

Показатели сходства и различия многопризнаковых объектов в метрических пространствах множеств и мультимножеств¹

Аннотация. Понятия сходства и различия анализируемых объектов играют важную роль во многих теоретических и практических задачах принятия решений, искусственного интеллекта, распознавания образов, обработки разнородной информации и других. Сходство или различие объектов обычно оценивается их близостью в признаковом пространстве. В работе рассмотрены новые классы метрических пространств конечных, ограниченных, измеримых множеств и мультимножеств. Показаны возможности применения новых видов метрик для оценивания сходства или различия многопризнаковых объектов, которые присутствуют в нескольких экземплярах с отличающимися значениями признаков и представлены мультимножествами признаков.

Ключевые слова: многопризнаковые объекты, сходство и различие объектов, мультимножество, метрические пространства множеств и мультимножеств, метрики, псевдометрики, квазиметрики.

Введение

В различных теоретических и практических проблемах принятия решений, искусственного интеллекта, распознавания образов, обработки данных, в других предметных областях часто имеется необходимость оценить сходство или различие исследуемых объектов (вариантов, альтернатив), основываясь на их свойствах, которые выражены признаками объектов. Сходство или различие объектов обычно оценивается по их близости в признаковом пространстве.

Существует достаточно широкий круг задач, где анализируемые объекты заданы многими разнородными признаками, количественными, качественными, смешанными, непрерывными или дискретными, и, кроме того, одни и те же объекты присутствуют в нескольких экземплярах (версиях, копиях) с отличающимися значениями признаков, свертка которых или невозможна, или математически некорректна.

Разные версии описания объекта возникают в случаях, когда объект оценивается несколькими экспертами по многим критериям с числовыми и/или вербальными шкалами, или характеристики объекта вычисляются несколько раз разными методами, либо измеряются несколько раз разными инструментами. Примерами таких задач служат групповая классификация и групповое упорядочение многопризнаковых вариантов решений, распознавание графических символов, обработка текстовых документов. Множественность и повторяемость факторов, описывающих объекты, усложняет и затрудняет решение таких задач.

Удобной математической моделью для представления многопризнаковых объектов является мультимножество или множество с повторяющимися элементами. Кратность элементов — существенная особенность мультимножества, отличающая его от множества. В работе рассмотрены новые типы метрических пространств множеств и мультимножеств. По-

¹ Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 15-07-04760, 16-07-01125, 16-29-12864, 17-07-00512), программой фундаментальных исследований президиума РАН «Интеллектуальные информационные технологии и системы».

казаны возможности применения новых видов псевдометрик и квазиметрик для оценивания сходства или различия многопризнаковых объектов, которые присутствуют в нескольких экземплярах с отличающимися значениями признаков и представлены мультимножествами признаков.

1. Мультимножества и операции над ними

Изложим вкратце основные положения теории мультимножеств [6, 7]. Мультимножество A , порождённое обычным (чётким) множеством $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, все элементы x_i которого различны, определяются как совокупность групп одинаковых элементов, записанная в виде

$$A = \{k_A(x) \circ x \mid x \in X, k_A(x) \in \mathbb{Z}_+\}. \quad (1)$$

Здесь $k_A: X \rightarrow \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ называется *функцией числа экземпляров* мультимножества, которая задаёт кратность вхождения элемента $x \in X$ в мультимножество A , что обозначено символом $\circ$. Мультимножество обобщает понятие множества и становится множеством при $k_A(x) = \chi_A(x)$, где $\chi_A(x) = 1$ при $x \in A$ и $\chi_A(x) = 0$ при $x \notin A$. Группу $k_A(x) \circ x = x^{k_A(x)}$, объединяющую k одинаковых элементов x , назовём *компонентом* мультимножества A . Одноэлементное множество $\{x\} = \{x^1\} = \{1 \circ x\}$ называют *простым множеством* или *синглетоном*, однокомпонентное мультимножество $\{x^k\} = \{k \circ x\}$ – *простым мультимножеством*, множественным синглетоном или *мультитоном*. «Нульточечное» множество $\{x^0\} = \{0 \circ x\}$ будем называть *зероном*.

Обычное множество $\text{Supp} A = \{x \in A \mid \chi_{\text{Supp} A}(x) = \min[k_A(x), 1]\}$ называется *носителем* или *опорным множеством* мультимножества A . *Мощность* мультимножества определяется как общее число всех экземпляров элементов мультимножества, равное сумме их кратностей: $\text{card} A = |A| = \sum_x k_A(x)$; *размерность* мультимножества – как общее число единичных экземпляров всех элементов мультимножества, равное сумме их единичных кратностей: $\dim A = |A| = \sum_x \chi_A(x) = |\text{Supp} A|$. Максимальное значение функции кратности $\text{alt} A = \max_{x \in A} k_A(x)$ называется *высотой* мультимножества A .

Мультимножества A и B называются *равными* ($A=B$), когда $k_A(x) = k_B(x)$, $\forall x \in X$. Мультимножества A и B будут *неравными* ($A \neq B$),

когда $k_A(x) \neq k_B(x)$ хотя бы для одного $x \in X$. Для равных мультимножеств имеем $|A| = |B|$, $|A| = |B|$, $\text{Supp} A = \text{Supp} B$, $\text{alt} A = \text{alt} B$. Мультимножества A и B будем называть *равномощными*, если $|A| = |B|$; *равноразмерными*, если $|A| = |B|$; *равновеликими*, если они равномощны и равноразмерны. Равные мультимножества равновелики, обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Равенство мультимножеств есть отношение эквивалентности, поскольку оно рефлексивно ($A=A$), симметрично ($A=B$, $B=A$), транзитивно ($A=B$, $B=C \Rightarrow A=C$).

Говорят, что мультимножество A включено в мультимножество B ($A \subseteq B$), когда $k_A(x) \leq k_B(x)$, $\forall x \in X$. Мультимножество A называется тогда *подмультимножеством* или *мультитиподмножеством* мультимножества B , а мультимножество B – *надмультимножеством* или *исходным*, *родительским* мультимножеством мультимножества A . В этом случае $|A| \leq |B|$, $|A| \leq |B|$, $\text{Supp} A \subseteq \text{Supp} B$, $\text{alt} A \leq \text{alt} B$. Как и в случае множеств, одновременное выполнение условий $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$ влечёт равенство мультимножеств $A=B$. Если $A \subseteq B$, но $B \not\subseteq A$, то мультимножество A называют *собственным подмультимножеством* мультимножества B и обозначают $A \subset B$. Включение мультимножества есть отношение предпорядка, поскольку оно рефлексивно ($A \subseteq A$) и транзитивно ($A \subseteq B$, $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$).

Мультимножество Z называется *максимальным*, если все мультимножества A семейства мультимножеств $\mathbf{A}$ являются подмультимножествами мультимножества Z ($A \subseteq Z$), то есть если $k_A(x) \leq k_Z(x)$; *пустым* $\emptyset$, если $k_{\emptyset}(x) = 0$; *постоянным* $N_{[h]}$, если $k_{N_{[h]}}(x) = h = \text{const}$, $h \in \mathbb{Z}_+$, $\forall x \in X$. Таким образом, пустое мультимножество $\emptyset$ есть постоянное мультимножество $N_{[0]}$ высоты 0, обычное множество A , в частности, носитель $\text{Supp} A$ произвольного мультимножества A – постоянное мультимножество $N_{[1]}$ высоты 1. Максимальное мультимножество Z также может считаться постоянным мультимножеством $N_{[k]}$ высоты $k = k_Z(x) = \max_{A \in \mathbf{A}} k_A(x)$, $\forall x \in X$.

Будем полагать, что все мультимножества, составляющие семейство $\mathbf{A} = \{A_i\}_{i \in I}$, являются подмультимножествами одного и того же максимального мультимножества Z , порождённого некоторым множеством X . Определим следующие операции над мультимножествами:

объединение

$$A_1 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i \in I} A_i = \\ = \{k_{\bigcup A_i}(x) \circ x \mid k_{\bigcup A_i}(x) = \max_{i \in I} k_{A_i}(x), \forall x \in X\};$$

пересечение

$$A_1 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i \in I} A_i = \\ = \{k_{\bigcap A_i}(x) \circ x \mid k_{\bigcap A_i}(x) = \min_{i \in I} k_{A_i}(x), \forall x \in X\};$$

сложение

$$A_1 + \dots + A_n = \sum_{i \in I} A_i = \\ = \{k_{\sum A_i}(x) \circ x \mid k_{\sum A_i}(x) = \sum_{i \in I} k_{A_i}(x), \forall x \in X\};$$

вычитание

$$A - B = \\ = \{k_{A-B}(x) \circ x \mid k_{A-B}(x) = \max[k_A(x) - k_B(x), 0], \forall x \in X\};$$

симметрическая разность

$$A \Delta B = \{k_{A \Delta B}(x) \circ x \mid k_{A \Delta B}(x) = |k_A(x) - k_B(x)|, \forall x \in X\};$$

дополнение

$$\bar{A} = Z - A = \{k_{\bar{A}}(x) \circ x \mid k_{\bar{A}}(x) = k_Z(x) - k_A(x), \forall x \in X\};$$

умножение на число (репродукция)

$$b \cdot A = \{k_{b \cdot A}(x) \circ x \mid k_{b \cdot A}(x) = b \cdot k_A(x), b \in \mathbb{Z}_+, \forall x \in X\};$$

умножение

$$A_1 \cdot \dots \cdot A_n = \prod_{i \in I} A_i = \\ = \{k_{\prod A_i}(x) \circ x \mid k_{\prod A_i}(x) = \prod_{i \in I} k_{A_i}(x), \forall x \in X\};$$

n-ая степень

$$A^n = \{k_{A^n}(x) \circ x \mid k_{A^n}(x) = (k_A(x))^n, \forall x \in X\};$$

прямое произведение

$$A_1 \times \dots \times A_n = \\ = \{k_{A_1 \times \dots \times A_n}(x_{p_1}, \dots, x_{p_n}) \circ \langle x_{p_1}, \dots, x_{p_n} \rangle \mid k_{A_1 \times \dots \times A_n}(x_{p_1}, \dots, x_{p_n}) = \\ = \prod_i k_{A_i}(x_{p_i}), x_{p_i} \in A_i, i = 1, \dots, n\};$$

прямая n-ая степень

$$(\times A)^n = \{k_{(\times A)^n}(x) \circ x \mid k_{(\times A)^n}(x) = \prod_i k_{A_i}(x_i), x_i \in A, \\ i = 1, \dots, n\}.$$

Носители операций над мультимножествами удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\text{Supp}(A \cup B) = \text{Supp}(A + B) = (\text{Supp } A) \cup (\text{Supp } B);$$

$$\text{Supp}(A \cap B) = \text{Supp}(A \cdot B) = (\text{Supp } A) \cap (\text{Supp } B);$$

$$\text{Supp}(A \Delta B) = (\text{Supp}(A - B)) \cup (\text{Supp}(B - A));$$

$$\text{Supp}(b \cdot A) = \text{Supp } A = \text{Supp}(A^n);$$

$$\text{Supp}(A \times B) = (\text{Supp } A) \times (\text{Supp } B);$$

$$\text{Supp}(\times A)^n = (\times \text{Supp } A)^n.$$

Многие из свойств операций над мультимножествами аналогичны свойствам операций над обычными множествами. В их числе: идемпотентность объединения и пересечения $A \cup \dots \cup A = A$, $A \cap \dots \cap A = A$, инволюция (двойное отрицание) дополнения $\bar{\bar{A}} = A$, идентичность, коммутативность, ассоциативность и дистрибу-

тивность ряда операций. Как и в случае множеств, не все операции над мультимножествами взаимно коммутативны, ассоциативны и дистрибутивны. Кроме того, для множеств не определяются операции сложения, умножения на скаляр, умножения, возведения в арифметическую степень. При переходе от мультимножеств к множествам операции умножения и возведения в арифметическую степень превращаются в пересечение, а операции сложения и умножения на скаляр становятся неосуществимыми.

