1) * x_2(1)$,

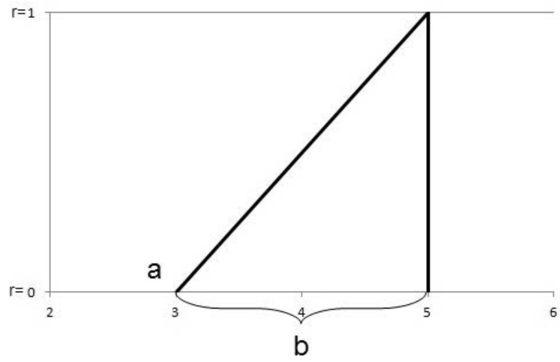

Рис. 1. Однокомпонентное число

$* \in \{+,-,\cdot,/\}$ и все операции выполняются по правилам работы с действительными числами.

Операции линейны по переменной *r*, множество всех X-чисел является замкнутым по всем операциям, т.е. если $x_i(r) \in X$, $x_j(r) \in X$, то $x(r) = x_i(r) * x_j(r) \in X$, $* \in \{+,-,\cdot,/\}$.

Определение 8. Пусть W_1 и W_2 - два W-числа. Тогда операции между этими числами будут производиться в соответствии со следующим правилом:

$(v_1^L, v_1^R) * (v_2^L, v_2^R) = ([v_1^L * v_2^L], [v_1^R * v_2^R]) = (v^L, v^R)$,

где $* \in \{+,-,\cdot,/\}$.

В этом случае применение W-алгебры обеспечивает полное преодоление всех указанных негативных особенностей характерных для нечетких арифметик, основывающихся на принципе обобщения Л. Заде.

Теорема 1. Результат выполнения операций над W-числами всегда будет W-числом, т.е. всегда будет выполняться условие замкнутости.

Доказательство. Рассмотрим два W-числа $W_1 = (a_1 + b_1 r, a_2 + b_2 r)$ и $W_2 = (c_1 + d_1 r, c_2 + d_2 r)$.

Из равенства значений левой и правой компонент при *r*=1 (далее будем значение *x(r)* при r=1 называть модой, по аналогии с нечеткими числами) имеем:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = a_2 + b_2 \\ c_1 + d_1 = c_2 + d_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 - b_1 + b_2 \\ c_1 = c_2 - d_1 + d_2 \end{cases}. \quad (1)$$

Докажем совпадение мод для каждой из операций (сложение, вычитание, умножение, деление).

Сложение

$$\begin{cases} v^L = a_1 + b_1 r + c_1 + d_1 r \\ v^R = a_2 + b_2 r + c_2 + d_2 r \end{cases}. \quad (2)$$

Подставим a_1 и c_1 из уравнения (1) при r=1:

$$\begin{cases} v^L = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 \\ v^R = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 \end{cases}. \quad (3)$$

Для оставшихся операций доказательство аналогично.

Выполнение операций над W-числами не требует специального программного обеспечения и, как будет показано далее, устраняет недостатки других арифметик.

2. Сравнительный анализ параметров результатов операций

Одной из задач сравнительного анализа является определение соотношения параметров результатов выполнения операций с использованием различных подходов. Необходимо отметить, что и подход на основе принципа обобщения Заде, и одноуровневая ограниченная интервальная арифметика позволяют работать с произвольными выпуклыми нечеткими числами, в отличие от W-алгебры, которая работает лишь с W-числами. При проведении сравнения аргументы будут задаваться в виде треугольных нечетких чисел (как уже говорилось выше, их можно представить при помощи двухкомпонентных чисел).

Параметрами, полностью определяющими треугольное нечеткое число, являются границы носителя $\underline{x} = v^L(0)$, $\overline{x} = v^R(0)$ и мода $m = v^L(1) = v^R(1)$. Рассмотрим эти параметры у результатов выполнения операций сравниваемых подходов.

Теорема 2. При проведении операций над треугольными числами моды, полученные при помощи W-алгебры, одноуровневой ограниченной интервальной арифметики и подхода на основе принципа обобщения Заде, всегда совпадают.

