

Предельные возможности сужения множества Парето с помощью квантов нечеткой информации¹

Аннотация. Рассмотрена задача многокритериального выбора с нечетким отношением предпочтения, которая включает множество возможных вариантов, числовой векторный критерий и нечеткое отношение предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР). Используются понятия нечеткого векторного пространства, многогранного нечеткого множества и расстояния между выпуклыми нечеткими множествами и конусами. В целях сужения множества Парето изучены предельные возможности использования информации о нечетком отношении предпочтения в виде ее квантов. Доказано, что в достаточно широком классе задач выбора с помощью конечного набора квантов нечеткой информации можно сколь угодно точно аппроксимировать изначально неизвестное нечеткое множество недоминируемых элементов.

Ключевые слова: задача многокритериального выбора, сужение множества Парето, кванты нечеткой информации, теорема о полноте.

Введение

Важную роль при решении многокритериальных задач играет оптимум Парето [1], который представляет собой обобщение понятия экстремума на случай нескольких критериев. К сожалению, множество оптимумов Парето (множество Парето) при решении прикладных задач оказывается довольно широким, между тем как для осуществления окончательного выбора необходимо ограничиваться сравнительно узким его подмножеством, а иногда и единственным элементом. По этой причине возникает проблема сужения множества Парето [2], для решения которой многочисленными авторами предлагаются самые различные подходы в зависимости от того, какая именно информация используется при их реализации.

К настоящему времени разработан аксиоматический подход к сужению множества Парето с использованием квантов информации об отношении предпочтения ЛПР [3]. Одним из его

достоинств является тот факт, что все его положения формальным способом выводятся из базовых четырех аксиом «разумного» выбора. Эти аксиомы представляются вполне естественными и их можно считать выполненными при решении сравнительно большого числа прикладных задач многокритериального выбора. Кроме того, само определение кванта информации имеет ясную логическую основу, что позволяет без особых усилий выявлять подобные кванты в контакте с лицом, принимающим решение (ЛПР), не искушенным в математических тонкостях.

В рамках указанного аксиоматического подхода неизвестное отношение предпочтения ЛПР может быть как четким (обычным) бинарным отношением, так и нечетким. Для четкого отношения предпочтения ранее был полностью решен вопрос предельных возможностей аксиоматического подхода. А именно, было установлено [3], что, используя лишь конечный набор квантов информации о неизвестном отношении предпочтения, можно получить об

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 14-29-05049, 16-29-12864, 17-07-00899, 17-29-03236).

этом отношении сколь угодно точное представление. Таким образом, информация в виде квантов полна в том смысле, что ее оказывается достаточно для построения, как самого отношения предпочтения, так и множества недоминируемых векторов, определяемого с его помощью. Из этого следует важный практический вывод: при решении прикладных задач необходимо научиться извлекать подходящие кванты информации и на их основе можно сузить множество Парето до множества недоминируемых векторов, которое изначально неизвестно.

В случае нечеткого отношения предпочтения подобного результата не существовало. В данной работе этот пробел восполняется. Сначала вводятся необходимые понятия из теории нечетких множеств и приводится решение задачи аппроксимации выпуклого конуса нечетким многогранным конусом, полученное автором ранее. Основное содержание работы после краткого перечисления базовых положений аксиоматического подхода содержит доказательство утверждения, которое гарантирует, что с помощью лишь конечного набора квантов нечеткой информации о неизвестном нечетком отношении предпочтения можно сколь угодно точно аппроксимировать нечеткое множество недоминируемых элементов. В практически важном частном случае, когда множество допустимых вариантов конечно, на основе квантов нечеткое множество недоминируемых элементов можно построить точно.

1. Основные сведения из теории нечетких множеств

Следуя работе автора [4], приведем необходимые сведения из теории выпуклых нечетких множеств. Пусть R^m - конечномерное векторное арифметическое пространство. Конечномерным нечетким векторным пространством будем называть множество $F^m = R^m \times [0, 1]$. Его элемент $\hat{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m, \lambda) \in F^m$ интерпретируется как нечеткая точка $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ пространства R^m , степень принадлежности которой равна $\lambda \in [0, 1]$. Нечеткое множество Y в F^m задается равенством:

$$Y = \bigcup_{y \in R^m} \{(y, \lambda_Y(y)) \mid \lambda_Y(y) \in [0, 1]\},$$

где $\lambda_Y(\cdot)$ - функция принадлежности данного нечеткого множества, заданная на R^m и принимающая значения в отрезке $[0, 1]$.