Для мультимножеств, также как и для множеств, существует двойственность операций объединения и пересечения по отношению к операции дополнения, аналогичная законам де Моргана, и, кроме того, имеется новый вид двойственности операций арифметического сложения и вычитания:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B};$$

$$\overline{A + B} = \bar{A} - \bar{B} = \bar{B} - \bar{A}, \quad \overline{A - B} = \bar{A} + \bar{B}, \quad \overline{A - B} = \bar{B} - \bar{A}.$$

У мультимножеств отсутствуют некоторые свойства операций, которыми обладают множества. В то же время появляются новые свойства, не имеющие аналогов для множеств. Например, в теории множеств всегда выполняются равенства: $A \cap \bar{A} = \emptyset$, $A \cup \bar{A} = U$, где U – универсальное множество. В отличие от множеств, для мультимножеств справедливы соотношения, вытекающие из определения дополнения мультимножества: $A + \bar{A} = Z$, $Z - \bar{A} = A$. В то же время быть как $A \cap \bar{A} = \emptyset$, $A \cup \bar{A} = Z$, $A - \bar{A} = \bar{A} - A = \emptyset$, так и $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$, $A \cup \bar{A} \neq Z$, $A - \bar{A} \neq \bar{A} - A \neq \emptyset$ (при этом возможны случаи, когда $A \subseteq \bar{A}$ и когда $\bar{A} \subseteq A$). Кроме того пустое мультимножество $\emptyset$ и максимальное мультимножество Z взаимно дополняют друг друга: $\emptyset = \bar{Z}$, $Z = \bar{\emptyset}$, и значит, $\emptyset \cap \bar{\emptyset} = Z \cap \bar{Z} = \emptyset$.

Ещё одной весьма специфической особенностью операций над мультимножествами семейства $A = \{A_i\}_{i \in I}$ является возможность их линейных комбинаций с операцией умножения на число (репродукцией), например:

взвешенное объединение

$$\bigcup_{i \in I} (b_i \cdot A_i) = \{k_{\bigcup (b_i \cdot A_i)}(x) \circ x \mid k_{\bigcup (b_i \cdot A_i)}(x) = \\ = \max_{i \in I} (b_i \cdot k_{A_i}(x)), b_i \geq 1, \forall x \in X\};$$

взвешенное пересечение

$$\bigcap_{i \in I} (b_i \cdot A_i) = \{k_{\bigcap (b_i \cdot A_i)}(x) \circ x \mid k_{\bigcap (b_i \cdot A_i)}(x) = \\ = \min_{i \in I} (b_i \cdot k_{A_i}(x)), b_i \geq 1, \forall x \in X\};$$

взвешенная арифметическая сумма

$$\sum_{i \in I} (b_i \bullet A_i) = \{k_{\sum(b_i \bullet A_i)}(x) \circ x \mid k_{\sum(b_i \bullet A_i)}(x) = \sum_{i \in I} (b_i \cdot k_{A_i}(x)), b_i \geq 1, \forall x \in X\};$$

взвешенное арифметическое произведение

$$\prod_{i \in I} (b_i \bullet A_i) = \{k_{\prod(b_i \bullet A_i)}(x) \circ x \mid k_{\prod(b_i \bullet A_i)}(x) = \prod_{i \in I} (b_i \cdot k_{A_i}(x)), b_i \geq 1, \forall x \in X\};$$

взвешенное прямое произведение

$$(b_1 \bullet A_1) \times \dots \times (b_n \bullet A_n) = \{k_{(b_1 \bullet A_1) \times \dots \times (b_n \bullet A_n)}(x_{p_1}, \dots, x_{p_n}) \circ \langle x_{p_1}, \dots, x_{p_n} \rangle, b_i \geq 1, \forall x \in X\},$$

где функция числа экземпляров задаётся выражением

$$k_{(b_1 \bullet A_1) \times \dots \times (b_n \bullet A_n)}(x_{p_1}, \dots, x_{p_n}) = \prod_i (b_i \cdot k_{A_i}(x_{p_i})), x_{p_i} \in A_i, i=1, \dots, n.$$

При $b_i=1$ «взвешенные» операции переходят в соответствующие «невзвешенные» операции над мультимножествами. Возможность введения и использования линейных комбинаций операций существенно увеличивает арсенал средств оперирования с мультимножествами. При переходе от мультимножеств к множествам и замене функции кратности $k_A(x)$ на характеристическую функцию $\chi_A(x)$ многие из выше сформулированных утверждений для мультимножеств останутся справедливыми и для множеств, но некоторые из них могут стать неопределимыми, изменить или потерять смысл.

2. Семейства и функции мультимножеств

Рассмотрим некоторые особые виды семейств и функций мультимножеств [6, 7, 11].

Семейство всех подмножеств множества A (power set), включающее само множество A и пустое множество $\emptyset$, называют *булеаном* множества A и обозначают $P(A)$. Булеан $P(A)$ является множеством всех подмножеств множества A .

Семейство всех различных подмультимножеств мультимножества A над доменом X (macroset) называют *макрмножеством* или *булеаном* мультимножества A и обозначают $P(A)$. Слово «различных» играет здесь важную роль, поскольку теория мультимножеств допускает, вообще говоря, неограниченную повторяемость элементов в одном и том же мультимножестве и соответственно повторяемость мультимножеств в одном и том же семействе мультимножеств. В семействе $P(A)$ различные подмультимножества всегда присутствуют в единственном экземпляре, в том числе само

мультимножество A , которое является максимальным мультимножеством для семейства $P(A)$, множество $\text{Supp} A$ и пустое мультимножество $\emptyset$. Булеан $P(A)$ является множеством подмультимножеств мультимножества A .

Семейство всех возможных подмультимножеств мультимножества A над доменом X (power multiset) назовём *мультибулеаном* мультимножества A и обозначим $Q(A)$. Мультибулеан $Q(A)$, в отличие от булеана $P(A)$, является мультимножеством, в котором допускается присутствие нескольких одинаковых подмультимножеств мультимножества A . Носителем $\text{Supp} Q(A)$ мультибулеана $Q(A)$ служит булеан $P(A)$ мультимножества A . Если $A \subseteq B$, то $P(A) \subseteq P(B) \subseteq Q(B)$. Некоторые из элементов булеанов $P(A)$, $P(B)$ и мультибулеана $Q(B)$ сами являются под(мульти)множествами других (мульти)множеств этих семейств.

Мощность семейства множеств и мультимножеств $P(A)$, $P(A)$, $Q(A)$ определяется общим числом его элементов (соответственно подмножеств множества A и подмультимножеств мультимножества A).

Например, мощность булеана $P(A)$ – семейства всех подмножеств n -элементного множества $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – равна $\text{card } P(A) = |P(A)| = 2^n = 2^{\text{card } A}$.

Мощность булеана $P(A)$ – семейства всех различных подмультимножеств n -мерного мультимножества $A = \{k_A(x_1) \circ x_1, k_A(x_2) \circ x_2, \dots, k_A(x_n) \circ x_n\}$ над конечным n -элементным множеством $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – равна $\text{card } P(A) = |P(A)| = (1 + k_A(x_1)) \cdot (1 + k_A(x_2)) \cdot \dots \cdot (1 + k_A(x_n)) = \prod_{i=1}^n (1 + k_A(x_i))$.

Мощность мультибулеана $Q(A)$ – семейства всех возможных подмультимножеств n -мерного мультимножества $A = \{k_{A_1}(x_1) \circ x_1, k_{A_2}(x_2) \circ x_2, \dots, k_{A_n}(x_n) \circ x_n\}$ над конечным n -элементным множеством $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – равна $\text{card } Q(A) = |Q(A)| = 2^m = 2^{|A|} = 2^{\text{card } A}$.

Вместимость или *объёмом* семейства множеств и мультимножеств будем называть сумму мощностей (мульти)множеств, составляющих это семейство. Тогда соответственно вместимость булеана $P(A)$ множества A есть $\text{vol } P(A) = \|P(A)\| = \sum_{A_j \in P(A)} |A_j| = \sum_{A_j \in P(A)} \sum_x \chi_{A_j}(x)$, вместимость булеана $P(A)$ мультимножества A над множеством X – $\text{vol } P(A) = \|P(A)\| = \sum_{A_j \in P(A)} |A_j| = \sum_{A_j \in P(A)} \sum_x k_{A_j}(x)$, а вместимость мультибулеана $Q(A)$ мультимножества A над множеством X – $\text{vol } Q(A) = \|Q(A)\| = \sum_{A_j \in Q(A)} |A_j| = \sum_{A_j \in Q(A)} \sum_x k_{A_j}(x)$.

Так, булеан $P(A)$ множества $A=\{a,b,c\}$ состоит из множеств $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$. Мощность булеана $P(A)$ равна $|P(A)|=2^3=8$, вместимость $\|P(A)\|=12$.

Булеан $P(A)$ мультимножества $A=\{3^{\circ}a, 1^{\circ}b, 2^{\circ}c\}$ над множеством $A=\{a, b, c\}$ включает мультимножества $\{0^{\circ}a, 0^{\circ}b, 0^{\circ}c\}=\emptyset, \{1^{\circ}a, 0^{\circ}b, 0^{\circ}c\}=\{a\}, \{0^{\circ}a, 1^{\circ}b, 0^{\circ}c\}=\{b\}, \{0^{\circ}a, 0^{\circ}b, 1^{\circ}c\}=\{c\}, \{1^{\circ}a, 1^{\circ}b, 0^{\circ}c\}=\{a, b\}, \{1^{\circ}a, 0^{\circ}b, 1^{\circ}c\}=\{a, c\}, \{0^{\circ}a, 1^{\circ}b, 1^{\circ}c\}=\{b, c\}, \{2^{\circ}a, 0^{\circ}b, 0^{\circ}c\}, \{0^{\circ}a, 0^{\circ}b, 2^{\circ}c\}, \{1^{\circ}a, 1^{\circ}b, 1^{\circ}c\}=\{a, b, c\}=\text{Supp}A, \{3^{\circ}a, 0^{\circ}b, 0^{\circ}c\}, \{2^{\circ}a, 1^{\circ}b, 0^{\circ}c\}, \{2^{\circ}a, 0^{\circ}b, 1^{\circ}c\}, \{1^{\circ}a, 0^{\circ}b, 2^{\circ}c\}, \{0^{\circ}a, 1^{\circ}b, 2^{\circ}c\}, \{3^{\circ}a, 1^{\circ}b, 0^{\circ}c\}, \{3^{\circ}a, 0^{\circ}b, 1^{\circ}c\}, \{2^{\circ}a, 0^{\circ}b, 2^{\circ}c\}, \{2^{\circ}a, 1^{\circ}b, 1^{\circ}c\}, \{1^{\circ}a, 1^{\circ}b, 2^{\circ}c\}, \{3^{\circ}a, 0^{\circ}b, 2^{\circ}c\}, \{3^{\circ}a, 1^{\circ}b, 1^{\circ}c\}, \{2^{\circ}a, 1^{\circ}b, 2^{\circ}c\}, \{3^{\circ}a, 1^{\circ}b, 2^{\circ}c\}=A$. Мощность булеана $P(A)$ равна $|P(A)|=4 \cdot 2 \cdot 3=24$, вместимость $\|P(A)\|=72$. В частности, мощность булеана $P(\emptyset)=\{\emptyset\}$ пустого (мульти)множества $\emptyset$ равна $|\{\emptyset\}|=2^0=1$, вместимость $\|\{\emptyset\}\|=0$.

Мультибулеан $Q(A)$ мультимножества $A=\{3^{\circ}a, 1^{\circ}b, 2^{\circ}c\}$ над множеством $A=\{a, b, c\}$ содержит 1 мультимножество $\{0^{\circ}a, 0^{\circ}b, 0^{\circ}c\}=\emptyset$, 3 мультимножества $\{1^{\circ}a, 0^{\circ}b, 0^{\circ}c\}=\{a\}$, 1 мультимножество $\{0^{\circ}a, 1^{\circ}b, 0^{\circ}c\}=\{b\}$, 2 мультимножества $\{0^{\circ}a, 0^{\circ}b, 1^{\circ}c\}=\{c\}$, 3 мультимножества $\{1^{\circ}a, 1^{\circ}b, 0^{\circ}c\}=\{a, b\}$, 6 мультимножеств $\{1^{\circ}a, 0^{\circ}b, 1^{\circ}c\}=\{a, c\}$, 2 мультимножества $\{0^{\circ}a, 1^{\circ}b, 1^{\circ}c\}=\{b, c\}$, 3 мультимножества $\{2^{\circ}a, 0^{\circ}b, 0^{\circ}c\}$, 1 мультимножество $\{0^{\circ}a, 0^{\circ}b, 2^{\circ}c\}$, 6 мультимножеств $\{1^{\circ}a, 1^{\circ}b, 1^{\circ}c\}=\{a, b, c\}=\text{Supp}A$, 1 мультимножество $\{3^{\circ}a, 0^{\circ}b, 0^{\circ}c\}$, 3 мультимножества $\{2^{\circ}a, 1^{\circ}b, 0^{\circ}c\}$, 6 мультимножеств $\{2^{\circ}a, 0^{\circ}b, 1^{\circ}c\}$, 3 мультимножества $\{1^{\circ}a, 0^{\circ}b, 2^{\circ}c\}$, 1 мультимножество $\{0^{\circ}a, 1^{\circ}b, 2^{\circ}c\}$, 1 мультимножество $\{3^{\circ}a, 1^{\circ}b, 0^{\circ}c\}$, 2 мультимножества $\{3^{\circ}a, 0^{\circ}b, 1^{\circ}c\}$, 3 мультимножества $\{2^{\circ}a, 0^{\circ}b, 2^{\circ}c\}$, 6 мультимножеств $\{2^{\circ}a, 1^{\circ}b, 1^{\circ}c\}$, 3 мультимножества $\{1^{\circ}a, 1^{\circ}b, 2^{\circ}c\}$, 1 мультимножество $\{3^{\circ}a, 0^{\circ}b, 2^{\circ}c\}$, 2 мультимножества $\{3^{\circ}a, 1^{\circ}b, 1^{\circ}c\}$, 3 мультимножества $\{2^{\circ}a, 1^{\circ}b, 2^{\circ}c\}$, 1 мультимножество $\{3^{\circ}a, 1^{\circ}b, 2^{\circ}c\}=A$. Мощность мультибулеана $Q(A)$ равна $|Q(A)|=2^6=64$, вместимость $\|Q(A)\|=192$.