Доказательство. Доказательство легко получается подстановкой r=1 в соответствующие подходы.

Теорема 3. При проведении бинарных операций над треугольными числами результаты, полученные при использовании одноуровневой ограниченной интервальной арифметики и при помощи W-алгебры (при использовании аналогичного с одноуровневой ограниченной интервальной арифметики принципа $\inf\limits_{\beta\geq r}$ и $\sup\limits_{\beta\geq r}$), совпадают на границах.

Доказательство. Рассмотрим два треугольных числа – $A=(a,b,c)$ и $B=(d,f,g)$. В виде W-чисел: $A=(r(b-a)+a, c-r(c-b))$, $B=(r(f-d)+d, g-r(g-f))$.

В записи одноуровневой ограниченной интервальной арифметики:

$$A = a\lambda - a\lambda r + br - c\lambda + c\lambda r - cr + c \text{ и}$$
$$B = d\lambda - d\lambda r + fr - g\lambda + g\lambda r - gr + g .$$

Совпадение результатов на границах означает совпадение граничных значений при r=0 и r=1 до применения принципа $\inf\limits_{\beta\geq r}$ и $\sup\limits_{\beta\geq r}$ в одноуровневой ограниченной интервальной арифметике. Тогда применение этого принципа к обоим методам приведет к одинаковым результатам на границе.

Сложение

W-алгебра:

$$\begin{cases} v^L = -ar + a + br - dr + d + fr \\ v^R = br - cr + c + fr - gr + g \end{cases}. \quad (4)$$

Одноуровневая ограниченная интервальная арифметика:

$$E(u,v)_r(\lambda) = a\lambda(1-r) + br + c(\lambda-1)(r-1) + \\ + d\lambda(1-r) + fr + d(\lambda-1)(r-1), \quad (5)$$

$$E(u,v)_r = [\min_{\lambda\in[0,1]} E(u,v)_r(\lambda), \max_{\lambda\in[0,1]} E(u,v)_r(\lambda)] = \\ = \begin{bmatrix} [(b+f)r + (c+g)(1-r), (a+d)(1-r) + (b+f)r] \\ [(a+d)(1-r) + (b+f)r, (b+f)r + (c+g)(1-r)] \end{bmatrix} \quad (6)$$

При r=0 W-алгебра и одноуровневая ограниченная интервальная арифметика принимают значения $a+d$ и $c+g$. При r=1 W-алгебра и одноуровневая ограниченная интервальная арифметика принимают значение $b+f$.

Для оставшихся операций доказательство аналогично.

Теорема 4. При проведении операций над треугольными числами границы, полученные при помощи W-алгебры (одноуровневой ограниченной интервальной арифметики), всегда находятся внутри границ, полученных при использовании подхода на основе принципа обобщения Заде.

Доказательство. Доказательство легко получается подстановкой r=0 в соответствующие подходы.

3. Сравнительный анализ результатов численных экспериментов

Рассмотрим результаты, получаемые различными подходами в численных примерах. Они будут представлены в аналитическом и графическом виде, при этом результаты, полученные при помощи подхода на основе принципа обобщения Заде, будут показаны только в графическом виде. В графическом представлении результатов приняты следующие обозначения: подход на основе принципа обобщения Заде - сплошная линия, одноуровневая ограниченная интервальная арифметика - штрихпунктирная линия, W-алгебра - пунктирная линия.

3.1.Вычитание треугольного числа из самого себя

Рассмотрим произвольное нечеткое число $A=(a,b,c)$.