Необходимо отметить, что нечеткое множество однозначно определяется своей функцией принадлежности. В случае, когда функция принадлежности нечеткого множества принимает лишь значения 0 либо 1, она является характеристической функцией обычного (четкого) множества в пространстве R^m . Четкое множество $\text{supp } Y = \{y \in R^m \mid \lambda_Y(y) > 0\}$ называется носителем нечеткого множества Y . Тот факт, что элемент $\hat{y} = (y, \lambda(y)) \in F^m$ принадлежит нечеткому множеству Y , означает выполнение неравенства $\lambda(y) \leq \lambda_Y(y)$.

Нечеткое множество, имеющее ограниченный носитель, называют *ограниченным*. Для пары нечетких множеств Y, Z примем

$$Y \subset Z \Leftrightarrow \lambda_Y(y) \leq \lambda_Z(y) \text{ для всех } y \in R^m$$

и условимся использовать стандартные теоретико-множественные операции, т.е.

$$Y \cup Z = \bigcup_{y \in R^m} \{(y, \lambda(y)) \mid \lambda(y) = \max\{\lambda_Y(y), \lambda_Z(y)\}\},$$

$$Y \cap Z = \bigcup_{y \in R^m} \{(y, \lambda(y)) \mid \lambda(y) = \min\{\lambda_Y(y), \lambda_Z(y)\}\}.$$

Нечеткое множество Y с функцией принадлежности $\lambda_Y(\cdot)$ называется выпуклым [5], если для всех $x, y \in R^m, \theta \in [0, 1]$ выполняется неравенство:

$$\lambda_Y(\theta x + (1 - \theta)y) \geq \min\{\lambda_Y(x), \lambda_Y(y)\}.$$

Расстояние между двумя точками $\hat{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m, \lambda(y))$ и $\hat{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m, \lambda(z))$ нечеткого пространства будем измерять по формуле:

$$\|\hat{y} - \hat{z}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (y_i - z_i)^2 + (\lambda(y) - \lambda(z))^2}.$$

Отметим очевидные свойства расстояния:

$$\|\hat{y} - \hat{z}\| \geq 0; \quad \|\hat{y} - \hat{z}\| = 0 \Leftrightarrow y = z, \lambda(y) = \lambda(z);$$

$$\|\hat{y} - \hat{z}\| = \|\hat{z} - \hat{y}\|;$$

$$\|\hat{y} - \hat{z}\| \leq \|\hat{y} - \hat{u}\| + \|\hat{u} - \hat{z}\|.$$

Нечеткое множество Y *замкнуто*, если оно содержит все свои предельные точки, т.е. пре-

дел любой сходящейся последовательности точек $\{\hat{y}^k\} = \{(y^k, \lambda_k(y^k)) \in Y, k=1,2,\dots\}$ принадлежит множеству Y . Запись $\text{cl}Y$ будет означать замыкание нечеткого множества Y , т.е. данное множество вместе со всеми своими предельными точками.

Введем замкнутую нечеткую ε -окрестность точки $\hat{y} = (y, \lambda(y))$:

$$U_\varepsilon(\hat{y}) = \bigcup_{z \in R^m} \{\hat{z} = (z, \lambda(z)) \mid \|\hat{z} - \hat{y}\| \leq \varepsilon\},$$

а также нечеткое множество (нечеткое параллельное множество) вида:

$$Y_\varepsilon = \bigcup_{z \in \text{supp } Y} U_\varepsilon(\hat{z}).$$

Под *расстоянием* между двумя выпуклыми компактными нечеткими множествами Y и Z будем понимать функцию

$$d(Y, Z) = \inf_{\varepsilon > 0} \{\varepsilon \mid Y \subset Z_\varepsilon, Z \subset Y_\varepsilon\}.$$

Введенное расстояние в случае четких множеств Y и Z совпадает с расстоянием по Хаусдорфу [6] для выпуклых множеств. Это расстояние обладает стандартными свойствами метрики:

$$d(Y, Z) \geq 0; \quad d(Y, Z) = 0 \Leftrightarrow Y = Z;$$

$$d(Y, Z) = d(Z, Y);$$

$$d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z).$$

Нечеткое множество Y будем именовать *многогранным*, если его носитель является многогранным множеством, а функция принадлежности постоянна на R^m , а также в том случае, когда существует натуральное $l \geq 2$, при котором имеет место представление

$$Y = \bigcup_{i=1}^l Y_i, \quad (1)$$

где Y_i - нечеткое множество с многогранным носителем $\text{supp } Y_i$ и константной функцией принадлежности

$$\lambda_i(y) = \begin{cases} \lambda_i^* \in (0, 1], & \text{если } y \in \text{supp } Y_i, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

причем $\text{supp } Y_i \subset \text{supp } Y_{i+1}$ и $\lambda_i^* > \lambda_{i+1}^*$ для всех $i = 1, 2, \dots, l-1$. Нетрудно понять, что любое многогранное нечеткое множество является выпуклым и замкнутым, а в частном случае, когда его функция принадлежности принимает лишь значения 0 либо 1, оно порождает обычное многогранное множество в пространстве R^m .