Семейство непустых мультимножеств $A_1, \dots, A_r$, объединение которых $\bigcup_{s=1}^r A_s = A$, будем называть *покрытием* (covering) мультимножества A , пересечение которых $\bigcap_{s=1}^r A_s = A$ – *перекрытием* (overlapping) мультимножества A , а сумма которых $\sum_{s=1}^r A_s = A$, – *разложением* (decomposition) мультимножества A . Если мультимножества попарно не пересекаются

($A_p \cap A_q = \emptyset, p \neq q$ – такие мультимножества назовём *дизъюнктными*), то покрытие и разложение мультимножества A совпадают и называются *разбиением* (partition) мультимножества A . Мультимножества $A_1, \dots, A_r$, образующие покрытие, перекрытие, разложение, разбиение мультимножества A , назовём его *блоками*, а число r блоков – *рангом* покрытия, перекрытия, разложения, разбиения. Покрытие мультимножества A ранга r обозначим как $\mathbf{C}^r(A) = \{A_1; \dots; A_s; \dots; A_r\}$, перекрытие мультимножества A ранга r как $\mathbf{I}^r(A) = \{A_1; \dots; A_s; \dots; A_r\}$, разложение мультимножества A ранга r как $\mathbf{D}^r(A) = \{A_1; \dots; A_s; \dots; A_r\}$, а разбиение мультимножества A ранга r как $\mathbf{B}^r(A) = \{A_1; \dots; A_s; \dots; A_r\}$, где блоки отделяются точками с запятыми. Если все блоки суть подмультимножества мультимножества A , то в таком случае говорят о разбиении мультимножества A на классы. Для мощности и вместимости покрытия $\mathbf{C}^r(A)$, перекрытия $\mathbf{I}^r(A)$, разложения $\mathbf{D}^r(A)$ и разбиения $\mathbf{B}^r(A)$ мультимножества A имеем:

$$|\mathbf{C}^r(A)| = |\mathbf{I}^r(A)| = |\mathbf{D}^r(A)| = |\mathbf{B}^r(A)| = r, \\ \|\mathbf{C}^r(A)\| \geq |A|, \|\mathbf{I}^r(A)\| \geq |A|, \|\mathbf{D}^r(A)\| = \|\mathbf{B}^r(A)\| = |A|.$$

Покрывания и разбиения множества, покрытия, разложения и разбиения мультимножества могут быть упорядоченными и неупорядоченными в зависимости от учёта очередности их блоков.

Например, семейство зеронов $\{\{0^{\circ}x_1\}; \dots; \{0^{\circ}x_s\}; \dots; \{0^{\circ}x_n\}\}$ является разбиением $\mathbf{B}^n(\emptyset)$ пустого (мульти)множества $\emptyset$, семейство синглетонов $\{\{1^{\circ}x_1\}; \dots; \{1^{\circ}x_s\}; \dots; \{1^{\circ}x_n\}\}$ – разбиением $\mathbf{B}^n(X)$ множества $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, семейство мульти-тонов $\{\{k_A(x_1)^{\circ}x_1\}; \dots; \{k_A(x_s)^{\circ}x_s\}; \dots; \{k_A(x_n)^{\circ}x_n\}\}$ – разбиением $\mathbf{B}^n(A)$ мультимножества $A = \{k_A(x_1)^{\circ}x_1, \dots, k_A(x_s)^{\circ}x_s, \dots, k_A(x_n)^{\circ}x_n\}$ с числом блоков $r = |X| = n$. Булеан $P(A)$ множества A является покрытием $\mathbf{C}^r(A)$ множества A с числом блоков $r = |P(A)| = 2^{|A|}$. Булеан $P(A)$ n -мерного мультимножества $A = \{k_A(x_1)^{\circ}x_1, \dots, k_A(x_n)^{\circ}x_n\}$ над конечным множеством $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ является покрытием $\mathbf{C}^r(A)$ мультимножества A с числом блоков $r = |P(A)| = \prod_{i=1}^n (1 + k_A(x_i))$.

Семейство мультимножеств над множеством $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ будем называть *полукольцом* $\mathbf{E}$ мультимножеств, если оно содержит пустое мультимножество $\emptyset$, пересечение $A_i \cap A_j$ мультимножеств $A_i, A_j \in \mathbf{E}$, а всякое мультимножество $A \in \mathbf{E}$ представимо как конечное объедине-

ние $\bigcup_{s=1}^r A_s = A$ дизъюнктивных подмультимножеств $A_s \subset A$; *кольцом* K мультимножеств, если оно содержит пустое мультимножество $\emptyset$, объединение $A_i \cup A_j$, сумму $A_i + A_j$ и разность $A_i - A_j$ мультимножеств $A_i, A_j \in K$; *алгеброй* S мультимножеств, если оно есть кольцо, которое включает наибольшее множество, называемое единицей алгебры, и замкнуто относительно конечных объединений, сложений и дополнений мультимножеств; *σ -кольцом* K_σ мультимножеств, если оно есть кольцо и содержит счётные объединения $\bigcup_{s=1}^\infty A_s$ и сумму $\sum_{s=1}^\infty A_s$ мультимножеств $A_s \in K_\sigma$; *δ -кольцом* K_δ мультимножеств, если оно есть кольцо и содержит счётное пересечение $\bigcap_{s=1}^\infty A_s$ мультимножеств $A_s \in K_\delta$; *σ -алгеброй* S_σ мультимножеств, если оно есть σ -кольцо, содержит единицу алгебры, замкнуто относительно счётных объединений, сложений и дополнений мультимножеств.

В частности, всякое кольцо множеств/мультимножеств является полукольцом множеств/мультимножеств, а всякая σ -алгебра множеств/мультимножеств является δ -алгеброй множеств/мультимножеств, и наоборот.

Булеан $P(A)$ множества A есть минимальная алгебра подмножеств множества A , которое является единицей алгебры. Булева алгебра $B(A)$ подмножеств множества A есть σ -алгебра множества X , которое является единицей алгебры, носителем алгебры служит семейство $P(A)$. Булеан $P(A)$ n -мерного мультимножества $A = \{k_A(x_1) \circ x_1, \dots, k_A(x_n) \circ x_n\}$ над конечным множеством $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, есть минимальная алгебра подмультимножеств мультимножества A , которое является единицей алгебры. Булева алгебра $B(A)$ подмультимножеств мультимножества $A = \{k_A(x_1) \circ x_1, k_A(x_2) \circ x_2, \dots\}$ над бесконечным множеством $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, есть σ -алгебра мультимножества A , которое является единицей алгебры.

При переходе к множествам разложение множества будет невозможно, а покрытие, разбиение, полукольцо, кольцо и алгебра мультимножества превращаются соответственно в покрытие, разбиение, полукольцо, кольцо и алгебру множества.

Неотрицательная действительная функция мультимножества $m: A \rightarrow \mathbb{R}$, определённая на семействе A , называется *сильно аддитивной* или *сильно конечно-аддитивной мерой*, если

для любой конечной совокупности мультимножеств $A_i \in A$ выполняется равенство

$$m(\sum_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n m(A_i), \quad (2)$$

и *сильно σ -аддитивной* или *сильно счётно-аддитивной мерой*, если для любой счётной совокупности мультимножеств $A_i \in A$ выполняется равенство

$$m(\sum_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty m(A_i). \quad (3)$$

В качестве семейства A выступает полукольцо E , кольцо K , σ -кольцо K_σ или σ -алгебра S_σ подмультимножеств A_i некоторого мультимножества $A = \{k_A(x_1) \circ x_1, k_A(x_2) \circ x_2, \dots\}$ над множеством $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Таким мультимножеством A может быть, например, максимальное мультимножество $Z = \{k_Z(x_1) \circ x_1, k_Z(x_2) \circ x_2, \dots\}$, постоянное мультимножество $Z_{[k]} = \{k \circ x_1, k \circ x_2, \dots\}$, n -мерное мультимножество $X = \{k_X(x_1) \circ x_1, \dots, k_X(x_n) \circ x_n\}$. Из свойства идентичности пустого мультимножества $\emptyset = \emptyset + \emptyset$ и равенства (2) следует, что $m(\emptyset) = m(\emptyset + \emptyset) = 2m(\emptyset)$, и значит, $m(\emptyset) = 0$.

Для любой конечного или счётного разбиения мультимножества A сумма подмультимножеств совпадает с их объединением $\sum_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n A_i$. Тогда выражения (2) и (3) для дизъюнктивных мультимножеств $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $A_i, A_j \in A$ можно записать как

$$m(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n m(A_i), \quad (4)$$

$$m(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty m(A_i). \quad (5)$$

Меру мультимножества, удовлетворяющую условию (4), будем называть *слабо аддитивной* или *слабо конечно-аддитивной*, а удовлетворяющую условию (5) – *слабо σ -аддитивной* или *слабо счётно-аддитивной*.

Сильно аддитивная функция мультимножества, очевидно, является и слабо аддитивной. Обратное, вообще говоря, неверно. Слабая аддитивность (4), (5) функции мультимножества совпадает с конечной и счётной аддитивностью функции множества. Для множеств операция сложения неосуществима, и свойство сильной аддитивности функции отсутствует. Таким образом, аддитивность функций мультимножества разнообразнее аддитивности функций множеств.

Мера m мультимножества обладает также свойствами монотонности $m(A) \leq m(B) \Leftrightarrow A \subseteq B$; симметричности $m(A) + m(\bar{A}) = m(Z)$; непрерывности $\lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i) = m(\lim_{i \rightarrow \infty} A_i)$; эластичности $m(b \bullet A) = bm(A)$, где $b \geq 1$ – целое число. Положим

меру синглтона $\{x_i\}$ равной $m(\{x_i\})=w_i$, $0 \leq w_i < \infty$. Тогда согласно равенствам (2) и (3) определённая на семействе мультимножеств $\mathcal{A}$ функция

$$m(A) = m(\sum_i A_i) = \sum_i m(A_i) = \sum_i [k_A(x_i)m(\{x_i\})] = \sum_i w_i k_A(x_i) \quad (6)$$

является сильно аддитивной или соответственно сильно σ -аддитивной мерой мультимножества. Если в (6) положить все числа $w_i=1$, то получим: $m(A)=\sum_i k_A(x_i)=|A|$. Тем самым мощность мультимножества есть частный случай его меры.

Укажем важные свойства меры мультимножества, обусловленные её сильной аддитивностью и напоминающие свойства мощности мультимножества:

$$m(A+B) = m(A)+m(B) = m(A \cup B) + m(A \cap B), \quad (7)$$

$$m(A-B) = m(A) - m(A \cap B),$$

$$m(A \Delta B) = m(A-B) + m(B-A) = m(A \cup B) - m(A \cap B), \quad (8)$$

$$m(\bigcap_{i=1}^n A_i) \leq m(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n m(A_i).$$

Пространством мультимножеств с мерой назовём пару $(\mathbf{S}_\sigma(\mathbf{Z}), m)$, где $\mathbf{S}_\sigma(\mathbf{Z})$ – σ -алгебра над максимальным мультимножеством $\mathbf{Z}$, m – σ -конечная мера, определённая на σ -кольце $\mathbf{K}_\sigma$ подмультимножеств $A_i \subseteq \mathbf{Z}$, которые образуют разложение мультимножества $\mathbf{Z} = \sum_{i=1}^\infty A_i$. Сумма, объединение и пересечение конечного числа измеримых мультимножеств, разность и симметрическая разность двух измеримых мультимножеств, репродукция измеримого мультимножества являются измеримыми мультимножествами. Необходимые и достаточные условия измеримости мультимножества формулируются следующим образом [6, 7]. Мультимножество A , принадлежащее σ -кольцу $\mathbf{K}_\sigma$, измеримо тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое мультимножество $B \in \mathbf{K}_\sigma$ такое, что выполняется неравенство $m(A \Delta B) < \varepsilon$.

