

# Анализ вероятностных свойств процедур построения групповых экспертных оценок

Ю.В. Бугаев, Б.Е. Никитин, И.Ю. Шурупова

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет инженерных технологий» (ВГУИТ), г. Воронеж, Россия

**Аннотация.** В работе предложен метод анализа вероятностных свойств параметров, характеризующих эффективность процедур коллективного выбора, при условии, что истинные значения полезностей альтернатив известны. С помощью предлагаемого метода рассчитаны значения этих параметров для ряда известных процедур типа «упорядочение – упорядочение».

**Ключевые слова:** коллективный выбор, экстраполяция экспертных оценок, профиль индивидуальных упорядочений.

DOI 10.14357/20718594180207

## Введение

При решении задачи выбора на множестве недоминируемых альтернатив количество рассматриваемых вариантов может быть достаточно большим для того, чтобы ЛПР смог непосредственно к этому набору применить какой-либо механизм выбора оптимального варианта. Так, например, число недоминируемых вариантов технологического процесса изготовления интегральных схем в полупроводниковом и микроэлектронном производстве сравнимо с  $10^6$ .

К настоящему времени для решения указанной проблемы предложено множество самых различных подходов – от эвристических до аксиоматических. Достаточно подробный обзор этих методов содержится в [1]. Перечислим их основные классы:

1. Выбор на основе обобщенного критерия.
2. Выбор с помощью искусственного отношения предпочтения.
3. Человеко-машинные процедуры выбора.
4. Использование свойств отношения предпочтения ЛПР.

5. Сужение множества Парето при помощи «квантов информации».

Авторами предлагаемой работы разрабатывается группа методов, которая основана на идее экстраполяции экспертных оценок (ЭЭО). Общим для этих методов является идентификация системы экспертных предпочтений на основе ограниченной обучающей выборки альтернативных решений с последующей экстраполяцией выявленных предпочтений на всю исходную совокупность альтернатив. Идентификация состоит в определении неизвестных коэффициентов функции полезности (ФП), при которых структура экспертных предпочтений или полностью сохраняется, или претерпевает минимальные изменения. Данный метод применим как при индивидуальной, так и при коллективной экспертизе.

В [2, 3] приведены условия существования функции полезности, когда она представима в аддитивной форме. Иерархическая классификация методов определения коэффициентов важности критериев, построенная на основе понятий репрезентативной теории измерений, приведена в [4]. С результатами активно разви-

✉ Никитин Борис Егорович E-mail: nbe6419@gmail.com

вающейся в последнее время теории важности критериев можно познакомиться в [5-11]. Однако применение подхода, основанного на использовании функции полезности, для решения задач выбора на множестве недоминируемых альтернатив не позволяет давать содержательного объяснения (в терминах предметной области ЛПР) принятым решениям, поскольку невозможно восстановить исходные данные по агрегированным показателям. Необходимо также отметить, что различные методы определения коэффициентов важности критериев могут приводить к разным результатам [4]. Указанных недостатков лишен подход, основанный на вербальном анализе решений (ВАР) [12,13]. Однако методы ВАР не удовлетворяют требованию полноты отношений на множестве рассматриваемых многокритериальных альтернатив [14, 15]. Указанным недостатком в общем случае обладают и методы семейства ELECTRE [16, 17]. Напротив, методы, основанные на использовании функции полезности, позволяют построить на множестве многокритериальных альтернатив полные и ациклические бинарные отношения. Указанные достоинства, а также широкая распространенность различных систем поддержки принятия решений, использующих взвешенную свертку критериев, обуславливает применение механизма функции полезности в методах экстраполяции экспертных оценок.

Первоначально коллективный выбор на основе ЭЭО был реализован посредством метода максимального правдоподобия (процедура ЭЭО-ММП) [18]. В дальнейшем выяснилось, что для экстраполяции можно использовать и некоторые другие известные правила коллективного выбора посредством их модификации. В связи с этим возникла необходимость проведения научных исследований по анализу возможности реализации подхода экстраполяции различными методами с целью создания автоматизированной системы поддержки принятия решений, которая позволит выбирать процедуру, рациональную для конкретных условий.

При анализе свойств той или иной процедуры коллективного выбора традиционно используют три различных подхода [19]:

- анализ характеристических свойств правила голосования, как оператора, преобразующего профиль выборов или упорядочений в коллективный выбор;

- интерпретация процедуры голосования некоторой функцией выбора, заданной на множестве возможных списков и исследование свойств этой функции;

- оценка устойчивости процедуры голосования по отношению к негативным воздействиям со стороны избирателей или организатора – манипулированию.

Однако ни один из этих подходов не позволяет оценить степень пригодности процедуры для нужд экстраполяции. Дело в том, что экстраполяция идентифицированной системы предпочтений предполагает, что оценки, полученные в процессе обработки обучающей выборки, с достаточной точностью совпадают с некоторыми истинными величинами, характеризующими предпочтение ЛПР. Причем очевидно, что точность должна улучшаться при росте количества экспертов. Иными словами, эти оценки должны обладать неким подобием свойств несмещенности, эффективности и состоятельности, традиционно принятых для точечных статистических оценок параметров случайных величин.

В связи с этим обстоятельством, сотрудниками Воронежского государственного университета инженерных технологий (ВГУИТ) был разработан новый метод исследования процедур коллективного выбора, позволяющий провести их сравнительный анализ по ряду характеристик, влияющих, в частности, на эффективность их использования в экстраполяции экспертных оценок. Основы метода изложены в [20]. В предлагаемой работе с помощью этого метода проведен сравнительный анализ некоторых известных процедур коллективного выбора, а также процедуры, предложенной авторами.

## 1. Описание вероятностного метода построения групповых экспертных оценок

В целях связности изложения приведем описание вероятностного метода анализа процедур построения коллективных экспертных оценок, опубликованного в [20].