Выпуклая оболочка нечеткого множества Y , обозначаемая $\text{conv } Y$, определяется как наименьшее (по отношению включения) выпуклое нечеткое множество, содержащее Y . Выпуклая оболочка выпуклого нечеткого множества совпадает с этим множеством, а выпуклая оболочка произвольного нечеткого множества Y является пересечением всех выпуклых нечетких множеств, включающих Y .

В случае нечеткого множества K , заданного функцией принадлежности $\lambda(\cdot)$ на нечетком пространстве F^m , используют следующие термины:

- *нечеткий конус* K , если равенство $\lambda(x) = \lambda(\alpha \cdot x)$ выполняется для всех $\alpha > 0$ и всех $x \in R^m$;

- *острый нечеткий конус* K , если носитель этого конуса является острым, т.е. ни один ненулевой элемент носителя не содержится в нем вместе с противоположным ему элементом.

Символом $\text{cone}\{M\}$ (где M - некоторое нечеткое множество) будем обозначать наименьший выпуклый нечеткий конус, содержащий множество M .

Поскольку введенное выше расстояние между двумя нечеткими выпуклыми конусами из-за неограниченности их носителей, как правило, равно $+\infty$, использовать метрику $d(\cdot, \cdot)$ для измерения расстояния между указанными объектами не представляется возможным. Поэтому вместо самих конусов будем иметь дело с приближениями к ним, т.е. теми их частями, которые содержатся в достаточно большом шаре с центром в начале координат. Тем самым, для измерения расстояния между нечеткими конусами K_1 и K_2 введем функцию двух аргументов

$$d_r(K_1, K_2) = d(K_1 \cap U_r(\mathbf{0}), K_2 \cap U_r(\mathbf{0})),$$

где r достаточно большое положительное число.

Нетрудно проверить, что введенная функция обладает следующими свойствами:

$$d_r(K_1, K_2) \geq 0; \quad d_r(K_1, K_2) = 0 \Leftrightarrow \text{cl } K_1 = \text{cl } K_2;$$

$$d_r(K_1, K_2) = d_r(K_2, K_1);$$

$$d_r(K_1, K_3) \leq d_r(K_1, K_2) + d_r(K_2, K_3).$$

Введем неотрицательный ортант $F_+^m = \{(y, 1) \in F^m \mid y_i \geq 0, i=1, 2, \dots, m, y \neq \mathbf{0}\}$ в нечетком пространстве.

Имеет место следующий результат [4].

Теорема 1. Пусть K – произвольный острый выпуклый нечеткий конус с открытым носителем и непрерывной функцией принадлежности, не содержащий начало координат и такой, что $K \supset F_+^m$. Выберем и зафиксируем произвольное $r > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие конечные наборы векторов $\{u^i\}_{i=1}^k \subset R^m$ и чисел $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$, что

$$u^i \in N^m \cap K \cap U_r(\mathbf{0}), \lambda_i \in (0, 1], i = 1, 2, \dots, k \text{ и} \\ d_r(K, \text{cone}\{(e^1, 1), \dots, (e^m, 1), (u^1, \lambda_1), \dots, (u^k, \lambda_k)\}) < \varepsilon.$$

Здесь (и далее) $e^1, e^2, \dots, e^m$ – единичные орты пространства R^m и

$$N^m = \left\{ (y_1, y_2, \dots, y_m, 1) \in F^m \mid \begin{array}{l} \text{найдутся } i, j, \text{ для которых } y_i > 0, y_j < 0 \end{array} \right\}.$$

Содержательно данная теорема означает, что любой выпуклый нечеткий конус K , указанного в ее условиях типа, можно с любой степенью точности аппроксимировать изнутри некоторым многогранным нечетким конусом $\text{cone}\{(e^1, 1), \dots, (e^m, 1), (u^1, \lambda_1), \dots, (u^k, \lambda_k)\}$.

Нечеткое бинарное отношение задается на четком множестве A функцией принадлежности $\mu: A \times A \rightarrow [0, 1]$. При этом число $\mu(x, y) \in [0, 1]$ интерпретируется как степень уверенности ЛПР в том, что элемент x находится в данном отношении с элементом y .