3. Метрические пространства мультимножеств

Множество, в котором тем или иным образом определено понятие близости элементов, принято называть пространством, а его элементы – точками пространства. Неотрицательная действительная функция d_X , определённая на прямом произведении $X \times X$ множества X , назы-

вается *метрикой* на множестве X , если для любых элементов выполняются аксиомы: (1⁰) симметрии $d_X(x,y)=d_X(y,x)$; (2⁰) тождества $d_X(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$; (3⁰) треугольника $d_X(x,y) \leq d_X(x,z)+d_X(z,y)$. Числовое значение функции $d_X(x,y)$ называют *расстоянием* между элементами x и y множества X . Из требований (1⁰)–(3⁰) вытекает и неотрицательность метрики $d_X(x,y) \geq 0$. Множество X с заданной на нём метрикой d_X называется *метрическим пространством* и обозначается (X, d_X) .

Метрическое пространство X называют метрически выпуклым или d -выпуклым, если для любых несовпадающих элементов $x, y \in X$, $x \neq y$ существует такой отличный от них элемент $z \in X$, $z \neq x$, $z \neq y$, что неравенство треугольника (3⁰) превращается в равенство $d_X(x,y)=d_X(x,z)+d_X(z,y)$. Метрику d_X , удовлетворяющую этому условию, будем называть d -выпуклой. Свойство метрической выпуклости пространства (X, d_X) представляет собой пространственный аналог тернарного отношения $[x, z, y]$ «элемент z находится между элементами x и y », которое в произвольном частично упорядоченном множестве задаётся условием $\inf(x,y) \leq z \leq \sup(x,y)$.

При оценивании взаимного расположения элементов множества X используются и иные показатели близости элементов, основанные на неполной аксиоматике метрического пространства. Неотрицательная действительная функция d_X , определённая на прямом произведении $X \times X$, удовлетворяющая аксиоме (1⁰) симметрии и условию (4⁰) совпадения $d_X(x,x)=0$ для всех $x \in X$, называется *квазиметрикой*, а удовлетворяющая ещё и аксиоме (3⁰) треугольника, – *псевдометрикой* на множестве X . Соответствующие пространства (X, d_X) называют *квазиметрическим* и *псевдометрическим*. В квази- и псевдометрическом пространствах аксиома (2⁰) тождества для функции d_X не выполняется, то есть из условия $d_X(x,y)=0$, вообще говоря, не вытекает равенства элементов x и y . Условие (4⁰) совпадения является более слабым, чем аксиома (2⁰) тождества. Поэтому всякая метрика будет также и квазиметрикой, и псевдометрикой. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Неотрицательная действительная функция d_X , определённая на прямом произведении $X \times X$ и удовлетворяющая аксиомам (1⁰) симметрии и (2⁰) тождества, называется *симметрикой* на множестве X , а множество X с симметрикой d_X

– *пространством близости*. Симметрика d_X , удовлетворяющая неравенству (5⁰) $d_X(x,y) \leq \max_{z \in X} [d_X(x,z), d_X(z,y)]$ для любых элементов множества X , называется *ультраметрикой* на множестве X или ультраметрическим расстоянием между элементами x и y . Нетрудно убедиться, что для ультраметрики выполняется и аксиома (3⁰) треугольника. Таким образом, ультраметрика d_X удовлетворяет аксиоматике метрического пространства, а пространство (X, d_X) с ультраметрикой d_X является метрическим. Неравенство (5⁰) является более сильным, чем неравенство (3⁰) треугольника. Поэтому всякая ультраметрика будет также и метрикой. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Рассмотрим возможные подходы к образованию метрических пространств (A, d_A) на семействах A множеств и A мультимножеств. Любому множеству $A \subseteq X$ и мультимножеству $A \subseteq Z$ над множеством $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ можно поставить в соответствие целочисленный вектор $y = (y_1, \dots, y_n)$, компоненты которого задаются соответственно как $y_i = \chi_A(x_i) = 0, 1$ для множества A и как $y_i = k_A(x_i) = 0, 1, 2, \dots$ для мультимножества A , $x_i \in X$. Например, множеству $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ соответствует вектор $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, пустому (мульти)множеству $\emptyset$ – вектор $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, синглетону $\{a\}$ – вектор $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, мультитону $\{2 \circ b\}$ – вектор $(0, 2, 0, 0, 0, 0, 0)$, множеству $A = \{a, b, c\}$ – вектор $(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$, мультимножеству $A = \{3 \circ a, 1 \circ b, 2 \circ c\}$ – вектор $(3, 1, 2, 0, 0, 0, 0)$.

Воспользуемся аналогией с известными видами метрических пространств – векторными пространствами l_p^n и пространствами ограниченных числовых последовательностей l_p [1].

Булеан $P(X)$ различных подмультимножеств n -мерного мультимножества $X = \{k_X(x_1) \circ x_1, \dots, k_X(x_n) \circ x_n\}$ над конечным множеством $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ эквивалентен множеству $\mathbb{R}^n$ n -мерных векторов $y_s = (y_{s1}, \dots, y_{sn})$ с действительными компонентами $y_{si} = k_{A_s}(x_i)$ и образует *метрическое пространство конечных мультимножеств* [19]:

$$P_1 = (P(X), d_{P_1}) \text{ с метрикой типа Хемминга} \\ d_{P_1}(A, B) = \sum_{i=1}^n |k_A(x_i) - k_B(x_i)|; \quad (9)$$

$$P_2 = (P(X), d_{P_2}) \text{ с метрикой типа Евклида} \\ d_{P_2}(A, B) = [\sum_{i=1}^n |k_A(x_i) - k_B(x_i)|^2]^{1/2}; \quad (10)$$

$$P_p = (P(X), d_{P_p}) \text{ с метрикой типа Минковского} \\ d_{P_p}(A, B) = [\sum_{i=1}^n |k_A(x_i) - k_B(x_i)|^p]^{1/p}; \quad (11)$$

$$P_\infty = (P(X), d_{P_\infty}) \text{ с метрикой типа Чебышёва} \\ d_{P_\infty}(A, B) = \max_i |k_A(x_i) - k_B(x_i)|. \quad (12)$$

Здесь $p \geq 1$ – целое число.

σ -алгебра $S_\sigma(X)$ различных подмультимножеств мультимножества $X = \{k_X(x_1) \circ x_1, k_X(x_2) \circ x_2, \dots\}$ над произвольным множеством $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, где любое подмультимножество $A_s \subseteq X$ удовлетворяет условию ограниченности $k_{A_s}(x_i) \leq c_s < \infty$ или $\sum_{i=1}^\infty (k_{A_s}(x_i))^p \leq c^p < \infty$ для всех целых чисел $p \geq 1$, эквивалентна множеству $\mathbb{R}^N$ ограниченных числовых последовательностей $Y_s = \{y_{si}\} = \{y_{s1}, y_{s2}, \dots\}$ с действительными членами $y_{si} = k_{A_s}(x_i)$, удовлетворяющими условию $|y_{si}| \leq c_s < \infty$ или $\sum_{i=1}^\infty |y_{si}|^p \leq c^p < \infty$ для всех целых чисел $p \geq 1$, и образует *метрическое пространство ограниченных мультимножеств*:

$$S_1 = (S_\sigma(X), d_{S_1}) \text{ с метрикой типа Хемминга} \\ d_{S_1}(A, B) = \sum_{i=1}^\infty |k_A(x_i) - k_B(x_i)|; \quad (13)$$

$$S_2 = (S_\sigma(X), d_{S_2}) \text{ с метрикой типа Евклида} \\ d_{S_2}(A, B) = [\sum_{i=1}^\infty |k_A(x_i) - k_B(x_i)|^2]^{1/2}; \quad (14)$$

$$S_p = (S_\sigma(X), d_{S_p}) \text{ с метрикой типа Минковского} \\ d_{S_p}(A, B) = [\sum_{i=1}^\infty |k_A(x_i) - k_B(x_i)|^p]^{1/p}; \quad (15)$$

$$S_\infty = (S_\sigma(X), d_{S_\infty}) \text{ с метрикой типа Чебышёва} \\ d_{S_\infty}(A, B) = \sup_i |k_A(x_i) - k_B(x_i)|. \quad (16)$$

Отметим, что в выражения (9)-(11) и (13)-(15) входит мощность $|A \Delta B| = \sum_i |k_A(x_i) - k_B(x_i)|$ симметрической разности мультимножеств A и B , играющая роль метрики. Заменяя в формулах (9)-(16) функцию кратности $k_A(x)$ на характеристическую функцию $\chi_A(x)$, получим определения метрических пространств конечных и ограниченных множеств.

Пространство $(S_\sigma(Z), m)$ мультимножеств с мерой, где мультимножества $A_s \subseteq Z$, входящие в σ -алгебру $S_\sigma(Z)$ максимального мультимножества $Z = \{k_Z(x_1) \circ x_1, k_Z(x_2) \circ x_2, \dots\}$ над множеством $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, измеримы, мера m мультимножества сильно σ -аддитивна и вполне σ -конечна, образует *метрические пространства измеримых мультимножеств* $Z_{qp} = (S_\sigma(Z), d_{Z_{qp}})$, $q = 1, 2, 3, 4$, $p \geq 1$ – целое число, с функциями

$$d_{Z_{1p}}(A, B) = [m(A \Delta B)]^{1/p}, \quad (17)$$

$$d_{Z_{2p}}(A, B) = [m(A \Delta B)/m(Z)]^{1/p}, \quad (18)$$

$$d_{Z_{3p}}(A, B) = [m(A \Delta B)/m(A \cup B)]^{1/p}, \quad (19)$$

$$d_{Z_{4p}}(A, B) = [m(A \Delta B)/m(A + B)]^{1/p}. \quad (20)$$

Функции $d_{Z_{3p}}$ и $d_{Z_{4p}}$ не определены при $A = B = \emptyset$, поэтому по определению принимается $d_{Z_{3p}}(\emptyset, \emptyset) = d_{Z_{4p}}(\emptyset, \emptyset) = 0$. Функция $d_{Z_{1p}}$ задаёт отображение $d_{Z_{1p}}: S_\sigma \times S_\sigma \rightarrow \mathbb{R}_+$, а функции $d_{Z_{2p}}$, $d_{Z_{3p}}$, $d_{Z_{4p}}$ – отображение $d_{Z_{qp}}: S_\sigma \times S_\sigma \rightarrow \mathbb{R}_{01} = [0, 1]$.

Функции $d_{zqp}(A, B)$, $q=1,2,3$ являются псевдометриками, удовлетворяющими аксиомам симметрии (1^0), треугольника (3^0) и условию совпадения (4^0), а функция $d_{z4p}(A, B)$ – квазиметрикой, удовлетворяющей аксиоме симметрии (1^0) и условию совпадения (4^0). В общем случае из условия $m(A \Delta B)=0$ не вытекает, что $A=B$. Для мультимножеств, отличающихся на мультимножество меры нуль, из условия $m(A \Delta B)=0$ следует m -равенство таких мультимножеств $A=_m B$, и тогда для функций $d_{zqp}(A, B)$, $q=1,2,3,4$ выполняется и аксиома тождества (2^0). Функции d_{z1p} , d_{z2p} , d_{z3p} становятся метриками, а функция d_{z4p} симметрикой почти всюду на σ -алгебре $S_\sigma(Z)$ измеримых мультимножеств. Доказательства этих утверждений для псевдометрик приведены в [6, 7], а для квазиметрики в приложении.

Назовём псевдометрику $d_{z1p}(A, B)$ на пространстве $(S_\sigma(Z), m)$ измеримых мультимножеств *основной*, псевдометрику $d_{z2p}(A, B)$ – *полностью усреднённой*, псевдометрику $d_{z3p}(A, B)$ – *локально усреднённой*, квазиметрику $d_{z4p}(A, B)$ – *усреднённой*. Полностью усреднённая псевдометрика $d_{z2p}(A, B)$ характеризует близость двух мультимножеств A и B , отнесённую к расстоянию, максимально возможному в исходном пространстве. Локально усреднённая псевдометрика $d_{z3p}(A, B)$ характеризует близость двух мультимножеств A и B , отнесённую к совместной «общей части» этих двух мультимножеств в исходном пространстве. Усреднённая квазиметрика $d_{z4p}(A, B)$ характеризует близость двух мультимножеств A и B , отнесённую к максимально возможной «общей части» этих двух мультимножеств в исходном пространстве.