**Постановка задачи.** Следуя известной линейной модели парных сравнений [21], будем предполагать, что каждая альтернатива  $A_i$  обладает «истинной полезностью»  $V_i$ , а эксперт способен дать лишь некоторую ее оценку, ко-

торая, вообще говоря, отличается от  $V_i$  и принимается за случайную величину  $\xi_i$ . При этом допущении экспертам предлагается упорядочить некую ограниченную выборку альтернатив (обучающую выборку) от лучшей к худшей, исходя из своих индивидуальных предпочтений. Ограничимся случаем строгого упорядочения, т.е. исключим совпадение полезности двух и более альтернатив. Легко показать, что тогда бинарное отношение предпочтения любого эксперта антирефлексивно, транзитивно и слабо полно, т.е. представляет собой строгий порядок.

Имеется набор процедур коллективного выбора, на входе которых заданы результаты экспертного сравнения альтернатив обучающей выборки, а на выходе – оценки значений полезности каждой альтернативы, выраженной в числовой форме. В условиях, когда истинные полезности известны, необходимо провести сравнительный анализ процедур по вероятностным свойствам получаемых оценок полезностей.

**Замечание.** При дальнейшем использовании полученных оценок полезностей альтернатив в экстраполяции необходимо связать их значения с параметрами функции обобщенного критерия (функции полезности), и отсюда найти оценки коэффициентов этой функции. Ясно, что в этом случае результат коллективного выбора существенно зависит от структуры использованной функции полезности, неудачный ее выбор может сильно исказить результат и свести на нет достоинства анализируемой процедуры. Если же отказаться от поиска коэффициентов функции обобщенного критерия и ограничиться только оценками полезности альтернатив, то подобного искажения не случится и можно будет более точно исследовать свойства процедуры коллективного выбора.

В рамках методов экстраполяции экспертных оценок разделение способов оценивания альтернатив на случаи с использованием и без использования функции полезности было описано в [22]. Там они рассматривались под названиями «параметрический» и «непараметрический» подходы, соответственно. Далее везде в тексте мы будем ориентироваться на непараметрический подход.

Пусть число альтернатив выборки (мощность предъявления) равно  $m$  ( $A_1, A_2, \dots, A_m$ ). Очевидно, что возможно  $m!$  различных упорядочений. В коллективном выборе участвуют

несколько экспертов. Если их количество равно  $N$ , то число возможных вариантов распределений голосов между каждым из  $m!$  упорядочений (число различных профилей индивидуальных упорядочений) равно числу  $N$ -сочетаний с повторениями из  $m!$  предметов:

$$v = C_{m!+N-1}^N = \frac{(m!+N-1)!}{N!(m!-1)!}.$$

Каждый профиль индивидуальных упорядочений определяется некоторым целочисленным набором  $(k_1, k_2, \dots, k_{m!})$ , где  $k_t$  – количество экспертов, выбравших вариант упорядочения с номером

$$t \ (t=1, m!), \sum_{t=1}^{m!} k_t = N.$$

Предположим, нам известны истинные значения полезностей альтернатив  $V_i$ , а соответственно и правильное упорядочение, которое должно получиться в коллективном выборе. При этом условии вероятность каждого профиля индивидуальных упорядочений  $(k_1, k_2, \dots, k_{m!})$  можно определить по формуле полиномиального распределения:

$$P_z = \frac{N!}{k_1! k_2! \dots k_{m!}!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_{m!}^{k_{m!}}, \quad z = \overline{1, v}, \quad (1)$$

где  $p_t$  – вероятность  $t$ -го варианта экспертного упорядочения при известном истинном упорядочении.

В основе метода вероятностного анализа лежит допущение о независимости и нормальности распределения результатов экспертного оценивания [21], вследствие которого, значение экспертной оценки полезности  $i$ -й альтернативы  $\xi_i$  рассматривается как некая случайная величина с математическим ожиданием  $V_i$ , равным истинной полезности альтернативы. Также предполагается, что обучающая выборка является однородной, а эксперты одинаково компетентны, в силу чего оцененные полезности  $\xi_i$  альтернатив имеют одинаковую дисперсию  $\sigma^2$ , которая интерпретируется, как величина разногласия мнений экспертов.

Исходя из этих допущений, можно вычислить вероятности  $p_t$ :

$$p_t = \int_{D_t} g(x, V, \sigma) dx \quad (2)$$

$$D_t = \left\{ x \in E^m \mid x_{1,t} \geq x_{2,t} \geq \dots \geq x_{m,t} \right\}$$

где  $g(x, V, \sigma)$  – плотность  $m$ -мерного нормального распределения вида

$$g(x, V, \sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sigma^m} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} (x - V)^T (x - V) \right], \quad (3)$$

а  $D_t$  определяет область в пространстве  $E^m$ , соответствующую  $t$ -му варианту упорядочения альтернатив. На основе вероятностей  $p_t$  можно рассчитать интересующие нас характеристики экспертных оценок.

Математическое ожидание оценки полезности альтернативы  $A_i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , можно рассчитать по формуле:

$$M[w_i] = \sum_{t=1}^v u_t(A_i) \cdot p_t, \quad (4)$$

где  $u_t(A_i)$  – значение оценки полезности альтернативы  $A_i$ , полученное на выходе анализируемой процедуры при  $t$ -м варианте экспертных упорядочений.

Среднеквадратичное отклонение оценки полезности альтернативы  $A_i$  от истинного значения  $V_i$  рассчитывается по формуле:

$$s_i = \sqrt{\sum_{t=1}^v (u_t(A_i) - V_i)^2 \cdot p_t}. \quad (5)$$

Третья характеристика – вероятность правильного ранжирования альтернатив на выходе процедуры определяется как

$$Pr = \sum_{t=1}^v P_t^*(k_1, k_2, \dots, k_m), \quad (6)$$

где  $P_t^*(k_1, k_2, \dots, k_m) = \begin{cases} p_t, & \text{если при } t\text{-м входном} \\ & \text{упорядочении на выходе} \\ & \text{процедуры получено} \\ & \text{правильное ранжирование;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Наконец, четвертая характеристика – вероятность правильного выбора лучшей альтернативы определяется по формуле, аналогичной (6).