Нечеткое отношение с функцией принадлежности $\mu(\cdot, \cdot)$ называют

- *иррефлексивным*, если $\mu(x, x) = 0$ для всех $x \in A$;
- *транзитивным*, если $\mu(x, z) \geq \min\{\mu(x, y), \mu(y, z)\}$ для всех $x, y, z \in A$;
- *асимметричным*, если $\mu(x, y) > 0 \Rightarrow \mu(y, x) = 0$ для всех $x, y \in A$;
- *конусным нечетким отношением* на линейном пространстве L , если найдется такой нечеткий конус с функцией принадлежности $\eta: L \rightarrow [0, 1]$, что $\mu(x, y) = \eta(x - y)$ для всех $x, y \in L$;
- *инвариантным относительно линейного положительного преобразования*, если данное отношение задано на линейном пространстве L

и выполняются равенства $\mu(\alpha x, \alpha y) = \mu(x, y)$, $\mu(x + c, y + c) = \mu(x, y)$ для всех $x, y \in L$, $\alpha > 0$, $c \in L$.

2. Основные определения и аксиомы нечеткого многокритериального выбора

Через X обозначим (четкое) множество возможных вариантов, содержащее, по крайней мере, два элемента. Имеется m ($m \geq 2$) числовых функций $f_1, f_2, \dots, f_m$, заданных на множестве X . Они образуют векторный критерий $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, который принимает значения в критериальном пространстве R^m . Введем также (четкое) множество возможных векторов $Y = f(X) \subset R^m$. Будем считать, что на множестве Y задано нечеткое отношение предпочтения ЛПР с функцией принадлежности $\mu_Y(\cdot, \cdot)$. Для векторов $y', y'' \in Y$ число $\mu_Y(y', y'') \in [0, 1]$ интерпретируется как степень уверенности ЛПР в том, что для него вектор y' предпочтительнее y'' . На практике это отношение, как правило, известно лишь частично.

Решением задачи нечеткого многокритериального выбора считается некоторое в общем случае нечеткое множество $C(Y) \subset Y$, функцию принадлежности которого будем обозначать μ_Y^C . Именно это множество (эта функция принадлежности) подлежит нахождению в результате решения задачи нечеткого многокритериального выбора.

Приведем аксиомы «разумного» нечеткого выбора [3], которые далее будем предполагать выполненными.

Аксиома 1. Для всех $y', y'' \in Y$ имеет место неравенство $\lambda_Y^C(y'') \leq 1 - \mu(y', y'')$.

Аксиома 2. Нечеткое иррефлексивное отношение предпочтения с функцией принадлежности $\mu_Y(\cdot, \cdot)$ является транзитивным и, кроме того, существует транзитивное отношение, функцию принадлежности которого обозначим $\mu(\cdot, \cdot)$, заданное на критериальном пространстве R^m и такое, что его сужение на Y совпадает с отношением $\mu_Y(\cdot, \cdot)$.

Аксиома 3. Каждый критерий f_i , $i = 1, 2, \dots, m$ согласован с отношением предпочтения $\mu(\cdot, \cdot)$ в том смысле, что для любых векторов $y', y'' \in R^m$ из выполнения соотношений

$$\begin{aligned} y' &= (y'_1, \dots, y'_{i-1}, y'_i, y'_{i+1}, \dots, y'_m), \\ y'' &= (y'_1, \dots, y'_{i-1}, y''_i, y'_{i+1}, \dots, y'_m), \\ y'_i &> y''_i, \end{aligned}$$

следует равенство $\mu(y', y'') = 1$.

Аксиома 4. Нечеткое отношение предпочтения $\mu(\cdot, \cdot)$ инвариантно относительно линейного положительного преобразования.

Пусть имеются две группы номеров критериев A и B ($A, B \subset I$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$). Говорят [3], что задан квант нечеткой информации с группами A , B , двумя наборами положительных параметров w_i для всех $i \in A$, w_j для всех $j \in B$ и степенью уверенности $\mu^* \in (0, 1]$, если для всех векторов $y', y'' \in R^m$, для которых выполнено

$$\begin{aligned} y'_i - y''_i &= w_i \text{ для всех } i \in A, \\ y''_j - y'_j &= w_j \text{ для всех } j \in B, \\ y'_s &= y''_s \text{ для всех } s \in I \setminus (A \cup B), \end{aligned}$$

имеет место равенство $\mu(y', y'') = \mu^*$.