Основная псевдометрика $d_{z1p}(A, B)=[m(A \Delta B)]^{1/p}$ и полностью усреднённая псевдометрика $d_{z2p}(A, B)=[m(A \Delta B)/m(Z)]^{1/p}$ являются непрерывными, равномерно непрерывными и равностепенно непрерывными функциями, а локально усреднённая псевдометрика $d_{z3p}(A, B)=[m(A \Delta B)/m(A \cup B)]^{1/p}$ и усреднённая квазиметрика $d_{z4p}(A, B)=[m(A \Delta B)/m(A+B)]^{1/p}$ – кусочно непрерывной функцией своих переменных почти всюду на соответствующем метрическом пространстве при любом числе p [6, 7]. Псевдометрики $d_{zqp}(A, B)$, $q=1,2,3$ и квазиметрики $d_{z4p}(A, B)$ не похожи ни на какие метрики других метрических пространств, в частности, на метрики типа Минковского (11),

(15). При $w_i=1$ для всех i в формуле (6) основная псевдометрика $d_{z11}(A, B)=|A \Delta B|$ совпадает с метриками (9), (13) типа Хемминга.

Метрические пространства мультимножеств обладают следующими свойствами [6, 7]. Пространства P_p , P_∞ конечных мультимножеств метрически выпуклы, l_p^n - и l_p -вложимы, всюду плотны, сепарабельны, неполны, некомпактны, но относительно компактны. Пространства S_p , S_∞ ограниченных мультимножеств метрически выпуклы, сепарабельны, полны, некомпактны, но локально компактны. Пространства $Z_{1p}=(S_\sigma(Z), d_{z1p})$, $Z_{2p}=(S_\sigma(Z), d_{z2p})$ измеримых мультимножеств гомеоморфны, полны, сепарабельны. Пространства $Z_{11}=(S_\sigma(Z), d_{z11})$, $Z_{21}=(S_\sigma(Z), d_{z21})$, $Z_{31}=(S_\sigma(Z), d_{z31})$ измеримых мультимножеств метрически выпуклы, и, кроме того, пространства Z_{11} и Z_{21} – изометричны пространству ограниченных числовых последовательностей l_1 .

При замене функции кратности $k_A(x)$ на характеристическую функцию $\chi_A(x)$ метрические пространства измеримых мультимножеств превращаются в метрические пространства измеримых множеств, которые обладают многими аналогичными свойствами. Основная метрика $d_{x11}(A, B)=m(A \Delta B)$ или $d_{x11}(A, B)=|A \Delta B|$ называется расстоянием Фреше-Никодима-Ароншяна или метрикой меры. Локально усреднённая метрика $d_{x31}(A, B)=m(A \Delta B)/m(A \cup B)$ называется расстоянием Штейнхауса, а $d_{x31}(A, B)=|A \Delta B|/|A \cup B|$ – биотопическим расстоянием [1-3]. Пространства измеримых множеств и мультимножеств с метриками вида (17)-(20) впервые введены в работах автора [8-10].

4. Представление и сопоставление многопризнаковых объектов

Обсудим возможные способы представления и сопоставления объектов, которые присутствуют в нескольких отличающихся экземплярах (версиях, копиях) и описываются многими количественными и качественными признаками [12, 15].

Рассмотрим сначала ситуацию, когда имеющиеся объекты $A_1, \dots, A_m$ имеются в единственных экземплярах и характеризуются признаками $K_1, \dots, K_n$ с числовыми и/или вербальными шкалами оценок $X_l=\{x_l^1, \dots, x_l^h\}$, $l=1, \dots, n$. Тради-

ционно каждому объекту A_i , $i=1, \dots, m$ сопоставляется вектор или кортеж $x_i = (x_{i1}^{e_1}, \dots, x_{in}^{e_n})$, $x_{il}^{e_l}$ — одна из градаций на шкале X_l признака K_l . Вектор/кортеж x_i является точкой n -мерного пространства $X = X_1 \times \dots \times X_n$, образованного шкалами оценок признаков $K_1, \dots, K_n$. Совокупность многопризнаковых объектов $A_1, \dots, A_m$ и их признаки можно также представить таблицей «Объекты-Признаки» $F = \|x_{il}\|_{m \times n}$. Строки матрицы F соответствуют объектам, колонки — признакам, а элементами x_{il} матрицы служат значения компонент $x_{il}^{e_l}$ векторов/кортежей, задающих объекты.

Ситуация существенным образом усложняется, когда один и тот же многопризнаковый объект A_i , $i=1, \dots, m$ присутствует в нескольких экземплярах (версиях, копиях), $A_i^{<s>}$, $s=1, \dots, t$, которые различаются значениями признаков $K_1, \dots, K_n$. В таких случаях объекту A_i будет соответствовать уже не один вектор/кортеж, а группа из t векторов/кортежей $\{x_i^{<1>}, \dots, x_i^{<t>}\}$. Здесь вектор/кортеж $x_i^{<s>} = (x_{i1}^{<s>}, \dots, x_{in}^{<s>})$ описывает одну из версий $A_i^{<s>}$ объекта A_i , а компонента $x_{il}^{<s>} = K_l(A_i^{<s>})$ является значением признака K_l в s -ой версии $A_i^{<s>}$ объекта A_i , которое равно x_l^j , $j=1, \dots, h$, если все признаки $K_1, \dots, K_n$ имеют одинаковую шкалу оценок $X = \{x^1, \dots, x^h\}$, или $x_{il}^{e_l}$, $e_l=1, \dots, h_l$, если признаки $K_1, \dots, K_n$ имеют свои шкалы оценок $X_l = \{x_l^1, \dots, x_l^{h_l}\}$, $l=1, \dots, n$.

Совокупность объектов $A_1, \dots, A_m$, каждый из которых существует в нескольких версиях $A_i^{<s>}$, и их признаков снова можно представить таблицей «Объекты-Признаки» $F^\# = \|x_{il}^{<s>}\|_{m \times n}$, но имеющей большую размерность. Число строк матрицы $F^\#$ равно числу всех версий объектов, число столбцов равно числу признаков, а элементами $x_{il}^{<s>}$ матрицы служат значения компонент $x_{il}^{<s>}$ векторов/кортежей, задающих разные версии объектов.

Объект A_i представляется теперь в n -мерном пространстве признаков $X = X_1 \times \dots \times X_n$ не одной единственной точкой x_i , а целой группой («облаком»), состоящим из t точек $\{x_i^{<1>}, \dots, x_i^{<t>}\}$. Важно отметить, что группа векторов/кортежей $x_i^{<1>}, \dots, x_i^{<t>}$, представляющих объект A_i , должна рассматриваться как единое целое. При этом, вообще говоря, индивидуальные значения признаков разных версий объекта A_i (оценки разных экспертов, характеристики, измеренные разными способами или инструментами) могут быть и похожими, и различающимися, и даже противоречивыми, что в свою очередь может

приводить к несравнимости векторов/кортежей, представляющих один и тот же объект A_i .

Совокупность таких многопризнаковых объектов $A_1, \dots, A_m$, каждый из которых изображается в пространстве признаков $X = X_1 \times \dots \times X_n$ своим «облаком», состоящим из t различных точек, может иметь достаточно сложную структуру, которую трудно анализировать. Поэтому весьма желательно тем или иным образом упростить описание и агрегировать представление подобных многопризнаковых объектов.

Один из возможных подходов к упрощению описания многопризнакового объекта A_i , представленного группой векторов $x_i^{<1>}, \dots, x_i^{<t>}$, состоит в следующем. Поскольку компоненты любого вектора $x_{il}^{<s>} = K_l(A_i^{<s>})$ суть числовые величины, в пространстве признаков $X = X_1 \times \dots \times X_n$ вместо группы векторов можно задать единственный вектор $x_i^{<усл>} = (x_{i1}^{<усл>}, \dots, x_{in}^{<усл>})$, который будет соответствовать объекту A_i . Компоненты вектора $x_i^{<усл>}$ определяются из неких дополнительных содержательных соображений или формальных условий. Например, это может быть вектор, который является центром группы, вектор, наиболее близкий ко всем векторам в группе, или вектор с усредненными или взвешенными значениями компонент векторов в группе.

Однако когда шкалы признаков имеют дискретные числовые оценки, «усредненный» вектор может физически и не существовать в исходном n -мерном признаковом пространстве $X = X_1 \times \dots \times X_n$, так как на шкалах отсутствуют соответствующие числовые градации. Чтобы можно было оперировать с такими векторами, нужно либо расширить исходные шкалы оценок, введя промежуточные числовые градации, либо считать шкалы оценок непрерывными. И то, и другое, строго говоря, изменяет первоначальную формулировку задачи выбора. Когда же объекты представлены кортежами с символическими, вербальными или смешанными значениями компонент, группу подобных кортежей даже в принципе нельзя заменить одним кортежем с усредненными, взвешенными, смешанными оценками, поскольку такие операции математически неосуществимы.

Если группа состоит всего из двух векторов/кортежей, то нельзя ввести в качестве типичного представителя группы какой-то единственный объект, например, наиболее близкий ко всем объектам группы. Это справедливо как для числовых, так и символических шкал оценок.

Такие и другие аналогичные трудности можно преодолеть, если воспользоваться формализмом теории мультимножеств, который позволяет одновременно учесть разнородные признаки, возможные комбинации значений признаков, наличие различающихся версий объектов.

Пусть все признаки $K_1, \dots, K_n$ имеют одинаковую шкалу оценок $X = \{x^1, \dots, x^h\}$. Выберем множество X в качестве порождающего множества и сопоставим каждому объекту $A_i, i=1, \dots, m$ мультимножество вида (1)

$$A_i = \{k_{A_i}(x^1) \circ x^1, \dots, k_{A_i}(x^h) \circ x^h\} \quad (21)$$

над множеством $X = \{x^1, \dots, x^h\}$. Здесь значение функции кратности $k_{A_i}(x^j)$ показывает, сколько раз оценка $x^j, j=1, \dots, h$ присутствует в описании объекта A_i . В таком случае совокупность объектов $A_1, \dots, A_m$ и их признаков можно представить таблицей «Объекты-Признаки» $G = \|k_{ij}\|_{m \times h}$. Строки матрицы G соответствуют объектам, колонки – значениям шкалы X признаков, а элементы k_{ij} – значениям кратности $k_{A_i}(x^j)$ элементов x^j мультимножеств, задающих объекты.

Пусть теперь каждый признак K_l имеет свою собственную шкалу оценок $X_l = \{x_l^1, \dots, x_l^{h_l}\}, l=1, \dots, n$. Введём единую шкалу (гипершкалу) признаков – множество $X = X_1 \cup \dots \cup X_n = \{x_1^1, \dots, x_1^{h_1}; \dots; x_n^1, \dots, x_n^{h_n}\}$, которое состоит из n групп признаков и объединяет все градации оценок на шкалах всех признаков. Тогда каждому объекту A_i будет соответствовать мультимножество

$$A_i = \{k_{A_i}(x_1^1) \circ x_1^1, \dots, k_{A_i}(x_1^{h_1}) \circ x_1^{h_1}; \dots; k_{A_i}(x_n^1) \circ x_n^1, \dots, k_{A_i}(x_n^{h_n}) \circ x_n^{h_n}\} \quad (22)$$

над множеством $X = \{x_1^1, \dots, x_1^{h_1}; \dots; x_n^1, \dots, x_n^{h_n}\}$ градаций шкал критериев. Здесь значение функции кратности $k_{A_i}(x_l^{e_l})$ показывает, сколько раз оценка $x_l^{e_l} \in X_l, e_l=1, \dots, h_l$ по признаку K_l присутствует в описании объекта A_i .

Несмотря на кажущуюся громоздкость представления многопризнаковых объектов с помощью мультимножеств, подобные формы записи крайне удобны при сравнении объектов и выполнении операций, поскольку вычисления выполняются параллельно и одновременно по всем элементам всех мультимножеств. Заметим, что выражение (22) легко записать и в «обычном» виде (21), если во множестве $X = \{x_1^1, \dots, x_1^{h_1}; \dots; x_n^1, \dots, x_n^{h_n}\}$ сделать замену переменных: $x_1^1 = x^1, \dots, x_1^{h_1} = x^{h_1}, x_2^1 = x^{h_1+1}, \dots, x_2^{h_2} = x^{h_1+h_2}, \dots, x_n^{h_n} = x^h, h=h_1+\dots+h_n$.

Совокупность объектов $A_1, \dots, A_m$ и значений их признаков, представленные мультимножествами вида (22), можно задать иной таблицей «Объекты-Признаки» $H = \|k_{ij}\|_{m \times h}, h=h_1+\dots+h_n$. Строки матрицы H соответствуют объектам, колонки – значениям шкал X_l признаков, а элементы k_{ij} – значениям кратности $k_{A_i}(x_l^{e_l})$ элементов $x_l^{e_l}$ мультимножеств, задающих объекты.