**Примечание.** Значение полезности альтернатив определено на шкале интервалов. В этой шкале присутствуют упорядоченность данных и интервалов, но нет нулевой точки, которая может задаваться произвольно. Между показаниями в таких шкалах существует линейная связь вида  $y = ax + b$ ,  $a > 0$ ,  $-\infty < b < +\infty$ . По-

этому для сопоставимости получаемых результатов, значения полезностей альтернатив обучающей выборки приводились к интервалу  $[0, 1]$ . В качестве механизма, производящего соответствующую нормировку произвольного вектора  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$  будем использовать функцию вида:

$$No(a_j) = \frac{a_j - \min_{k=1, n}(a_k)}{\max_{k=1, n}(a_k) - \min_{k=1, n}(a_k)}, j = \overline{1, n}. \quad (7)$$

В силу того, что величина  $C_{m!+N-1}^N$  чрезвычайно быстро растет с возрастанием  $m$ , было решено ограничиться случаем четырех альтернатив ( $m = 4$ ) и пяти экспертов ( $N = 5$ ) при истинной упорядоченности вида  $(A_1 \succeq A_2 \succeq A_3 \succeq A_4)$ , где символ  $\succeq$  означает «не хуже по предпочтению». Количество анализируемых вариантов профилей при этом составило  $C_{m!+N-1}^N = 98280$ .

При проведении расчетов по вероятностному методу результат на выходе может изменяться в зависимости от соотношения истинных полезностей  $V_i$ , а также от величины ошибки экспертного оценивания. Варьируя значения истинных полезностей  $V_i$  при фиксированных соотношениях между ними, а также задавая параметр  $\sigma$ , который определяет величину среднеквадратичного отклонения экспертного оценивания, можно получить численные значения необходимых характеристик, в частности (4) – (6), и с их помощью проанализировать свойства процедур коллективного выбора.

## 2. Определение класса устойчивых профилей

Опыт нахождения ММП-оценок в ЭЭО [22] убеждает в том, что решение этой задачи не всегда конечно.

**Пример 1.** Пусть имеем следующие варианты экспертного упорядочения выборки из трех альтернатив  $A_1, A_2, A_3$ :

$$A_1 \succeq A_2 \succeq A_3; A_1 \succeq A_2 \succeq A_3; A_1 \succeq A_3 \succeq A_2.$$

Этому набору упорядочений соответствует функция правдоподобия

$$L = P(A_1 \succeq A_2 \succ A_3)^2 \cdot P(A_1 \succeq A_3 \succeq A_2), \quad (8)$$

точный максимум которой при  $\sigma = 1$  равен 0.148148 и достигается при следующих соотношениях полезностей альтернатив:  $w_1 - w_2 = +\infty$ ;  $w_2 - w_3 = 0.60914$ . Численная же оптимизация функции (8) в системе MathCad дает следующие оценки полезностей:  $w_1 = 6.96689$ ;  $w_2 = -3.18503$ ;  $w_3 = -3.79417$ . При этих  $w_i$  оптимальное значение  $L$  совпадает с 0.148148. Условие  $w_2 - w_3 = 0.60914$ , как видно, выполняется, а  $w_1 - w_2 = 10.151916$ . В соответствии со значением функции нормального распределения полученное решение аппроксимирует бесконечно удаленную точку.

Однако очевидно, что такой аппроксимацией будет любое решение, удовлетворяющее, например, условиям  $w_1 - w_2 \geq 8$  и  $w_2 - w_3 = 0.60914$ . Численно при различных начальных условиях могут быть получены различные варианты решений, удовлетворяющие этим условиям. В итоге нормализованные оценки, найденные по формуле (7), будут сильно различаться.

Иными словами, в данном примере область оптимума целевой функция (8) имеет структуру типа «плато», поэтому численное решение в процедуре ЭЭО-ММП неустойчиво по начальному приближению. Проведенные численные эксперименты убеждают в том, что подобное явление наблюдается и в других процедурах, выходные оценки которых не ограничены посредством какого-нибудь условия. Поэтому вопрос о существовании или отсутствии бесконечных решений в ЭЭО весьма важен.

В [23] предлагается следующий метод анализа профиля на наличие конечного решения. Пусть  $N$  экспертов проранжировали элементы выборки. Для каждой пары  $(A_i, A_j)$  альтернатив  $(i, j = 1, m, i \neq j)$  подобно тому, как это делается в процедуре Терстоуна-Мостеллера [5–6], вычислим величины

$$p_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{N}, \quad (9)$$

где  $\alpha_{ij}$  – число случаев, когда эксперты указали  $A_i \succeq A_j$ .

Далее на множестве альтернатив введем следующее бинарное отношение  $R$ :

$$(A_i, A_j) \in R \Leftrightarrow 0 < p_{ij} < 1. \quad (10)$$

Очевидно, отношение (10) симметрично, так как в силу наличия строгих неравенств  $(A_i, A_j) \in R \Leftrightarrow (A_j, A_i) \in R$ , хотя  $p_{ij} = 1 - p_{ji}$  и в общем случае  $p_{ij} \neq p_{ji}$ . Геометрическим образом данного отношения будет неориентированный граф  $G = (A, R)$ , который назовем *графом профиля экспертного упорядочения*.

Ясно, что если для достаточно большого количество пар альтернатив значения  $p_{ij}$  совпадают с 0 или 1, полученный граф может распасться на отдельные компоненты связности, т.е. будет несвязным. Рассмотрим две его произвольные компоненты  $G_1$  и  $G_2$ , а также две произвольные вершины  $u \in G_1$  и  $v \in G_2$ . Отсутствие в графе ребра  $(u, v)$  означает, что  $p_{uv}$  равно 1 или 0. В первом случае оцененная эксперт-ом полезность альтернативы  $A_u$  бесконечно больше соответствующей полезности  $A_v$ , во втором случае ситуация обратная.