W-алгебра:

$$\begin{cases}(A-A)^L=(r(b-a)+a)-(r(b-a)+a)=0\\(A-A)^R=(c-r(c-b))-(c-r(c-b))=0\end{cases}. \tag{7}$$

Одноуровневая ограниченная интервальная арифметика:

$$\begin{aligned}E(A,A)_r=[&\inf_{\beta\ge r}\min_{\lambda\in[0,1]}((a\lambda-c\lambda+c)(1-r)+br)-(a\lambda-c\lambda+c)(1-r)+br)),\\&\sup_{\beta\ge r}\max_{\lambda\in[0,1]}((a\lambda-c\lambda+c)(1-r)+br)-(a\lambda-c\lambda+c)(1-r)+br))]=[0,0]\end{aligned} \tag{8}$$

В общем виде показано, что результаты выполнения операции с использованием W-алгебры и одноуровневой ограниченной интервальной арифметики равны нулю. Для принципа обобщения рассмотрим произвольное нечеткое число, например, $A=(3,5,6)$.

Результаты показаны на Рис. 2. W-алгебра и одноуровневая ограниченная интервальная арифметика приводят к получению четкого нуля, подход на основе принципа обобщения Заде получает отличный от нуля результат.

3.2. Деление треугольного числа на себя

Рассмотрим произвольное нечеткое число $A=(a,b,c)$.

W-алгебра:

$$\begin{cases}(A/A)^L=r(\frac{b}{b}-\frac{a}{a})+\frac{a}{a}=1\\(A/A)^R=r(\frac{b}{b}-\frac{c}{c})+\frac{c}{c}=1\end{cases} \tag{9}$$

Одноуровневая ограниченная интервальная арифметика:

$$\begin{aligned}E=(A,A)_r=[&\inf_{\beta\ge r}\min_{\lambda\in[0,1]}\frac{(a\lambda-c\lambda+c)(1-r)+br}{(a\lambda-c\lambda+c)(1-r)+br},\\&\sup_{\beta\ge r}\max_{\lambda\in[0,1]}\frac{(a\lambda-c\lambda+c)(1-r)+br}{(a\lambda-c\lambda+c)(1-r)+br}]=[1,1]\end{aligned} \tag{10}$$

В общем виде показано, что результаты выполнения операции с использованием W-алгебры и одноуровневой ограниченной интервальной арифметики равны единице. Для подхода на основе принципа обобщения рассмотрим произвольное нечеткое число, например, $A=(3,5,6)$.

Результаты показаны Рис. 3. W-алгебра и одноуровневая ограниченная интервальная арифметика приводят к получению четкой единицы, подход на основе принципа обобщения Заде получает отличный от единицы результат.

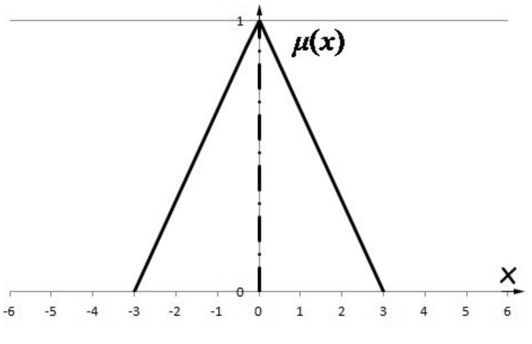

Рис. 2. *A-A*

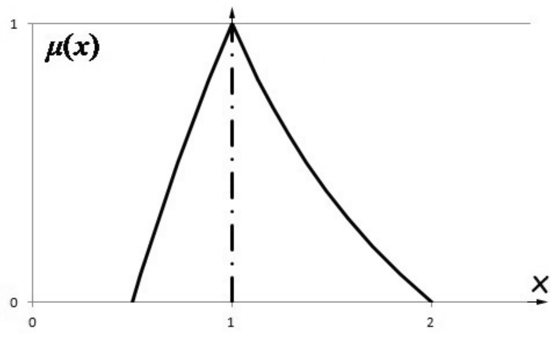

Рис. 3. *A/A*

3.3. Решение линейного уравнения

Рассмотрим линейное уравнение: $Ax + 2 = 0$, где A - нечеткое число: $A = (3,5,6)$.