Разнообразие операций над мультимножествами предоставляет возможность группировать многопризнаковые объекты разными способами. Общепринято объединять объекты в группы, используя операцию сложения векторов или объединения множеств. В случае мультимножеств группу D_f объектов можно сформировать как сумму $C_f = \sum_i A_i, k_{C_f}(x^j) = \sum_i k_{A_i}(x^j)$, объединение $C_f = \bigcup_i A_i, k_{C_f}(x^j) = \max_i k_{A_i}(x^j)$, пересечение $C_f = \bigcap_i A_i, k_{C_f}(x^j) = \min_i k_{A_i}(x^j)$ или как линейную комбинацию $C_f = \sum_i b_i \bullet A_i, C_f = \bigcup_i b_i \bullet A_i, C_f = \bigcap_i b_i \bullet A_i$ мультимножеств, задающих рассматриваемые объекты. Когда группа D_f образуется путём сложения мультимножеств, агрегируются все свойства (все значения всех признаков) всех членов группы. При объединении или пересечении мультимножеств происходит усиление самых лучших свойств (максимальных значений всех признаков) или соответственно самых худших свойств (минимальных значений всех признаков), имеющихся у отдельных членов группы.

Поставим в соответствие каждой версии $A_i^{<s>}, i=1, \dots, m, s=1, \dots, t$ многопризнакового объекта A_i мультимножество $A_i^{<s>} = \{k_{A_i}^{<s>}(x^1) \circ x^1, \dots, k_{A_i}^{<s>}(x^h) \circ x^h\}$, а каждому объекту A_i – мультимножество $A_i = \{k_{A_i}(x^1) \circ x^1, \dots, k_{A_i}(x^h) \circ x^h\}$ над множеством оценок $X = \{x^1, \dots, x^h\}$ или $X = X_1 \cup \dots \cup X_n = \{x_1^1, \dots, x_1^{h_1}; \dots; x_n^1, \dots, x_n^{h_n}\}$. Мультимножество A_i , представляющее объект A_i в целом, сформируем с помощью взвешенного сложения мультимножеств, описывающих версии этого объекта: $A_i = c^{<1>} A_i^{<1>} + \dots + c^{<t>} A_i^{<t>}$, где функция кратности вычисляется по правилу $k_{A_i}(x^j) = \sum_s c^{<s>} k_{A_i}^{<s>}(x^j), j=1, \dots, h$. $c^{<s>}$ характеризует значимость s -ой версии (компетентность эксперта, точность измерения), значения которой обычно нормируются $\sum_s c^{<s>} = 1$.

Объекты $A_1, \dots, A_m$, каждый из которых существует в нескольких версиях, а значения их признаков представлены мультимножествами вида

(21) или (22), можно задать таблицами «Объекты-Признаки» $G^{\#}=\|k_{ij}\|_{lm \times h}$, $H^{\#}=\|k_{ij}\|_{lm \times h}$ или $H=\|k_{ij}\|_{m \times h}$, $h=h_1+\dots+h_n$. Элементами k_{ij} матриц $G^{\#}$, $H^{\#}$ или H являются значения кратности $k_{Ai}^{<s>}(x^i)$, $k_{Ai}^{<s>}(x_i^{e_i})$ или $k_{Ai}(x_i^{e_i})$ элементов мультимножеств, описывающих соответствующие версии $A_i^{<s>}$ объектов A_i или сами объекты A_i .

5. Иллюстративный пример

Имеется совокупность A , состоящая из 10 объектов $A_1, \dots, A_{10}$, описываемых 8 признаками $K_1, \dots, K_8$, каждый из которых принимает одно из значений по пятибалльной шкале оценок $X=\{x^1, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ [15]. К примеру, объектами $A_1, \dots, A_{10}$ являются вопросы анкеты для изучения общественного мнения по некоторой проблеме. Тогда признаки объектов – это ответы 8 респондентов $K_1, \dots, K_8$, которые кодируются так: x^1 – 1/полностью не согласен, x^2 – 2/не согласен, x^3 – 3/нейтрален, x^4 – 4/согласен, x^5 – 5/полностью согласен. Или объекты $A_1, \dots, A_{10}$ суть школьники, а признаками объектов служат их годовые оценки по 8 предметам: K_1 . Математика, K_2 . Физика, K_3 . Химия, K_4 . Биология, K_5 . География, K_6 . История, K_7 . Литература, K_8 . Иностранный язык. Градации оценок означают следующее: x^1 – 1/очень плохо, x^2 – 2/плохо, x^3 – 3/удовлетворительно, x^4 – 4/хорошо, x^5 – 5/отлично.

Ответы студентов университета, оценивавших курс лекций с помощью числовых оценок, характеризует Табл. 1 «Объекты-Признаки» F , заимствованная из работы [5]. Эти же результаты опроса студентов или оценки успеваемости учащихся, записанные как мультимножества числовых или вербальных оценок, представлены Табл. 2 «Объекты-Признаки» G . Например,

Табл. 1. Таблица данных F

$A \backslash K$	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8
A_1	4	5	4	5	4	5	4	5
A_2	4	1	2	1	3	2	2	2
A_3	1	1	3	1	4	1	1	4
A_4	5	3	2	4	4	5	4	5
A_5	4	4	4	4	4	5	4	4
A_6	5	5	4	4	4	5	5	4
A_7	4	1	2	3	3	3	1	2
A_8	4	5	4	2	3	4	5	3
A_9	3	2	3	1	3	3	2	2
A_{10}	5	5	4	5	3	5	5	4

в Табл. 1 ответы 8 студентов на вопрос A_1 задаёт вектор/кортеж оценок $x_1=(4,5,4,5,4,5,4,5)$, а в Табл. 2 – мультимножество оценок вида (21): $A_1=\{0 \circ x^1, 0 \circ x^2, 0 \circ x^3, 4 \circ x^4, 4 \circ x^5\}$. Последняя форма записи показывает, что объект A_1 имеет 4 оценки x^4 , означающие «согласен» или «хорошо», 4 оценки x^5 , означающие «полностью согласен» или «отлично», других оценок у объекта A_1 нет. Если объект A_1 характеризуется оценками по каждому из признаков $K_1, \dots, K_8$ с различными шкалами, то A_1 представляется мультимножеством вида (22):

$$A_1=\{0 \circ x_1^1, 0 \circ x_1^2, 0 \circ x_1^3, 1 \circ x_1^4, 0 \circ x_1^5; \\ 0 \circ x_2^1, 0 \circ x_2^2, 0 \circ x_2^3, 0 \circ x_2^4, 1 \circ x_2^5; \\ 0 \circ x_3^1, 0 \circ x_3^2, 0 \circ x_3^3, 1 \circ x_3^4, 0 \circ x_3^5; \\ 0 \circ x_4^1, 0 \circ x_4^2, 0 \circ x_4^3, 0 \circ x_4^4, 1 \circ x_4^5; \\ 0 \circ x_5^1, 0 \circ x_5^2, 0 \circ x_5^3, 1 \circ x_5^4, 0 \circ x_5^5; \\ 0 \circ x_6^1, 0 \circ x_6^2, 0 \circ x_6^3, 0 \circ x_6^4, 1 \circ x_6^5; \\ 0 \circ x_7^1, 0 \circ x_7^2, 0 \circ x_7^3, 1 \circ x_7^4, 0 \circ x_7^5; \\ 0 \circ x_8^1, 0 \circ x_8^2, 0 \circ x_8^3, 0 \circ x_8^4, 1 \circ x_8^5\}.$$

Пусть теперь каждый объект присутствует в нескольких экземплярах (версиях, копиях), различающихся между собой. К примеру, 8 респондентов $K_1, \dots, K_8$, отвечая на одни и те же вопросы $A_1, \dots, A_{10}$, опрашивались дважды. Или школьники $A_1, \dots, A_{10}$ получали по тем же самым 8 дисциплинам $K_1, \dots, K_8$ оценки за каждое полугодие (семестр), т.е. два раза в год. Тем самым каждый объект будет задаваться уже не одним, а двумя векторами/кортежами признаков, или двумя мультимножествами. Формально можно считать, что используемый способ описания версии объекта есть выражение индивидуального мнения некоего эксперта, а описание объекта «в целом» есть агрегированное коллективное суждение двух экспертов.

Табл. 2. Таблица данных G

$A \backslash X$	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5
A_1	0	0	0	4	4
A_2	2	4	1	1	0
A_3	5	0	1	2	0
A_4	0	1	1	3	3
A_5	0	0	0	7	1
A_6	0	0	0	4	4
A_7	2	2	3	1	0
A_8	0	1	2	3	2
A_9	1	3	4	0	0
A_{10}	0	0	1	2	5

Различающиеся версии объектов заданы соответственно Табл. 3 и Табл. 4 «Объекты-Признаки» $F^\#$ и $G^\#$. В Табл. 3 объект A_1 представлен группой из двух векторов/кортежей $x_1^{<1>} = (4, 5, 4, 5, 4, 5, 4, 5)$ и $x_1^{<2>} = (5, 5, 5, 5, 4, 4, 4, 5)$. Агрегированные оценки объекта A_1 при их усреднении будут описываться вектором $x_1^{\text{сред}} = (4.5, 5.0, 4.5, 5.0, 4.0, 4.5, 4.0, 5.0)$ «средних» оценок, хотя нецелые числа отсутствуют в установленной пятибалльной шкале $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Две версии объекта A_1 представлены в таблице 4 мультимножествами оценок вида (21) $A_1^{<1>} = \{0 \circ x^1, 0 \circ x^2, 0 \circ x^3, 4 \circ x^4, 4 \circ x^5\}$ и $A_1^{<2>} = \{0 \circ x^1, 0 \circ x^2, 0 \circ x^3, 3 \circ x^4, 5 \circ x^5\}$. Для простоты будем считать респондентов одинаково компетентными или полугодовые оценки одинаково значимыми: $c^{<1>} = c^{<2>} = 1$. Тогда объект A_1 «в целом» описывается мультимножеством

$$A_1 = A_1^{<1>} + A_1^{<2>} = \{0 \circ x^1, 0 \circ x^2, 0 \circ x^3, 7 \circ x^4, 9 \circ x^5\}.$$

Аналогично объекты A_2, A_4, A_6, A_7, A_8 задаются мультимножествами

$$\begin{aligned} A_2 &= A_2^{<1>} + A_2^{<2>} = \{4 \circ x^1, 6 \circ x^2, 4 \circ x^3, 2 \circ x^4, 0 \circ x^5\}, \\ A_4 &= A_4^{<1>} + A_4^{<2>} = \{0 \circ x^1, 1 \circ x^2, 3 \circ x^3, 7 \circ x^4, 5 \circ x^5\}, \\ A_6 &= A_6^{<1>} + A_6^{<2>} = \{0 \circ x^1, 0 \circ x^2, 0 \circ x^3, 9 \circ x^4, 7 \circ x^5\}, \\ A_7 &= A_7^{<1>} + A_7^{<2>} = \{3 \circ x^1, 5 \circ x^2, 5 \circ x^3, 3 \circ x^4, 0 \circ x^5\}, \\ A_8 &= A_8^{<1>} + A_8^{<2>} = \{0 \circ x^1, 1 \circ x^2, 3 \circ x^3, 7 \circ x^4, 5 \circ x^5\}. \end{aligned}$$

В Табл. 5 «Объекты-Признаки» H приведены объекты $A_1, \dots, A_{10}$ «в целом» и значения их признаков, заданные мультимножествами вида (22). Так, например, объекту A_1 соответствует мультимножество оценок:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{0 \circ x_1^1, 0 \circ x_1^2, 0 \circ x_1^3, 1 \circ x_1^4, 1 \circ x_1^5, \\ &0 \circ x_2^1, 0 \circ x_2^2, 0 \circ x_2^3, 0 \circ x_2^4, 2 \circ x_2^5, \\ &0 \circ x_3^1, 0 \circ x_3^2, 0 \circ x_3^3, 1 \circ x_3^4, 1 \circ x_3^5, \\ &0 \circ x_4^1, 0 \circ x_4^2, 0 \circ x_4^3, 0 \circ x_4^4, 2 \circ x_4^5, \\ &0 \circ x_5^1, 0 \circ x_5^2, 0 \circ x_5^3, 2 \circ x_5^4, 0 \circ x_5^5, \\ &0 \circ x_6^1, 0 \circ x_6^2, 0 \circ x_6^3, 1 \circ x_6^4, 1 \circ x_6^5, \\ &0 \circ x_7^1, 0 \circ x_7^2, 0 \circ x_7^3, 2 \circ x_7^4, 0 \circ x_7^5, \\ &0 \circ x_8^1, 0 \circ x_8^2, 0 \circ x_8^3, 0 \circ x_8^4, 2 \circ x_8^5\}. \end{aligned}$$

Таблица «Объекты-Признаки» $H^\#$, представляющая отдельные версии объектов и их при-