В [23] было доказано, что связность графа  $G$  является необходимым и достаточным условием конечности ММП-оценок полезностей альтернатив в процедуре ЭЭО-ММП. Кроме того, численные эксперименты убеждают, что эти условия гарантируют конечность оценок и других процедур коллективного выбора, например, нелинейной процедуры Терстоуна-Мостеллера.

Поясним, о какой процедуре идет речь. В оригинальном правиле Терстоуна-Мостеллера метод оценивания сводится к линейаризации невязок, входящих в состав минимизируемой суммы квадратов. Однако известно [24], что линейаризация может сильно исказить результат аппроксимации. В частности, ошибки наиболее велики в тех парах альтернатив, для которых оцененная экспертами вероятность предпочтения равна 0 или 1. Такой результат может присутствовать и в профилях со связными графами. Более достоверная оценка получается при использовании нелинейного МНК, что было показано в [25]. Поэтому важно знать условие конечности получаемых ею оценок.

Очевидно, что несвязность графа профиля экспертного упорядочения говорит о том, что эксперты «слишком единодушны» в своем мнении о полезностях альтернатив и аппарат математической статистики определения оценок в этом случае не работает. Данное соображение наводит на мысль, что при анализе процедур коллективного выбора, использующих тот или иной статистический метод, следует ограничиться лишь набором профилей, графы

которых связны. Для краткости назовем такие профили *устойчивыми*.

Предлагается следующий метод анализа профиля упорядочений на устойчивость:

1. На основании профиля предпочтений вычисляем  $p_{ij}$  по формуле (9) для всех пар альтернатив.

2. Строим отношение  $R$  и на его основе – граф  $G$ .

3. Проверяем связность  $G$ . Если он связный, то ММП-оценки всех альтернатив будут конечны.

Рассмотрим два иллюстрирующих примера. Сначала вернемся к Примеру 1. Согласно формуле (9) имеем:

$$p_{12} = 1; p_{13} = 1; p_{23} = \frac{2}{3}.$$

Следовательно, граф  $G$  содержит только одно ребро  $(A_2, A_3)$  и имеет две компоненты связности:  $\{A_1\}$  и  $\{A_2, A_3\}$ . Оценка  $w_1$  бесконечна.

**Пример 2.** Пусть имеем следующие варианты упорядочения выборки из трех альтернатив  $A_1, A_2, A_3$ :

$$A_1 \succeq A_2 \succeq A_3; \quad A_2 \succeq A_1 \succeq A_3; \quad A_2 \succeq A_3 \succeq A_1.$$

Имеем:  $p_{12} = \frac{1}{3}$ ,  $p_{13} = \frac{2}{3}$ ,  $p_{23} = 1$ . Граф  $G$  содержит два ребра  $(A_1, A_2)$  и  $(A_1, A_3)$ , а значит является связным. Бесконечных оценок нет. Численное решение, полученное посредством процедуры ЭО-ММП, дает следующие значения:  $w_1 = 0$ ,  $w_2 = 0.923$ ,  $w_3 = -0.923$ .

Были проанализированы все 98280 возможных профилей, из них устойчивые оценки порождают 96030. Таким образом, в проведенных расчетах были задействованы лишь профили со связными графами экспертных упорядочений. Для прочих профилей следует использовать какие-либо специальные процедуры. Например, в [9] показано, что хороший результат получается при использовании более сильных шкал сравнения альтернатив, чем порядковая.

### 3. Сравнительный анализ процедур коллективного выбора

Большая часть процедур коллективного выбора, основанных на экспертном упорядочении альтернатив выборки, относится к классу «Упорядочение – выбор». На выходе они получают одну лучшую или несколько равнозначных ей альтернатив. Меньшая часть относится

к классу «Упорядочение – упорядочение», которая на выходе выдает результирующее упорядочение. Из них для экстраполяции подходят лишь те процедуры, которые помимо итогового упорядочения выдают некоторые числовые параметры, которые можно было бы интерпретировать, как оценки полезностей альтернатив. Таких процедур немного, к ним можно отнести:

- процедуру Борда, в которой оценками полезности можно считать сумму рангов каждой альтернативы;

- процедуру Янга, в которой оценками полезности можно считать максимальную мощность подписка вариантов, в котором текущая альтернатива является победителем по Кондорсе;

- процедуру Коупленда, в которой оценкой полезности текущей альтернативы можно считать разность между числом ее доминируемых и доминирующих вершин в мажоритарном графе;

- оригинальную процедуру Терстоуна-Мостеллера;

- нелинейную модификацию процедуры Терстоуна-Мостеллера.

Кроме перечисленных процедур, в число анализируемых была включена процедура, основанная на построении медианы Кемени. Данная процедура на выходе получает только итоговое упорядочение и не позволяет оценить полезности. Однако помимо свойств оценок полезностей, важной характеристикой процедуры выбора является вероятность получения верного упорядочения, если оно задано. Правило выбора, основанное на медиане Кемени, по многим характеристикам считается одной из лучших процедур, поэтому авторы посчитали необходимым провести ее вероятностный анализ.

При анализе, за истинное упорядочение было взято  $(A_1 \succeq A_2 \succeq A_3 \succeq A_4)$ . Проверять другие варианты нет смысла, так как результаты получаются симметричными.

Значение  $\sigma$  варьировалось в диапазоне  $[1/3, 1]$ . При значении  $\sigma = 1$  смещение получается достаточно маленьким и увеличение  $\sigma$  не вносит существенных изменений. При уменьшении  $\sigma$  уменьшается вероятность существования устойчивых профилей, при  $\sigma = 1/3$  она равна примерно 0,5. Поэтому дальнейшее уменьшение  $\sigma$  понизило бы достоверность результата.