Используя Аксиому 4, нетрудно установить, что в последнем определении векторы y', y'' можно считать фиксированными, причем $y'_i = w_i$, $y'_j = -w_j$, $y'_s = 0$ для всех $i \in A$, $j \in B$, $s \in I \setminus (A \cup B)$, и $y'' = 0$. Именно это упрощенное определение следует использовать при решении прикладных задач многокритериального выбора для выявления у ЛПР информации о его предпочтениях. Наличие указанного кванта информации означает готовность ЛПР к компромиссу: потерять по критериям менее значимой группы B не более w_j ($j \in B$) единиц с тем, чтобы получить прибавки по критериям более значимой группы A в размере не менее w_i ($i \in A$), причем степень уверенности ЛПР в этом составляет (в процентах) величину $\mu(y, 0) \cdot 100\%$.

Исходя из приведенного упрощенного определения, всякий вектор $y \in N^m$ будет задавать некий квант информации, если окажется выполненным соотношение $\mu(y, 0) = \mu \in (0, 1]$. В общем случае может быть выявлено несколько подобных квантов. В таком случае должен быть задан набор векторов $y^i \in N^m$, $i = 1, 2, \dots, k$, таких что $\mu(y^i, 0) = \mu_i \in (0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, k$. Некоторые наборы квантов могут оказаться противоречивыми. Определение непротиворечивого набора квантов нечеткой информации и критерии непротиворечивости можно найти в монографии автора [3].

С помощью одного или нескольких непротиворечивых квантов информации осуществляется сужение множества Парето следующим образом. Сначала по определенным формулам или с помощью некоторого алгоритма [7, 8] пересчитывается исходный векторный критерий. Затем находится множество Парето относительно полученного нового критерия. Установлено, что при выполнении Аксиом 1 – 4 искомое множество выбираемых векторов $C(Y)$ содержится в новом множестве Парето, которое является подмножеством исходного множества Парето. Тем самым можно построить более точную оценку для неизвестного множества $C(Y)$ по сравнению с исходным множеством Парето. Описанная процедура составляет существо аксиоматического подхода к сужению множества Парето, развиваемого автором на протяжении длительного времени.

3. Полнота нечеткой информации об отношении предпочтения

Несомненный теоретический и практический интерес представляет вопрос, насколько полна информация о нечетком отношении предпочтения в виде конечного набора квантов. Иначе говоря, каковы теоретические границы использования нечетких квантов информации при построения оценки сверху для неизвестного множества выбираемых векторов $C(Y)$? В случае четкого отношения предпочтения установлено [3], что на основе конечного набора квантов информации можно сколь угодно точно аппроксимировать неизвестное множество недоминируемых векторов, внутри кото-

рого содержится неизвестное множество выбираемых векторов. Этот результат служит теоретическим обоснованием предельных возможностей аксиоматического подхода к сужению множества Парето. В случае нечеткого отношения предпочтения подобный вопрос оставался открытым. Его решение дается ниже и опирается на Теорему 1.

Рассмотрим задачу многокритериального выбора с нечетким отношением предпочтения, имеющим функцию принадлежности $\mu(\cdot, \cdot)$. Нечеткое множество недоминируемых векторов $Ndom Y$, введенное Орловским [9], определяется своей функцией принадлежности:

$$\lambda_Y^N(y) = 1 - \sup_{z \in Y} \mu_Y(z, y) \text{ для всех } y \in Y.$$

Установлено [3], что в условиях выполнения Аксиом 2–4 нечеткое отношение предпочтения $\mu(\cdot, \cdot)$ является конусным с острым выпуклым нечетким конусом, который обозначим K , а его функцию принадлежности – символом η . Кроме того, этот конус с единичной степенью принадлежности включает неотрицательный ортант F_+^m и не содержит начало координат. Тем самым, по определению конусного отношения для $y', y'' \in R^m$ имеет место эквивалентность:

$$\mu(y', y'') = \mu \in (0, 1] \Leftrightarrow \eta(y' - y'') = \mu.$$

Введем множество $Y_z = \{y \in Y \mid \eta(y - z) > 0\}$ для каждого $z \in Y$. Если существует такая положительная константа r , что для любого $z \in Y$ выполняется неравенство $\sup_{y \in Y_z} \|y - z\| \leq r$, то множество Y будем именовать K -ограниченным. Всякое ограниченное множество K -ограничено, но не наоборот.

Теорема 2. Пусть K – острый выпуклый нечеткий конус с открытым носителем, не содержащим начало координат, причем $K \supset F_+^m$. Зафиксируем достаточно большое положительное r и будем считать, что множество Y является K -ограниченным. Тогда существует последовательность векторов $\{u^s\}_{s=1}^\infty$ и соответствующая последовательность значений степеней принадлежности $\{\lambda_s\}_{s=1}^\infty$ этих векторов, где

$$u^s \in N^m \cap K, \quad \lambda_s \in (0, 1], \quad s = 1, 2, \dots,$$

причем имеет место сходимость

$$Ndom_{\succ_s} Y \rightarrow Ndom Y \text{ при } s \rightarrow \infty, \quad (2)$$

где $\succ_s$ – нечеткое отношение с конусом $\text{conv}\{(e^1, 1), \dots, (e^m, 1), (u^1, \lambda_1), \dots, (u^s, \lambda_s)\}$.