W-алгебра:

Решение линейного уравнения:

$$\begin{cases} x^L = \dfrac{4r}{15} - \dfrac{2}{3} \\ x^R = -\dfrac{r}{15} - \dfrac{1}{3} \end{cases}. \qquad (11)$$

Результат подстановки решения в уравнение:

$$\begin{cases} v^L = 0 \\ v^R = 0 \end{cases}. \qquad (12)$$

Одноуровневая ограниченная интервальная арифметика:

Решение линейного уравнения:

$$x(A)_r = [-\frac{2}{2r+3}, -\frac{2}{6-r}]. \qquad (13)$$

Результат подстановки решения в уравнение:

$$E(A)_r = [\frac{9(r-1)^2}{2(r-6)(2r+3)}, 0]. \qquad (14)$$

Полученные решения для всех методов показаны на Рис. 4. Они совпали на границах для всех трех методов. Результаты подхода на основе принципа обобщения Заде и одноуровневой ограниченной интервальной арифметики совпали полностью.

Результаты подстановки решений показаны на Рис. 5. Использование W-алгебры привело к получению четкого нуля. В одноуровневой ограниченной интервальной арифметике одна сторона совпала с нулем.

3.4. Решение квадратного уравнения

Рассмотрим квадратное уравнение $x^2 + Bx + 2 = 0$, где B - нечеткое число: $B = (3,4,6)$.

W-алгебра:

Решения квадратного уравнения:

$$\begin{cases} x_1^L = (\sqrt{2} - 1)r - 1 \\ x_1^R = (1 + \sqrt{2} - \sqrt{7})r + \sqrt{7} - 3 \end{cases} \qquad (15)$$

$$\begin{cases} x_2^L = -\sqrt{2}r - 2 \\ x_2^R = (1 - \sqrt{2} + \sqrt{7})r - \sqrt{7} - 3 \end{cases} \qquad (16)$$

Результаты подстановки x_1^L и x_1^R в уравнение:

$$\begin{cases} ((\sqrt{2}-1)r-1)^2 + (r+3)((\sqrt{2}-1)r-1) + 2 = 0 \\ ((1+\sqrt{2}-\sqrt{7})r + \sqrt{7} - 3)^2 + (6-2r)\cdot \\ \qquad ((1+\sqrt{2}-\sqrt{7})r + \sqrt{7} - 3) + 2 = 0 \end{cases} \qquad (17)$$

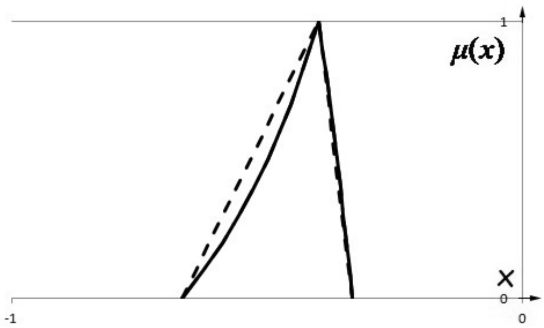

Рис. 4. x

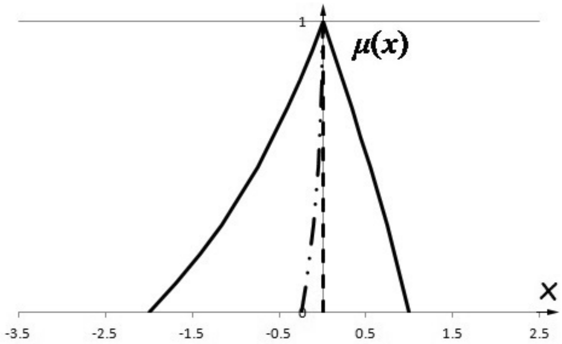

Рис. 5. Подстановка x

Результаты подстановки x_2^L и x_2^R в уравнение:

$$\begin{cases} (-\sqrt{2}r - 2)^2 + (r+3)(-\sqrt{2}r - 2) + 2 = 0 \\ ((1-\sqrt{2}+\sqrt{7})r - \sqrt{7} - 3)^2 + (6-2r)\cdot \\ \qquad ((1-\sqrt{2}+\sqrt{7})r - \sqrt{7} - 3) + 2 = 0 \end{cases} \qquad (18)$$