С помощью вероятностного метода оценивались следующие характеристики процедур:

1. Смещение математических ожиданий нормализованных оценок полезности альтернатив  $A_2$  и  $A_3$  согласно формулам (4), (7). Для прочих альтернатив за счет нормализации всегда получается  $w_1 = 1, w_4 = 0$ .

2. Среднеквадратичное отклонение оценки полезности альтернатив  $A_i$  от истинного значения  $V_i$  – формула (5).

3. Вероятность правильного ранжирования альтернатив на выходе процедуры в соответствии с исходным упорядочением ( $A_1 \geq A_2 \geq A_3 \geq A_4$ ) – формула (6).

4. Вероятность правильного выбора лучшей альтернативы  $A_1$ .

#### 4. Основные результаты

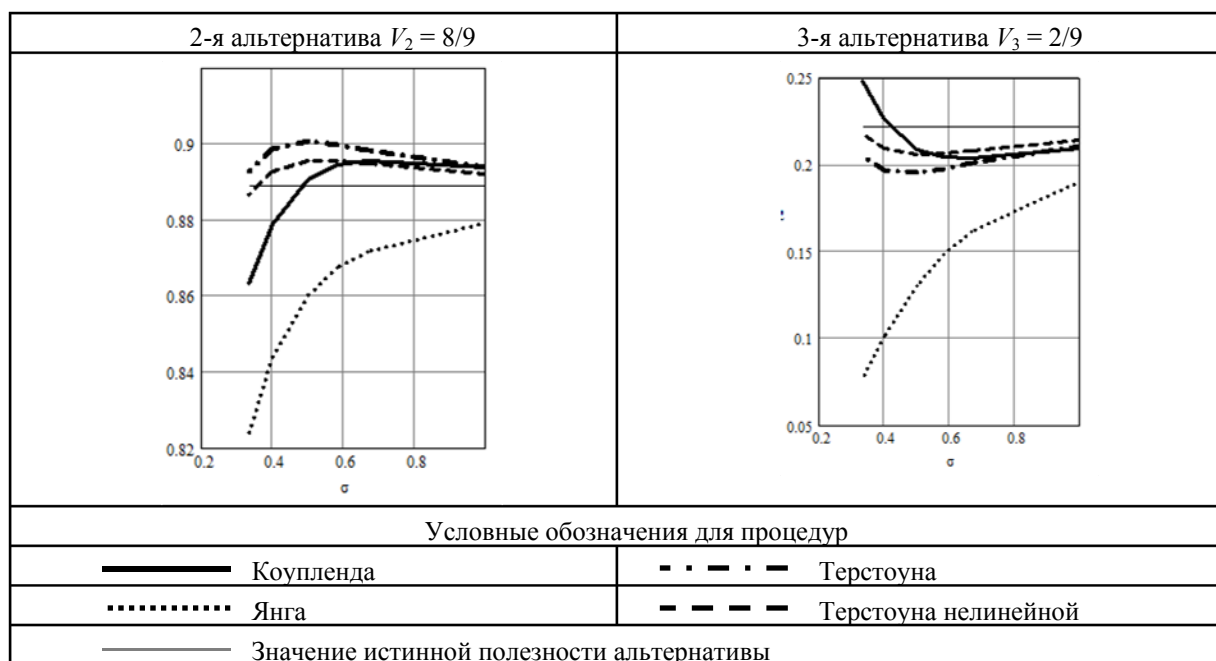
1. По первой и второй характеристикам процедуры Борда и Терстоуна-Мостеллера (линеаризованная) показали примерно одинаковые удовлетворительные результаты. Немного лучше их в целом оказалась нелинейная процедура Терстоуна-Мостеллера. Процедура Коупленда в некоторых случаях проигрывала по величине смещения (см. графики), в остальных случаях была близка к тройке лидеров. Процедура Янга стабильно показывала плохие результаты по всем показателям, проверку она явно не прошла.