Замечание. Сходимость в формуле (2) последовательности множеств недоминируемых векторов означает поточечную сходимость нечетких множеств, определяемую следующим образом: вектор $\hat{y}$ принадлежит предельному нечеткому множеству недоминируемых векторов, т.е. $\hat{y} \in Ndom Y$, тогда и только тогда, когда существует такое натуральное s_0 , что включение $\hat{y} \in Ndom_{\succ_s} Y$ имеет место для всех натуральных $s > s_0$.

К сожалению, полученный результат является в чистом виде теоремой существования, поскольку в ходе ее доказательства не указано, каким именно способом можно построить аппроксимационные множества недоминируемых векторов $Ndom_{\succ_s} Y$. В ней лишь устанавливается, что с помощью квантов информации о нечетком отношении предпочтения теоретически можно построить сколь угодно точную аппроксимацию для неизвестного множества недоминируемых векторов, однако вопрос о том, как именно это сделать, остается открытым.

Когда множество возможных векторов Y состоит из конечного числа элементов и выполняются предположения Теоремы 4, для точного определения множества недоминируемых векторов достаточно располагать лишь определенным конечным набором квантов информации. Об этом свидетельствует следующий результат.

Теорема 3. Если дополнительно к предположениям теоремы 4 добавить, что множество векторов Y – конечное (при этом требование K -ограниченности этого множества можно исключить), то существует конечный набор векторов $\{u^s\}_{s=1}^p \subset R^m$ и соответствующий набор степеней принадлежности $\{\lambda_s\}_{s=1}^p \subset (0, 1]$ этих векторов,

$$u^s \in N^m \cap K, \quad \lambda_s \in (0, 1], \quad s = 1, 2, \dots, p,$$

что

$$Ndom Y = Ndom_{\succ_p} Y, \quad (3)$$

где $\succ_p$ – нечеткое конусное отношение с нечетким конусом $C_p = \text{conv}\{(e^1, 1), \dots, (e^m, 1), (u^1, \lambda_1), \dots, (u^p, \lambda_p)\}$.

Заключение

В рамках аксиоматического подхода к сужению множества Парето в классе задач многокритериального выбора с неизвестным нечетким отношением ЛПР изучены предельные возможности использования нечеткой информации об отношении предпочтения ЛПР. Каждый квант подобной информации выражает

готовность ЛПР идти на определенный компромисс, состоящий в компенсации потерь по некоторым менее значимым критериям выигрышем по критериям более значимой группы. Показано, что только за счет указанных квантов можно сколь угодно точно аппроксимировать неизвестное множество недоминируемых вариантов. Из этого следует, что для успешной реализации аксиоматического подхода достаточно научиться извлекать кванты нечеткой информации и уметь их использовать в процессе принятия решений.

Приложение

Доказательство Теоремы 2. Положим $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Применяя Теорему 1, при $n = 1$ получим существование набора векторов $u^1, u^2, \dots, u^k$ и чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in (0, 1]$, для которых

$$d_r(K, \text{cone}\{(e^1, 1), \dots, (e^m, 1), (u^1, \lambda_1), \dots, (u^k, \lambda_k)\}) < 1.$$

При $n = 2$ аналогично найдутся, вообще говоря, другие наборы векторов $u^{k+1}, \dots, u^{k+p}$ и чисел $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_{k+p} \in (0, 1]$, для которых

$$d_r(K, \text{cone}\{(e^1, 1), \dots, (e^m, 1), (u^{k+1}, \lambda_{k+1}), \dots, (u^{k+p}, \lambda_{k+p})\}) < \frac{1}{2}.$$

Поскольку при «расширении» конуса $\text{conv}\{(e^1, 1), \dots, (e^m, 1), (u^{k+1}, \lambda_{k+1}), \dots, (u^{k+p}, \lambda_{k+p})\}$ за счет добавления полученных ранее элементов $(u^1, \lambda_1), \dots, (u^k, \lambda_k) \in K$ расстояние между K и «расширенным» конусом становится разве что меньше, то

$$d_r(K, \text{cone}\{(e^1, 1), \dots, (e^m, 1), (u^1, \lambda_1), \dots, (u^k, \lambda_k), \dots, (u^{k+p}, \lambda_{k+p})\}) < \frac{1}{2}.$$