Табл. 3. Таблица данных $F^\#$

A \ K	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8
A_1	4	5	4	5	4	5	4	5
	5	5	5	5	4	4	4	5
A_2	4	1	2	1	3	2	2	2
	3	2	1	1	4	3	3	2
A_3	1	1	3	1	4	1	1	4
	1	2	3	1	5	2	1	3
A_4	5	3	2	4	4	5	4	5
	4	4	3	5	4	5	3	4
A_5	4	4	4	4	4	5	4	4
	5	5	3	4	4	4	5	4
A_6	5	5	4	4	4	5	5	4
	4	5	4	4	4	4	5	5
A_7	4	1	2	3	3	3	1	2
	3	2	1	4	2	4	2	3
A_8	4	5	4	2	3	4	5	3
	5	4	5	3	4	5	4	4
A_9	3	2	3	1	3	3	2	2
	4	3	2	2	2	3	3	2
A_{10}	5	5	4	5	3	5	5	4
	3	4	3	4	2	4	2	4

Табл. 4. Таблица данных $G^\#$

A \ X	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5
A_1	0	0	0	4	4
	0	0	0	3	5
A_2	2	4	1	1	0
	2	2	3	1	0
A_3	5	0	1	2	0
	3	2	2	0	1
A_4	0	1	1	3	3
	0	0	2	4	2
A_5	0	0	0	7	1
	0	0	1	4	3
A_6	0	0	0	4	4
	0	0	0	5	3
A_7	2	2	3	1	0
	1	3	2	2	0
A_8	0	1	2	3	2
	0	0	1	4	3
A_9	1	3	4	0	0
	0	4	3	1	0
A_{10}	0	0	1	2	5
	0	2	2	4	0

Табл. 5. Таблица данных H

A \ X	$x_1^1 x_1^2 x_1^3 x_1^4 x_1^5$	$x_2^1 x_2^2 x_2^3 x_2^4 x_2^5$	$x_3^1 x_3^2 x_3^3 x_3^4 x_3^5$	$x_4^1 x_4^2 x_4^3 x_4^4 x_4^5$	$x_5^1 x_5^2 x_5^3 x_5^4 x_5^5$	$x_6^1 x_6^2 x_6^3 x_6^4 x_6^5$	$x_7^1 x_7^2 x_7^3 x_7^4 x_7^5$	$x_8^1 x_8^2 x_8^3 x_8^4 x_8^5$
A_1	0 0 0 1 1	0 0 0 0 2	0 0 0 1 1	0 0 0 0 2	0 0 0 2 0	0 0 0 1 1	0 0 0 2 0	0 0 0 0 2
A_2	0 0 1 1 0	1 1 0 0 0	1 1 0 0 0	2 0 0 0 0	0 0 1 1 0	0 1 1 0 0	0 1 1 0 0	0 2 0 0 0
A_3	2 0 0 0 0	1 1 0 0 0	0 0 2 0 0	2 0 0 0 0	0 0 0 1 1	1 1 0 0 0	2 0 0 0 0	0 0 1 1 0
A_4	0 0 0 1 1	0 0 1 1 0	0 1 1 0 0	0 0 0 1 1	0 0 0 2 0	0 0 0 0 2	0 0 1 1 0	0 0 0 1 1
A_5	0 0 0 1 1	0 0 0 1 1	0 0 1 1 0	0 0 0 2 0	0 0 0 2 0	0 0 0 1 1	0 0 0 1 1	0 0 0 2 0
A_6	0 0 0 1 1	0 0 0 0 2	0 0 0 2 0	0 0 0 2 0	0 0 0 2 0	0 0 0 1 1	0 0 0 0 2	0 0 0 1 1
A_7	0 0 1 1 0	1 1 0 0 0	1 1 0 0 0	0 0 1 1 0	0 1 1 0 0	0 0 1 1 0	1 1 0 0 0	0 1 1 0 0
A_8	0 0 0 1 1	0 0 0 1 1	0 0 0 1 1	0 1 1 0 0	0 0 1 1 0	0 0 0 1 1	0 0 0 1 1	0 0 1 1 0
A_9	0 0 1 1 0	0 1 1 0 0	0 1 1 0 0	1 1 0 0 0	0 1 1 0 0	0 0 2 0 0	0 1 1 0 0	0 0 2 0 0
A_{10}	0 0 1 0 1	0 0 0 1 1	0 0 1 1 0	0 0 0 1 1	0 1 1 0 0	0 0 0 1 1	0 1 0 0 1	0 0 0 2 0

знаки, достаточно громоздка и для краткости не приводится.

Близость объектов в пространстве признаков характеризуется либо их различием, либо сходством их свойств. Будем считать многопризнаковый объект A_i , представленный мультимножеством A_i , точкой метрического пространства мультимножеств (A, d) , $A = \{A_1, \dots, A_m\}$, d – одна из метрик (9)–(20). В практических задачах различие между объектами A_i и A_j удобно оценивать одной из метрик (17)–(20), которые запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} d_{Z1p}(A_i, A_j) &= [S_{ij}]^{1/p}, \quad d_{Z2p}(A_i, A_j) = [S_{ij}/W]^{1/p}, \\ d_{Z3p}(A_i, A_j) &= [S_{ij}/M_{ij}]^{1/p}, \quad d_{Z4p}(A_i, A_j) = [S_{ij}/N_{ij}]^{1/p}. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь $S_{ij} = m(A \Delta B) = \sum_{l=1}^n w_l |k_{A_i}(x^l) - k_{A_j}(x^l)| =$

$$\begin{aligned} &= \sum_{l=1}^n w_l \sum_{e=1}^{h_l} |k_{A_i}(x_l^{e_l}) - k_{A_j}(x_l^{e_l})|; \\ L_{ij} &= m(A \cap B) = \sum_{l=1}^n w_l \min[k_{A_i}(x^l), k_{A_j}(x^l)] = \\ &= \sum_{l=1}^n w_l \sum_{e=1}^{h_l} \min[k_{A_i}(x_l^{e_l}), k_{A_j}(x_l^{e_l})]; \\ M_{ij} &= m(A \cup B) = \sum_{l=1}^n w_l \max[k_{A_i}(x^l), k_{A_j}(x^l)] = \\ &= \sum_{l=1}^n w_l \sum_{e=1}^{h_l} \max[k_{A_i}(x_l^{e_l}), k_{A_j}(x_l^{e_l})]; \\ N_{ij} &= m(A + B) = \sum_{l=1}^n w_l [k_{A_i}(x^l) + k_{A_j}(x^l)] = \\ &= \sum_{l=1}^n w_l \sum_{e=1}^{h_l} [k_{A_i}(x_l^{e_l}) + k_{A_j}(x_l^{e_l})]; \\ W &= m(Z) = \sum_{l=1}^n w_l \max_{A \in A} k_A(x^l) = \\ &= \sum_{l=1}^n w_l \sum_{e=1}^{h_l} \max_{A \in A} k_A(x_l^{e_l}). \end{aligned}$$

Мера мультимножества задана как линейная комбинация (6) функций кратности: $m(A) = \sum_{l=1}^n w_l k_A(x^l) = \sum_{l=1}^n w_l \sum_{e=1}^{h_l} k_A(x_l^{e_l})$, где $w_l > 0$ – значимость (вес) элемента x_l или, что то же, признака K_l , $l=1, \dots, n$. Для величин L_{ij} , M_{ij} , N_{ij} , S_{ij} выполняются соотношения $N_{ij} = M_{ij} + L_{ij}$, $S_{ij} = M_{ij} - L_{ij}$.

Сходство между объектами можно выразить одним из следующих показателей:

$$\begin{aligned} s_0(A_i, A_j) &= L_{ij}; \quad s_1(A_i, A_j) = L_{ij}/W; \\ s_2(A_i, A_j) &= 1 - d_{21}(A_i, A_j) = 1 - (S_{ij}/W); \\ s_3(A_i, A_j) &= 1 - d_{31}(A_i, A_j) = L_{ij}/M_{ij}; \\ s_4(A_i, A_j) &= 1 - d_{41}(A_i, A_j) = 2L_{ij}/N_{ij}. \end{aligned} \quad (24)$$

Выражения s_0 , s_1 , s_2 , s_3 , s_4 (24) обобщают на случай мультимножеств известные неметрические показатели (индексы) сходства объектов, такие соответственно как мера абсолютного сходства, мера сходства Рассела-Рао, коэффициент простой согласованности, коэффициент Жаккара или мера Роджерса-Танимото, индекс Сёрнсена [4, 18].

В рассматриваемом примере самыми близкими в пространстве мультимножеств (A, d_{11}) являются объекты A_4 и A_8 , находящиеся на расстоянии

$$d_{11}(A_4, A_8) = |0-0| + |0-0| + |0-0| + |0-0| + |0-0| = 0.$$

Группе D_{01} , включающей объекты A_4 и A_8 , соответствует мультимножество C_{01} , сформированное путём сложения мультимножеств:

$$\begin{aligned} C_{01} &= A_4 + A_8 = \{0 \circ x^1, 1 \circ x^2, 3 \circ x^3, 7 \circ x^4, 5 \circ x^5\} + \\ &+ \{0 \circ x^1, 1 \circ x^2, 3 \circ x^3, 7 \circ x^4, 5 \circ x^5\} = \\ &= \{0 \circ x_1, 2 \circ x_2, 6 \circ x_3, 14 \circ x_4, 10 \circ x_5\}. \end{aligned}$$

Две пары объектов A_1 и A_6 , A_2 и A_7 находятся на одинаковых расстояниях:

$$d_{11}(A_1, A_6) = |0-0| + |0-0| + |0-0| + |7-9| + |9-7| = 4,$$

$$d_{11}(A_2, A_7) = |4-3| + |6-5| + |4-5| + |2-3| + |0-0| = 4.$$

Объекты A_1 и A_6 образуют группу D_{02} , представленную мультимножеством

$$\begin{aligned} C_{02} &= A_1 + A_6 = \{0 \circ x^1, 0 \circ x^2, 0 \circ x^3, 7 \circ x^4, 9 \circ x^5\} + \\ &+ \{0 \circ x^1, 0 \circ x^2, 0 \circ x^3, 9 \circ x^4, 7 \circ x^5\} = \\ &= \{0 \circ x^1, 0 \circ x^2, 0 \circ x^3, 16 \circ x^4, 16 \circ x^5\}, \end{aligned}$$

а объекты A_2 и A_7 – группу D_{03} , представленную мультимножеством

$$\begin{aligned} C_{03} &= A_2 + A_7 = \{4 \circ x^1, 6 \circ x^2, 4 \circ x^3, 2 \circ x^4, 0 \circ x^5\} + \\ &+ \{3 \circ x^1, 5 \circ x^2, 5 \circ x^3, 3 \circ x^4, 0 \circ x^5\} = \\ &= \{7 \circ x^1, 11 \circ x^2, 9 \circ x^3, 5 \circ x^4, 0 \circ x^5\}. \end{aligned}$$

Предложенные показатели различия (23) и сходства (24) между многопризнаковыми объектами были использованы в разработанных методах упорядочения АРАМИС (Агрегирование и Ранжирование Альтернатив около Многопризнаковых Идеальных Ситуаций), кластерного анализа КЛАВА-И (КЛастерный Анализ Вербальных Альтернатив – Иерархический) и КЛАВА-НИ (КЛастерный Анализ Вербальных Альтернатив – НеИерархический), классификации МАСКА (МногоАспектная Согласованная Классификация Альтернатив) объектов с несовпадающими значениями признаков [13, 15]. Примеры практического применения этих методов в задачах группового многокритериального принятия решений приведены в [14–17].

Заключение

В работе описаны новые классы пространств конечных, ограниченных и измеримых множеств и мультимножеств, новые виды метрик, которые могут найти свое применение при решении разнообразных задач классификации, сортировки, ранжирования многопризнаковых объектов. Представление многопризнаковых объектов с помощью мультимножеств и использование новых видов показателей близости объектов позволяют расширить круг рассматриваемых проблем, а также более просто находить решение известных задач.

Приложение

Убедимся, что функция $d_{Z4p}(A, B) = [m(A \Delta B) / m(A + B)]^{1/p}$, определённая на σ -алгебре $S_\sigma(Z)$ мультимножеств, является квазиметрикой (симметрикой почти всюду) на пространстве $(S_\sigma(Z), m)$ мультимножеств с сильно σ -аддитивной и вполне σ -конечной мерой.

Действительность и неотрицательность функции $d_{Z4p}(A, B)$ вытекает из определения меры m как действительной и неотрицательной функции мультимножества, заданной на σ -алгебре $S_\sigma(Z)$ мультимножеств. Аксиома симметрии (1^0) следует из коммутативности операций сложения $A + B = B + A$ и симметрической разности $A \Delta B = B \Delta A$ мультимножеств.