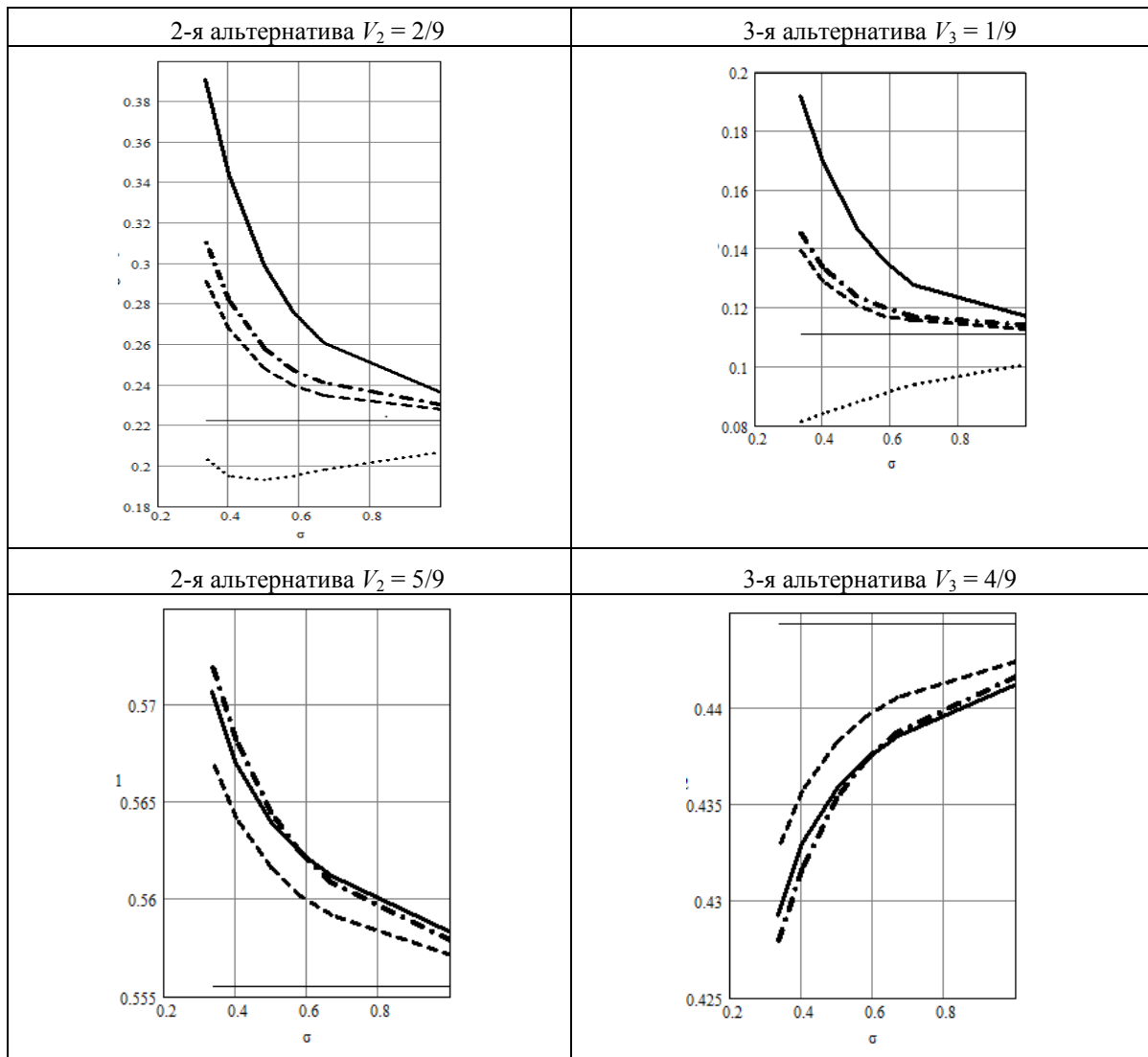
2. По третьей характеристике процедуры медианы Кемени, оба варианта процедуры Терстоуна-Мостеллера и процедура Коупленда показали весьма близкие результаты, однако нелинейная процедура Терстоуна-Мостеллера была немного лучше. Процедура Борда отстала от лидирующей четверки, и, как было отмечено, совсем плохие результаты показала процедура Янга.

3. По четвертой характеристике лучшими оказались оба варианта процедуры Терстоуна. На втором месте – процедуры Янга и Коупленда, причем их результаты в точности совпадают, что, видимо, объясняется идентичностью их механизмов нахождения лучшей альтернативы с теоретико-вероятностных позиций. Наконец, худший результат показали процедуры Борда и медианы Кемени. Возможно, это объясняется тем, что они часто выдают неоднозначный результат итогового упорядочения. Кроме того, оцениваемый показатель сильно зависит от различимости полезностей альтернатив, что, впрочем, вполне логично. Так, худший результат все процедуры показали в случае  $V_2 = 8/9$ , когда  $V_2$  близко к  $V_1$ , а лучший – при  $V_2 = 2/9$ .

4. Хорошо прослеживается динамика величины смещения: она возрастает при уменьшении показателя  $\sigma$  рассогласованности мнений экспертов. Знак смещения зависит от значений истинных полезностей.

Графики зависимости от  $\sigma$  математических ожиданий оценок полезности альтернатив



Графики зависимости от  $\sigma$  математических ожиданий оценок полезности альтернатив

## Заключение

1. Предложен и апробирован новый метод исследования процедур коллективного выбора, позволяющий оценить их различные характеристики для проведения сравнительного анализа и выбора наиболее эффективной процедуры.

2. Проведенные исследования позволили оценить потенциальную эффективность ряда процедур коллективного выбора при их использовании в подходе экстраполяции экспертных оценок. По итогам анализа наилучшие результаты показала нелинейная процедура Терстоуна-Мостеллера, которая может быть рекомендована для практического применения в автоматизированных системах поддержки принятия решений. Для минимизации соответ-

ствующей суммы квадратов можно рекомендовать стандартные программы оптимизации из математических пакетов MathCad и Matlab.

3. Предложенный метод классификации профилей индивидуальных упорядочений по показателю связности графа профиля экспертного упорядочения позволяет заранее оценить эффективность коллективного выбора и соответствующим образом спланировать обучающую выборку.

## Литература

1. Ногин В. Д. Проблема сужения множества Парето: подходы к решению // Искусственный интеллект и принятие решений. 2008. № 1. С. 98–112.
2. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. – М.: Наука. 1978.