Одноуровневая ограниченная интервальная арифметика:

Решения квадратного уравнения:

$$x_{1,r} = [\frac{1}{2}(\sqrt{r^2+6r+1} - r - 3), \sqrt{r^2-6r+1} - r - 3)]$$

$$x_{2,r} = [-\sqrt{r^2-6r+7} + r - 3, \frac{1}{2}(-\sqrt{r^2+6r+1} - r - 3)]. \qquad (19)$$

Результаты подстановки x_1 в уравнение:

$$E(x_1)_r = [\frac{1}{4}(r^2 + \sqrt{r^2+6r+1}\sqrt{r^2-6r+7} - 5), 0] \qquad (20)$$

Результаты подстановки x_2 в уравнение:

$$E(x_2)_r = [\frac{3}{2}(r-1)(\sqrt{r^2+6r+1} + r + 3), \; -3(r-1)(\sqrt{r^2-6r+7} - r + 3)]. \qquad (21)$$

Полученные x_1 и x_2 для всех методов показаны на Рис. 6. Они совпали на границах для всех трех методов. Результаты подхода на основе принципа обобщения Заде и одноуровне-

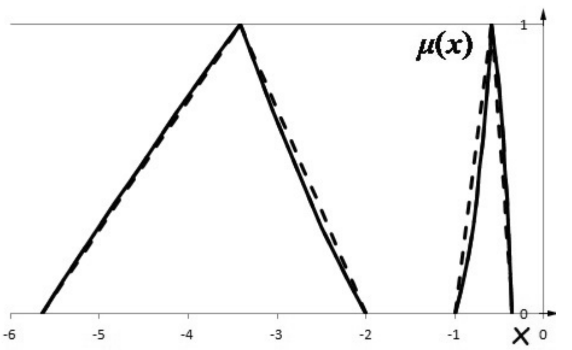

Рис. 6. x_1 и x_2

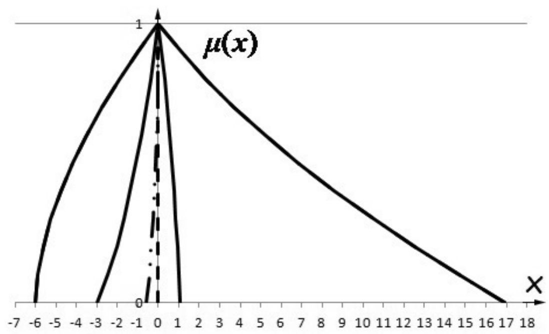

Рис. 7. Подстановка x_1 и x_2

вой ограниченной интервальной арифметики совпали полностью.

Результаты подстановки x_1 и x_2 показаны на Рис. 7. Использование W-алгебры привело к получению четкого нуля. У подхода на основе принципа обобщения Заде и одноуровневой ограниченной интервальной арифметики совпали результаты подстановки x_2.

3.5. Решение системы линейных уравнений

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 = c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 = c_2 \end{cases}. \qquad (22)$$

Параметры системы уравнений - нечеткие числа $a_1 = (1,2,4)$, $b_1 = (-8,-5,-3)$, $c_1 = (1,4,5)$, $a_2 = (2,6,7)$, $b_2 = (1,3,4)$, $c_2 = (1,2,5)$.

W-алгебра:

Решения СЛУ:

$$\begin{cases} x_1^L = \dfrac{25r}{306} + \dfrac{9}{17}; \\ x_1^R = \dfrac{35}{37} - \dfrac{223r}{666}; \\ x_2^L = \dfrac{-76r}{153} - \dfrac{1}{17}; \\ x_2^R = -\dfrac{50r}{333} - \dfrac{15}{37}. \end{cases} \qquad (23)$$