Рассуждая аналогичным образом, придем к существованию таких последовательностей векторов $\{u^s\}_{s=1}^\infty \subset R^m$ и чисел $\{\lambda_s\}_{s=1}^\infty \subset (0, 1]$, что для каждого натурального n найдется номер s_n , при котором верно неравенство:

$$d_r(K, \text{cone}\{(e^1, 1), \dots, (e^m, 1), (u^1, \lambda_1), \dots, (u^s, \lambda_s)\}) < \frac{1}{n}, \quad s = s_n, s_n + 1, \dots \quad (4)$$

Введем выпуклые замкнутые нечеткие конусы:

$$C_s = \text{cone}\{(e^1, 1), \dots, (e^m, 1), (u^1, \lambda_1), \dots, (u^s, \lambda_s)\}, \quad s = 1, 2, \dots$$

Очевидно, $C_s \subset C_{s+1} \subset K$, $s = 1, 2, \dots$. Кроме того, в соответствии с (4) для любого n существует номер s_n , при котором имеет место неравенство:

$$d_r(K, C_s) < \frac{1}{n}, \quad s = s_n, s_n + 1, \dots$$

Отсюда, так как K – конус с открытым носителем, следует, что для любой точки $\hat{z} = (z, \lambda_K(z)) \in \hat{K} = K \cap U_r(\mathbf{0})$, $\lambda_K(z) > 0$ найдется номер s_0 , что включение $z \in \text{supp} C_s$ будет выполнено для всех $s = s_0, s_0 + 1, \dots$. Нетрудно понять, что в таком случае также будет иметь место включение $\hat{z} \in C_s$ для всех достаточно больших натуральных s .

Перейдем к доказательству сходимости (2). Если $\hat{y}^* = (y^*, \lambda(y^*)) \notin \text{Ndom} Y$, то по определению множества недоминируемых векторов найдется элемент $y \in Y$, для которого $\mu(y, y^*) = \eta(y - y^*) > 1 - \lambda(y^*) > 0$. Отсюда, используя условие K -ограниченности множества Y , получаем $\|y - y^*\| \leq r$. Следовательно, $\hat{z} = (y - y^*, \eta(y - y^*)) \in \hat{K}$. В этом случае, благодаря установленному выше результату, включение $\hat{z} \in C_s$ выполняется для всех достаточно больших номеров s . Полученное означает, что $\hat{y}^* \notin \text{Ndom}_{\hat{K}} Y$ для указанных s .

Следовательно, всякий элемент Y , не принадлежащий множеству $\text{Ndom} Y$, не может входить во множество предельных элементов для последовательности множеств $\text{Ndom}_{\hat{K}_s} Y$, $s = 1, 2, \dots$. С другой стороны, любая точка из множества $\text{Ndom} Y$ заведомо принадлежит указанному пределу последовательности множеств, так как включения $C_s \subset C_{s+1} \subset K$ влекут $\text{Ndom} Y \subset \text{Ndom}_{\hat{K}_s} Y$ при всех $s = 1, 2, \dots$. Теорема 2 доказана.

Доказательство Теоремы 3. Пусть $Y = \{y^1, y^2, \dots, y^N\}$. Для каждого $y^i \in Y$ введем конечное нечеткое множество

$$Z_i = \{\hat{z} \in F^m \mid \text{существует } y \in Y, \text{ что } \hat{z} = (y - y^i, \mu(y, y^i)), \mu(y, y^i) > 0\}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Благодаря тому, что носитель нечеткого конуса K является открытым множеством, согласно доказательству Теоремы 4, найдется номер s_i , для которого $Z_i \subset C_s$ при всех $s = s_i, s_i + 1, \dots$, где C_s – нечеткие конусы, введенные в ходе доказательства Теоремы 2. Положим $p = \max\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$. Для этого номера в силу вложенности конусов $C_s \subset C_{s+1}$, $s = 1, 2, \dots$, выполнено включение $Z_i \subset C_p$ для всех $i = 1, 2, \dots, N$.

Выберем два произвольных вектора $y^i, y^j \in Y$, $y^i \neq y^j$. Если верно неравенство $\mu(y^j, y^i) > 0$, то $\hat{z} = (y^j - y^i, \mu(y^j, y^i)) \in K$ и $\hat{z} \in Z_i$, а значит $\hat{z} \in C_p$. Обратно, если $\hat{z} \in C_p$, то в силу $C_p \subset K$ выполнено включение $\hat{z} \in K$. Таким образом, имеет место эквивалентность $\hat{z} \in K \Leftrightarrow \hat{z} \in C_p$, которая устанавливает равенство конусных отношений с нечеткими конусами K и C_p . Отсюда вытекает совпадение соответствующих множеств недоминируемых векторов, т.е. (3).