Покажем на примерах, что неравенство треугольника (3^0) может и выполняться, и не выполняться для функции $d_{Z4p}(A, B)$. При $C \subseteq A \cap B$ в силу свойства монотонности меры мультимножества имеем $m(C) \leq m(A \cap B) \leq m(A)$, $m(C) \leq m(A \cap B) \leq m(B)$. Тогда, учитывая доказанное в [6, 7] неравенство $m(A \Delta B) \leq m[(A \Delta C) + (B \Delta C)] = m(A \Delta C) + m(B \Delta C)$, получим:

$$m(A \Delta B) / m(A + B) \leq [m(A \Delta C) + m(B \Delta C)] / [m(A) + m(B)] \leq m(A \Delta C) / m(A + C) + m(B \Delta C) / m(B + C).$$

Поэтому

$$[d_{Z4p}(A, B)]^p = m(A \Delta B) / m(A + B) \leq m(A \Delta C) / m(A + C) + m(B \Delta C) / m(B + C) \leq [d_{Z4p}(A, C)]^p + [d_{Z4p}(B, C)]^p \leq [d_{Z4p}(A, C) + d_{Z4p}(B, C)]^p$$

и $d_{Z4p}(A, B) \leq d_{Z4p}(A, C) + d_{Z4p}(B, C)$.

С другой стороны, для произвольных мультимножеств A, B, C из формул (7)-(8) имеем

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B - A) = m(B) + m(A - B), \quad m(A \Delta B) = m(A - B) + m(B - A),$$

$$m(A \Delta (A \cup B)) = m(A \cup B) - m(A) = m(B - A), \quad m(B \Delta (A \cup B)) = m(A \cup B) - m(B) = m(A - B).$$

Тогда при $C = A \cup B$ с учётом неравенства $m(A \cap B) \leq m(A)$, $m(B) \leq m(A \cup B) \leq m(A + B)$, следующего из (8), получим:

$$\begin{aligned} [d_{Z4p}(A, B)]^p &= m(A \Delta B) / m(A + B) = m(B - A) / [m(A) + m(B)] + m(A - B) / [m(B) + m(A)] \geq \\ &\geq m(B - A) / [m(A) + m(B) + m(A - B)] + m(A - B) / [m(B) + m(A) + m(B - A)] = \\ &= m(A \Delta (A \cup B)) / [m(A) + m(A \cup B)] + m(B \Delta (A \cup B)) / [m(B) + m(A \cup B)] = \\ &= m(A \Delta C) / m(A + C) + m(B \Delta C) / m(B + C) = [d_{Z4p}(A, C)]^p + [d_{Z4p}(B, C)]^p. \end{aligned}$$

И может быть $d_{Z4p}(A, B) \geq d_{Z4p}(A, C) + d_{Z4p}(B, C)$.

По свойству идентичности симметрической разности мультимножеств $A \Delta B = \emptyset$ при $A = B$. Тогда $m(A \Delta B) = m(\emptyset) = 0$ и $d_{Z4p}(A, B) = 0$. В то же время из условия $m(A \Delta B) = 0$ в общем случае не следует равенство мультимножеств A и B . Тем самым для функции $d_{Z4p}(A, B)$ выполняется только условие совпадения (4^0). Вместе с тем для мультимножеств, отличающихся на мультимножество меры нуль, из условия $m(A \Delta B) = 0$ вытекает m -равенство мультимножеств A и B , а значит, будет справедлива и аксиома тождества (2^0). Таким образом, функция $d_{Z4p}(A, B)$ является квазиметрикой и почти всюду симметрикой на σ -алгебре $S_\sigma(Z)$ измеримых мультимножеств с сильно σ -аддитивной и вполне σ -конечной мерой.

Литература

1. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968.
3. Дега М.М., Лоран М. Геометрия разрезов и метрик. /Пер. с англ. – М.: МЦНМО, 2001.
4. Sneath P.H.A., Sokal R.R. Numerical Taxonomy. The Principles and Practice of Numerical Classification. – San Francisco: Freeman, 1973.
5. Hartigan J.A. Clustering Algorithms. – New York: Wiley, 1975.
6. Петровский А.Б. Пространства множеств и мультимножеств. – М.: Едиториал УРСС, 2003.
7. Петровский А.Б. Пространства измеримых множеств и мультимножеств. – М.: Поли Принт Сервис, 2016.

8. Петровский А.Б. О расстояниях между множествами, инвариантных относительно преобразований пространства. // I Всесоюзное совещание по статистическому и дискретному анализу нечисловой информации, экспертным оценкам и дискретной оптимизации. Тезисы докладов. – М.-Алма-Ата: Казахский государственный университет, Научный совет АН СССР по комплексной проблеме “Кибернетика”, ВСНТО, ВНИИСИ ГКНТ и АН СССР, 1981, С.50-51.
9. Petrovsky A.B. An axiomatic approach to metrization of multiset space. // G.H.Tzeng, H.F.Wang, U.P.Wen, P.L.Yu (Eds.). Multiple Criteria Decision Making. – New York: Springer-Verlag, 1994, P.129-140.
10. Петровский А.Б. Метрические пространства мультимножеств. // Доклады Академии наук. 1995, Т.344, №2, С.175-177.
11. Петровский А.Б. Комбинаторика мультимножеств. // Доклады Академии наук, 2000. Т.370, №6, С.750-753.
12. Петровский А.Б. Мультимножества как модель представления многопризнаковых объектов в принятии решений и распознавании образов. // Искусственный интеллект. 2002, №2, С.236-243.
13. Petrovsky A. Group verbal decision analysis. // F.Adam, P.Humphreys (Eds.). Encyclopedia of Decision Making and Decision Support Technologies. – Hershey, New York: IGI Global, 2008, V.1, P.418-425.
14. Petrovsky A. Multi-attribute classification of credit card-holders: Multiset approach. // International Journal of Management and Decision Making, 2006, V.7, N2/3, P.66-179.
15. Петровский А.Б. Методы групповой классификации многопризнаковых объектов. // Искусственный интеллект и принятие решений. 2009, №3, С.3-14 (часть 1); №4, С.3-14 (часть 2).
16. Petrovsky A. Group multiple criteria decision making: Multiset approach. // Recent Developments and New Directions in Soft Computing. Studies in Fuzziness and Soft-Computing, 317. – Switzerland, Springer International Publishing. 2014, P.19-33.
17. Петровский А.Б., Лобанов В.Н. Многокритериальный выбор в пространстве признаков большой размерности: мультиметодная технология ПАКС-М. // Искусственный интеллект и принятие решений. 2014, № 3, С.92-104.
18. Сёмкин Б.И., Двойченко В.И. Об эквивалентности мер сходства и различия. // Исследование систем. Т.1. Анализ сложных систем. – Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1973. С.95-104.
19. Kusters W.A., Laros J.F.J. Metrics for multisets. // M. Bramer, F.Coenen, M.Petridis (Eds.). Research and Development in Intelligent Systems XXIV, Proceedings of AI-2007. – Springer-Verlag London Limited. 2008. P.294-303.

Петровский Алексей Борисович. Заведующий лабораторией ИСА ФИЦ ИУ РАН; профессор НИУ «БелГУ» и БГТУ им. В.Г. Шухова. Окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1967 году. Доктор технических наук. Количество печатных работ: более 180, в том числе 5 монографий и 2 учебника. Области научных интересов: дискретная математика, теория мультимножеств, многокритериальный анализ решений, системы поддержки принятия решений, информационные технологии, системный анализ, научно-техническая политика, прогнозирование, планирование и организация научных исследований. E-mail: pab@isa.ru

Indicators of similarity and dissimilarity of multi-attribute objects in metric spaces of sets and multisets A.B. Petrovsky

The notions of similarity and dissimilarity (difference) of the analyzed objects play an important role in many theoretical and practical problems of decision making, artificial intelligence, pattern recognition, processing of heterogeneous information, and others. The similarity or dissimilarity of objects is usually estimated by their proximity in the attribute space. The paper considers new classes of metric spaces of the finite, bounded, measurable sets and multisets. Possibilities of using new types of metrics for evaluating the similarity or dissimilarity of multi-attribute objects that are present in several exemplars with differing values of attributes and are represented by multisets of attributes are shown.

Keywords: multi-attribute objects, similarity and dissimilarity of objects, multiset, metric spaces of sets and multisets, metrics, pseudometrics, quasi-metrics

References

1. Lyusternik L.A., Sobolev V.I. Elementy funktsional'nogo analiza. – М.: Nauka, 1965
2. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza. – М.: Nauka, 1968.
3. Deza M.M., Laurent M. Geometry of cuts and metrics. – Berlin, Springer-Verlag, 1997. (Deza M.M., Loran M. Geometriya razrezov i metrik. /Per. s angl. – М.: MTSNMO, 2001).
4. Sneath P.H.A., Sokal R.R. Numerical Taxonomy. The Principles and Practice of Numerical Classification. –San Francisco: Freeman, 1973.
5. Hartigan J.A. Clustering Algorithms. – New York: Wiley, 1975.
6. Petrovsky A.B. Prostranstva mnozhestv i mul'timnozhestv. – М.: Editorial URSS, 2003.
7. Petrovsky A.B. Prostranstva izmerimyykh mnozhestv i mul'timnozhestv. – М.: Poli Print Servis, 2016.

8. Petrovsky A.B. O rasstoyaniyakh mezhdru mnozhestvami, invariantnykh otnositel'no preobrazovaniy prostranstva. // I Vsesoyuznoye soveshchaniye po statisticheskoy i diskretnomu analizu nechisl'ovoy informatsii, ekspertnym otsenkam i diskretnoy optimizatsii. Tezisy dokladov. – M.-Alma-Ata: Kazakhskiy gosudarstvennyy universitet, Nauchnyy sovet AN SSSR po kompleksnoy probleme “Kibernetika”, VSNTU, VNIISI GKNT i AN SSSR, 1981, S.50-51.
9. Petrovsky A.B. An axiomatic approach to metrization of multiset space. // G.H.Tzeng, H.F.Wang, U.P.Wen, P.L.Yu (Eds.). Multiple Criteria Decision Making. – New York: Springer-Verlag, 1994, P.129-140.
10. Petrovsky A.B. Metricheskiye prostranstva mul'timnozhestv. // Doklady Akademii nauk. 1995, T.344, №2, S.175-177.
11. Petrovsky A.B. Kombinatorika mul'timnozhestv. // Doklady Akademii nauk, 2000. T.370, №6, S.750-753.
12. Petrovsky A.B. Mul'timnozhestva kak model' predstavleniya mnogopriznakovykh ob'yektov v prinyatii resheniy i raspoznavanii obrazov. // Iskusstvennyy intellekt. 2002, №2, S.236-243.
13. Petrovsky A. Group verbal decision analysis. // F.Adam, P.Humphreys (Eds.). Encyclopedia of Decision Making and Decision Support Technologies. – Hershey, New York: IGI Global, 2008, V.1, P.418-425.
14. Petrovsky A. Multi-attribute classification of credit cardholders: Multiset approach. // International Journal of Management and Decision Making, 2006, V.7, N2/3, P.66-179.
15. Petrovsky A.B. Metody gruppovoy klassifikatsii mnogopriznakovykh ob'yektov. // Iskusstvennyy intellekt i prinyatiye resheniy. 2009, №3, S.3-14 (chast' 1); №4, S.3-14 (chast' 2).
16. Petrovsky A. Group multiple criteria decision making: Multiset approach. // Recent Developments and New Directions in Soft Computing. Studies in Fuzziness and Soft-Computing, 317. – Switzerland, Springer International Publishing. 2014, P.19-33.
17. Petrovsky A.B., Lobanov V.N. Mnogokriterial'nyy vybor v prostranstve priznakov bol'shoy razmernosti: mul'timetodnaya tekhnologiya PAKS-M. // Iskusstvennyy intellekt i prinyatiye resheniy. 2014, № 3, S.92-104.
18. Syomkin B.I., Dvoychenkov V.I. Ob ekvivalentnosti mer skhodstva i razlichiya. // Issledovaniye sistem. T.1. Analiz slozhnykh sistem. – Vladivostok: DVNTS AN SSSR, 1973. S.95-104.
19. Kusters W.A., Laros J.F.J. Metrics for multisets. // M.Bramer, F.Coenen, M.Petridis (Eds.). Research and Development in Intelligent Systems XXIV, Proceedings of AI-2007. – Springer-Verlag London Limited. 2008. P.294-303.

Petrovsky Alexey B. The head of the Laboratory, Institute for Systems Analysis, Federal Research Center “Computer Sciences and Control”, Russian Academy of Sciences; Professor, National Research University “Belgorod State University” and V.G. Shukhov Belgorod State Technological University. Doctor of Technical Sciences, Professor. Graduated in 1967 from M.V. Lomonosov Moscow State University. The number of papers is more than 180 including 5 monographs and 2 text-books. Areas of research interests: discrete mathematics, theory of multisets, multiple criteria decision analysis, decision support systems, information technologies, science and technological policy, R&D forecasting, planning and management. E-mail: pab@isa.ru