Результат подстановки x_1^L, x_1^R, x_2^L и x_2^R в систему уравнений:

$$\begin{cases} -3r + (\dfrac{25r}{306} + \dfrac{9}{17})(r+1) + (-\dfrac{76r}{153} - \dfrac{1}{17})(3r-8) - 1 = 0; \\ -(r+1) + (-\dfrac{76r}{153} - \dfrac{1}{17})(2r+1) + (\dfrac{25r}{306} + \dfrac{9}{17})(4r+2) = 0; \\ -(5-r) + (-\dfrac{50r}{333} - \dfrac{15}{37})(-2r-3) + (\dfrac{35}{37} - \dfrac{223r}{666})(4-2r) = 0; \\ (-\dfrac{50r}{333} - \dfrac{15}{37})(4-r) + (\dfrac{35}{37} - \dfrac{223r}{666})(7-r) - (5-3r) = 0. \end{cases}$$

(24)

Одноуровневая ограниченная интервальная арифметика:

Решения СЛУ:

$$\begin{cases} x_{1,r} = \left[\dfrac{8r^2+10r+4}{10r^2+19r+7}, \dfrac{10r^2-48r+60}{5r^2-41r+72}\right] \\ x_{2,r} = \left[-\dfrac{5}{9}, \dfrac{-11r^2-8r-1}{10r^2+19r+7}\right] \end{cases}. \qquad (25)$$

Результат подстановки $x_{1,l}$, $x_{1,r}$, $x_{2,l}$ и $x_{2,r}$ в систему уравнений:

$$\begin{cases} E_1(x_1,x_2)_r = \left[0, \dfrac{-204r^3-56r^2+151r+109}{90r^2+171r+63}\right] \\ E_2(x_1,x_2)_r = \left[\begin{array}{c} \dfrac{248r^3+372r^2-417r-203}{9(10r^2+19r+7)}, \\ \dfrac{8(15r^4-3r^3-107r^2+62r+33)}{(5r+7)(5r^2-41r+72)} \end{array}\right] \end{cases}$$

(26)

Результат:

Полученные x_1 и x_2 для всех методов показаны на Рис. 8. Подход на основе принципа обобщения Заде включает результаты W-алгебры и одноуровневой ограниченной интервальной арифметики.

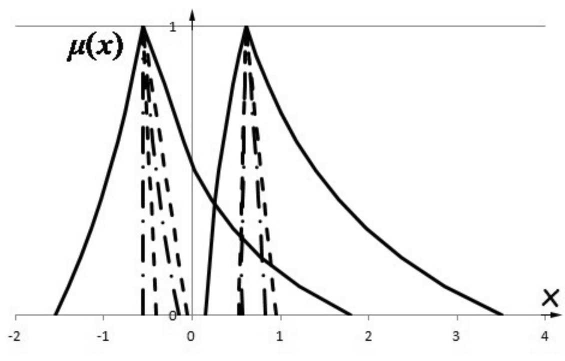

Рис. 8. x_1 и x_2

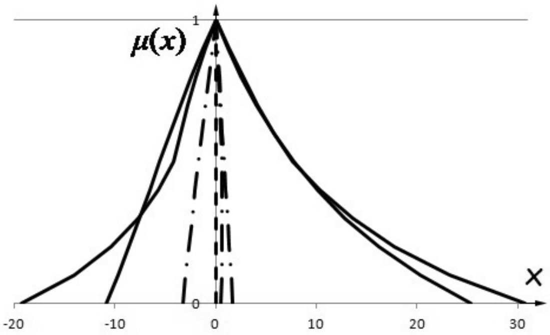

Рис. 9. Подстановка x_1 и x_2

Результаты подстановки x_1 и x_2 показаны на Рис. 9. Использование W-алгебры привело к получению четкого нуля. В одноуровневой ограниченной интервальной арифметике результат подстановки отличен от нуля. Подход на основе принципа обобщения Заде включает эти результаты

Заключение

Сравнение W-алгебры с выполнением операций над нечеткими числами на основе классического r-уровневого принципа обобщения Л. Заде и одним из современных подходов, предложенным в [7], показало:

- Результаты выполнения арифметических операций при помощи W-алгебры на множестве нечетких треугольных чисел совпадают с результатами одноуровневой ограниченной интервальной арифметики по определяющим параметрам нечетких треугольных чисел (мода и границы носителя). Результаты применения W-алгебры совпадают с результатами, полученными на основе применения принципа обобщения, по моде. Носители результирующих нечетких треугольных чисел, полученных с применением W-алгебры, содержатся внутри носителей результатов применения подхода на основе принципа обобщения и ограничивают неоправданный рост неопределенности.
- W-алгебра всегда обеспечивает выполнение естественных отношений типа A-A=0, A/A=1, подстановка корня в уравнение обеспечивает четкое тождество. Эти отношения не обеспечиваются подходом на основе принципа обобщения и частично (A-A=0, A/A=1) обеспечиваются одноуровневой ограниченной интервальной арифметикой.
- Применение W-алгебры позволяет использовать для решения задач с параметрами и переменными из множества нечетких треугольных чисел все существующие методы, алгоритмы и программные средства, предназначенные для работы с действительными числами. Для получения решения достаточно решить задачу с четкими переменными в трех точках и построить соответствующий результат в виде W-чисел. Вследствие этого в процессе решения не возникает проблема сравнения, существующая для алгоритмов, работающих с нечеткими числами. Подход на основе принципа обобщения Заде и одноуровневая ограниченная интервальная арифметика при решении задач с нечеткими параметрами и переменными требуют применения специальных алгоритмов и программных средств и имеют большую, чем W-алгебра, вычислительную сложность.
- Применение W-алгебры, так же как и одноуровневой ограниченной интервальной арифметики, ограничено условиями устойчивости решения на всем отрезке носителя результата. Например, при решении СЛУ, в котором при определенном сочетании значений параметров главный определитель обращается в ноль, неустойчивость решения явно отображается только на решении, полученном при помощи принципа обобщения. Как показано в [11], можно получить эти условия для W-алгебры для решения некоторых типов задач с нечеткими параметрами и переменными.

Очевидным достоинством W-алгебры является возможность получения аналитических решений задач с нечеткими параметрами и переменными.

Литература

1. Zadeh L.A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, Parts 1, 2, 3 // Information Sciences. 1975. №8. С. 43–80, 199–249, 301–357.
2. Dubois D, Prade H. Operations on fuzzy numbers // International Journal of Systems Science. 1978. №9 (6). С. 613–626.
3. Klir G.J. Fuzzy arithmetic with requisite constraints // Fuzzy Sets and Systems. 1997. №91. С. 165–175.
4. Lodwick W.A. Constrained interval arithmetic // CCM report. 1999. №138. С. 1-11.
5. Piegat A. Fuzzy Modeling and Control. Springer-Verlag, 2001. 728 с.
6. Nagoor Gani A., Mohamed Assarudeen S.N. A New Operation on Triangular Fuzzy Number for Solving Fuzzy Linear Programming Problem // Applied Mathematical Sciences. 2012. №11. С. 525–532.
7. Chalco-Cano Y., Lodwick W.A., Bede B. Single level constraint interval arithmetic // Fuzzy Sets and Systems. 2014. №257. С. 146–168.

8. Воронцов Я.А., Матвеев М.Г. Алгебраические операции с нечеткими LR-числами с использованием преобразования L // Программная инженерия. 2014. №8. С. 23-29.
9. Матвеев М.Г., Воронцов Я.А., Канищева О.И. Арифметические операции над двухкомпонентными нечеткими числами // Вестник Воронежского государственного университета, серия "Системный анализ и ининформационные технологии". 2014. №2. С. 75-82.
10. Goetschel Jr. R., Voxman W. Elementary fuzzy calculus // Fuzzy Sets and Systems. 1986. №18. С. 31–43.
11. Матвеев М.Г. Анализ и решение задач выбора с параметрической нечеткостью // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». 2015. №8(4). С. 14-29.