Литература

1. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. 2-е изд., испр. и доп. М.: Физматлит. 2007.
2. Ногин В.Д. Проблема сужения множества Парето: подходы к решению // Искусственный интеллект и принятие решений. 2008. № 1. С. 98-112.
3. Ногин В.Д. Сужение множества Парето: аксиоматический подход. М.: Физматлит. 2016.
4. Noghin V.D. Approximation of convex fuzzy sets. Abstracts of the International Conference «Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics» (dedicated to the memory of V.F. Demjanov) (CNSA), St. Petersburg. May 22-27. 2017. P. 127-129.
5. Lowen R. Convex fuzzy sets // Fuzzy sets and systems. 1989. V. 3. P. 291-310.
6. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука. 1985.
7. Ногин В.Д., Басков О.В. Сужение множества Парето на основе учета произвольного конечного набора числовой информации об отношении предпочтения // Доклады РАН. 2011. Т. 438. № 4. С. 1-4.
8. Ногин В.Д. Алгоритм сужения множества Парето на основе произвольного конечного набора "квантов" информации // Искусственный интеллект и принятие решений. 2013. № 1. С. 63-69.
9. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука. 1981.

Ногин Владимир Дмитриевич. Профессор кафедры Теории управления Санкт-Петербургского государственного университета. Окончил Ленинградский государственный университет в 1971 году. Доктор физико-математических наук. Действительный член Международной академии наук высшей школы. Количество печатных работ: около 150, среди которых ряд монографий и учебных пособий. Область научных интересов: принятие решений при многих критериях, многокритериальная оптимизация. E-mail: noghin@gmail.com

Ultimate possibilities of the Pareto set reduction based on quanta of fuzzy information

V.D. Noghin

Abstract. The problem of multicriteria choice with a fuzzy preference relation is considered, the main objects of which are a set of feasible alternatives, a numerical vector criterion and the fuzzy preference relation of the decision maker (DM). Concepts of a fuzzy vector space, a polyhedral fuzzy set and the distance between convex fuzzy sets and cones are used. To reduce the Pareto set the ultimate possibilities of information about the fuzzy preference relation in the form of quanta of information set are studied. It is proved that in a sufficiently wide class of above problems with a finite set of quanta of fuzzy information, one can arbitrarily accurate approximate an initially unknown fuzzy set of nondominant elements.

Keywords: multicriteria choice problem, reduction of the Pareto set, quanta of fuzzy information, completeness theorem

References

1. Podinovskij V.V., Noghin V.D. Pareto-optimal'nye resheniya mnogokriterial'nyh zadach (2-e izd., ispr. i dop.). M. Fizmatlit. 2007.
2. Noghin V.D. Problema suzheniya mnozhestva Pareto: podhody k resheniyu // *Iskusstvennyj intellekt i prinyatie reshenij*. 2008. № 1. S. 98-112.
3. Noghin V.D. Suzhenie mnozhestva Pareto: aksiomatcheskij podhod. M. Fizmatlit. 2016.
4. Noghin V.D. Approximation of convex fuzzy sets. Abstracts of the International Conference «Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics» (dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA), St. Petersburg. May 22-27. 2017. P. 127-129.
5. Lowen R. Convex fuzzy sets // *Fuzzy sets and systems*. 1989. V. 3. P. 291-310.
6. Leichtweiß K. Konvexe Mengen. Berlin. Verlag. 1980.
7. Noghin V.D., Baskov O.V. Pareto Set Reduction Based on an Arbitrary Finite Collection of Numerical Information on the Preference Relation // *Doklady Mathematics*. 2011. Vol. 83. No. 3. P. 418-420.
8. Noghin V.D. Reducing of the Pareto Set Algorithm Based on an Arbitrary Finite Set of Information Quanta // *Scientific and Technical Information Processing*. 2014. V. 41, No 5, P. 309-313.
9. Orlovskij S.A. Problemy prinyatiya reshenij pri nechetkoj iskhodnoj informacii. M. Nauka. 1981.

Noghin Vladimir Dmitrievich. Professor, Department of control theory, Faculty of applied mathematics and control processes, Saint-Petersburg State University. Graduated from Leningrad State University in 1971. Doctor of physical-mathematical sciences. A member of the International Higher Education Academy of Sciences. The author of near 150 science publications, including several monographs and teacher text-books, which were published by famous publishers. The area of scientific interests: decision making under multiple criteria, multicriteria optimization. E-mail: noghin@gmail.com