3. Кини Р. Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. — М.: Радио и связь. 1981. 560 с.
4. Анохин А. М., Глотов В.А., Павелъев В. В., Черкашин А.М. Методы определения коэффициентов важности критериев // Автоматика и телемеханика. 1997. № 8. С. 3–35.
5. Подиновский В.В. Аксиоматическое решение проблемы оценки важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений / Современное состояние теории исследования операций / Под ред. Н.Н. Моисеева. — М.: Наука. 1979. С. 117–145.
6. Подиновский В. В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. — М.: Физматлит. 2007. 64 с.
7. Подиновский В.В. Использование интервальной информации об относительных замещениях критериев в анализе многокритериальных задач принятия решений // Автоматика и телемеханика. 2010. № 8. С. 154–167.
8. Нелюбин А.П., Подиновский В.В. Аналитические решающие правила, использующие упорядоченность по важности критериев со шкалой первой порядковой метрики // Автоматика и телемеханика. 2012. № 5. С. 84–96.
9. Нелюбин А.П., Подиновский В.В. Взаимосвязь качественной и количественной важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений // Открытое образование. 2011. № 6. С. 108–115.
10. Подиновский В.В. Количественная важность критериев и аддитивные функции ценности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53, № 1. С. 133–142.
11. Подиновский В.В., Подиновская О.В. Новые многокритериальные решающие правила в теории важности критериев // Доклады Академии Наук. 2013. Т. 451, № 1. С. 21–23.
12. Ларичев О. И. Вербальный анализ решений. — М.: Наука. 2006. 181 с.
13. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений, а также хроника событий в волшебных странах: Учебник. Изд. второе, перераб. и доп. — М.: Логос. 2002. 392 с.
14. Ларичев О.И. Свойства методов принятия решений в многокритериальных задачах индивидуального выбора // Автоматика и телемеханика. 2002. № 2. С. 146–158.
15. Ларичев О.И. Противоречивые свойства методов индивидуального выбора // Доклады Академии Наук. 2001. Т. 378, № 2. С. 168–172.
16. Анич И., Ларичев О. И. Метод ЭЛЕКТРА и проблема ацикличности отношений альтернатив // Автоматика и телемеханика. 1996. № 8. С. 108–118.
17. Ашихмин И.В., Ройзензон Г.В. Выбор лучшего объекта на основе парных сравнений на подмножествах критериев // Методы поддержки принятия решений: Сборник трудов Института системного анализа Российской академии наук / Под ред. О. И. Ларичева. М.: Эдиториал УРСС. 2001. С. 51–71.
18. Бугаев Ю.В. Экстраполяция экспертных оценок в оптимизации технологических систем // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2003. № 3. С. 90–96.
19. Вольский В. И., Лезина З. М. Сравнительный анализ процедур голосования // Автоматика и телемеханика. 1992. № 2. С. 3–29.
20. Бугаев Ю.В., Миронова М.С., Никитин Б.Е. Вероятностный метод анализа процедур построения коллективных экспертных оценок // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2011. № 2. С. 130–135.
21. Шмерлинг Д. С., Дубровский С. А., Аржанова Т. Д., Френкель А. А. Экспертные оценки. Методы и применение: обзор // Ученые записки по статистике. Статистические методы анализа экспертных оценок. 1977. Т. 29. С. 290–382.
22. Миронова М. С. Моделирование процедур коллективного выбора на основе экстраполяции экспертных оценок. Дисс.... канд. ф.-м. н. — Воронеж: ВГУИТ. 2011. 138 с.
23. Бугаев Ю.В., Шурупова И.Ю., Бабаян М.К. Анализ конечности решения в методе экстраполяции экспертных оценок // Вестник Брянского государственного технического университета. 2014. № 1 (41). С. 73–78.
24. Демиденко Е. З. Линейная и нелинейная регрессии. — М.: Финансы и статистика. 1981. 302 с.
25. Бабаян М. К. Моделирование адаптивной процедуры коллективного выбора на основе экстраполяции экспертных оценок. Дисс...канд. ф.-м. н. — Воронеж: ВГУИТ. 2015. 136 с.

**Бугаев Юрий Владимирович.** Доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных технологий моделирования и управления ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет инженерных технологий» (ВГУИТ). Количество печатных работ: 180, в том числе 1 монография. E-mail: y\_bugaev52@mail.ru

**Никитин Борис Егорович.** Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий моделирования и управления ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет инженерных технологий» (ВГУИТ). 19. Количество печатных работ: 35. E-mail: nbe6419@gmail.com.

**Шурупова Ирина Юрьевна.** Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий моделирования и управления ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет инженерных технологий» (ВГУИТ). Количество печатных работ: 50. E-mail: i\_shur@mail.ru.

**Analysis of probabilistic properties rules of construction group expert estimations**

Yu.V. Bugaev, B.E. Nikitin, I.Y. Shurupova

Department of information technologies of modeling and control of the "Voronezh state University of engineering technologies" (VSUET), Voronezh, Russia

In the article offered the method of analysis of the probabilistic properties of the parameters characterizing the efficiency of rules collective choice, provided that the true values of the utilities of alternatives are known. Using the proposed method, we calculated the values of these parameters for the number of known rules type ranking – ranking.