Шевляков Александр Олегович. Ассистент кафедры Информационных технологий управления факультета Компьютерных наук Воронежского государственного университета. Окончил Воронежский государственный университет в 2015 году. Количество печатных работ: 5. Область научных интересов: нечеткие вычисления, численные методы. E-mail: shevlyakov.a.o@mail.ru

Матвеев Михаил Григорьевич. Профессор, заведующий кафедрой Информационных технологий управления факультета Компьютерных наук Воронежского государственного университета. Окончил Воронежский государственный университет в 1975 году. Доктор технических наук. Количество печатных работ: 160, в т.ч. 3 монографии. Область научных интересов: информационные технологии управления, принятие решений в условиях нечеткой и случайной неопределенности. E-mail: mgmatveev@yandex.ru

A comparison of different fuzzy arithmetics

A.O. Shevlyakov, M.G. Matveev

In our previous research, we proposed the algebra of double component numbers. In this paper we compare it with two other approaches to the implementation of fuzzy calculations. The first approach is the Zadeh’s extension principle. The second approach is the single level constraint interval arithmetic. The paper shows the relations between the parameters of the calculation results with these approaches. The results of these approaches are compared in some numerical examples.

Keywords: fuzzy algebraic structure, fuzzy arithmetic.

References

1. Zadeh L.A. 1975. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, Parts 1, 2, 3. Information Sciences. 8:43–80,199–249,301–357.
2. Dubois D, Prade H. 1978. Operations on fuzzy numbers. International Journal of Systems Science. 9(6):613–626.
3. Klir G.J. 1997. Fuzzy arithmetic with requisite constraints. Fuzzy Sets and Systems. 91:165–175.
4. Lodwick W.A. 1999. Constrained interval arithmetic. CCM report. 138:1-11.
5. Piegat A. 2001. Fuzzy Modeling and Control. Springer-Verlag. 728 p.
6. Nagoor Gani A., Mohamed Assarudeen S.N. 2012. A New Operation on Triangular Fuzzy Number for Solving Fuzzy Linear Programming Problem. Applied Mathematical Sciences. 11:525–532.
7. Chalco-Cano Y., Lodwick W.A., Bede B. 2014. Single level constraint interval arithmetic. Fuzzy Sets and Systems. 257:146–168.
8. Vorontsov Y.A., Matveev M.G. 2014. Algebraicheskie operacii s nechetkimi LR-chislami s ispol'zovaniem preobrazovanija L [L-transform Based Algebraic Operations on fuzzy LR-numbers]. Programmnaja inzhenerija [Software Engineering]. 8:23-29.
9. Matveev M.G., Vorontsov Y.A., Kanishcheva O.I. 2014. Arifmeticheskie operacii nad dvuhkomponentnymi nechetkimi chislami [Arithmetic operations over two-component fuzzy numbers]. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta, serija "Sistemnyj analiz i informacionnye tehnologii" [Scientific journal Proceedings of Voronezh State University. Ser. Systems Analysis and Information Technologies]. 2:75-82.
10. Goetschel Jr. R., Voxman W. 1986. Elementary fuzzy calculus. Fuzzy Sets and Systems. 18:31–43.
11. Matveev M.G. 2015. Analiz i reshenie zadach vybora s parametricheskoj nechetkost'ju [Analyzing and Solving Problems of Decision Making with Parametric Fuzzy]. Vestnik Juzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta, serija "matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie" [Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software]. 8(4):14-29.

Shevlyakov A.O. Teaching Assistant at the dept. of Information Technologies of Management, Computer Science Faculty, Voronezh State University, 1 Universitetskaya pl., Voronezh. Post-graduate student. Number of publications: 5. Research interests: fuzzy computing, numerical methods. E-mail: shevlyakov.a.o@mail.ru

Matveev M.G. Head of the dept. of Information Technologies of Management, Computer Science Faculty, Voronezh State University, 1 Universitetskaya pl., Voronezh. Doctor of Technical Sciences, Professor. Number of publications: 160 (including three monograph). Research interests: information technologies of management, decision making under fuzzy and probabilistic uncertainties. E-mail: mgmatveev@yandex.ru