**Keywords:** social choice, the extrapolation of expert estimations, the profile of individual preferences.

DOI 10.14357/20718594180207

**References**

1. Noghin, V.D. 2008. Problema suzheniya mnozhestva Pareto: podkhody k resheniyu [The Problem of narrowing of the Pareto set: approaches to the solution of the]. *Iskusstvennyy intellekt i prinyatiye resheniy* [Artificial intelligence and decision-making] 1:98-112.
2. Fishbern P. 1978. *Teoriya poleznosti dlya prinyatiya resheniy* [Theory of utility for decision-making]. Moscow: Nauka. 352 p.
3. Kini R. L., Rayfa KH. 1981. *Prinyatiye resheniy pri mnogikh kriteriyakh: predpochteniya i zameshcheniya* [Decision-making under many criteria: preferences and substitutions]. Moscow: Radio i svyaz. 560 p.
4. Anokhin A. M., Glotov V.A., Pavel'yev V. V., Cherkashin A. M. 1997. *Metody opredeleniya koeffitsiyentov vazhnosti kriteriyev* [Methods for determining the coefficients of the importance of criteria]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control]. 8: 3–35.
5. Podinovskiy V.V. 1979. *Aksiomaticeskoye resheniye problemy otsenki vazhnosti kriteriyev v mnogokriterialnykh zadachakh prinyatiya resheniy* [Axiomatic solution of the problem of evaluation of the importance of criteria in multicriteria decision-making problems]. *Sovremennoye sostoyaniye teorii issledovaniya operatsiy* [Current state of the theory of operations research]. Ed. N.N. Moiseyev. Moscow: Nauka. 117-145.
6. Podinovskiy V. V. 2007. *Vvedeniye v teoriyu vazhnosti kriteriyev v mnogokriterial'nykh zadachakh prinyatiya resheniy* [Introduction to the theory of the importance of criteria in multicriteria decision-making problems]. Moscow: Fizmatlit. 64 p.
7. Podinovskiy V.V. 2010. *Ispolzovaniye interval'noy informatsii ob otnositelnykh zameshcheniyakh kriteriyev v analize mnogokriterialnykh zadach prinyatiya resheniy* [The use of interval information on relative substitutions of criteria in the analysis of multicriteria decision-making problems]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control]. 8: 154-167.
8. Nelyubin A.P., Podinovskiy V.V. 2012. *Analiticheskiye reshayushchiye pravila, ispol'zuyushchiye uporyadochennost po vazhnosti kriteriyev so shkaloy pervoy poryadkovoy metriki* [Analytical decision rules using ordering by the importance of criteria with the scale of the first ordinal metrics]. *Avtomatika i telemekhanika*. [Automation and Remote Control]. 5: 84-96.
9. Nelyubin A.P., Podinovskiy V.V. 2011. *Vzaimosvyaz kachestvennoy i kolichestvennoy vazhnosti kriteriyev v mnogokriterialnykh zadachakh prinyatiya resheniy* [Interrelation of qualitative and quantitative importance of criteria in multicriteria decision-making problems]. *Otkrytoye obrazovaniye* [Open Education]. 6:108-115.
10. Podinovskiy V.V. 2013. *Kolichestvennaya vazhnost kriteriyev i additivnyye funktsii tsennosti* [Quantitative importance of criteria and additive value functions]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics]. S. 53, 1:133-142.
11. Podinovskiy V.V., Podinovskaya O.V. 2013. *Novyye mnogokriterial'nyye reshayushchiye pravila v teorii vazhnosti kriteriyev* [New multicriterion decision rules in the theory of the importance of criteria]. *Doklady Akademii Nauk* [Reports of the Academy of Sciences]. S. 378, 2: 168-172.
12. Larichev O.I. 2002. *Svoystva metodov prinyatiya resheniy v mnogokriterialnykh zadachakh individual'nogo vybora* [Properties of decision-making methods in multi-objective problems of individual choice]. *Avtomatika i telemekhanika*. [Automation and Remote Control]. 2:146-158.
13. Larichev O.I. 2001. *Protivorechivyye svoystva metodov individual'nogo vybora* [Contradictory properties of methods of individual choice]. *Doklady Akademii Nauk* [Reports of the Academy of Sciences]. S. 378, 2: 168-172.
14. Anich I., Larichev O. I. 1996. *Metod ELEKTRA i problema atsiklichnosti otnosheniy alternativ* [The ELECTRE method and the problem of acyclic Academy of Sciences]. S. 451, 1: 21-23.
15. Larichev O. I. 2006. *Verbalnyy analiz resheniy* [Verbal analysis of solutions]. Moscow: Nauka. 181 p.
16. Larichev O.I. 2002. *Teoriya i metody prinyatiya resheniy, a takzhe khronika sobyitiy v volshebnykh stranakh* [Theory and methods of decision relations of alternatives]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control]. 8:108–118.
17. Ashikhmin I.V., Royzenzon G.V. 2001. *Vybor luchshego ob'yekta na osnove parnykh sravneniy na podmnozhestvakh kriteriyev* [Selection of the best object on the basis of paired comparisons on subsets of criteria]. *Metody podderzhki prinyatiya resheniy: Sbornik trudov Instituta sistemnogo analiza Rossiyskoy akademii nauk* [Methods for supporting decision-making: Proceedings of the Institute of System Analysis, Russian Academy of Sciences]. Pod red. O. I. Laricheva [Ed. OI Laricheva]. Moscow: Editorial URSS:51-71.

19. Bugaev, Y.V. 2003. Ekstrapolyatsiya ekspertnykh otsenok v optimizatsii tekhnologicheskikh system [Extrapolation of expert estimations in optimization of technological systems]. Izvestiya akademii nauk, teoriya i sistemy upravleniya [Journal of Computer and Systems Sciences International] 3:90-96.
20. Volsky, V.I., and Z. M. Lezina. 1992. Sravnitel'nyy analiz protsedur golosovaniya [Comparative analysis of voting procedures]. Avtomatika i Telemekhanika [Automation and Remote Control] 2:3-29.
21. Bugaev, Y. V., M.S. Mironova M. S., and B.E. Nikitin. 2011. Veroyatnostnyy metod dlya analiza protsedur postroyeniya kollektivnykh ekspertnykh otsenok [The probabilistic method for the analysis of procedures of building collective expert estimations]. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta [Bulletin of Voronezh state University] 2:130-135.
22. Kolbin, V. V. 2015. Matematicheskiye metody kollektivnogo prinyatiya resheniy [Mathematical methods of collective decision-making: Training for the expedient]. Uchebnoye posobiye [SPb.: Publishing house "DOE"] 256.
24. Mironova, M. S. 2011. Modelirovaniye protsedur kollektivnogo vybora na osnove ekstrapolyatsii ekspertnykh otsenok [Modeling procedures of collective choice on the basis of extrapolation of expert estimations]. PhD thesis. Voronezh. 138 p.
25. Bugaev, Y. V., I. Yu. Shurupova, and M. K. Babayan. 2014. Analiz konechnosti resheniya v metode ekstrapolyatsii ekspertnykh otsenok [Analysis of the limit of solving in the method of extrapolation of expert estimations]. Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta [Bulletin of Bryansk state technical University] 1(41):73-78.
26. Demidenko, E. Z. 1981. Lineynaya i nelineynaya regressiya [Linear and nonlinear regression]. Moscow: Finance and statistics. 302 p.
27. Babayan, M. K. 2015. Modelirovaniye adaptivnoy protsedury kollektivnogo vybora na osnove ekstrapolyatsii ekspertnykh otsenok [Modeling the adaptive procedure of collective choice on the basis of extrapolation of expert estimations]. PhD thesis. Voronezh. 136 p.

**Bugaev Yuri V.** Professor, Department of information technologies of modeling and control of the "Voronezh state University of engineering technologies" (VSUET), Voronezh, Revolution Avenue, 19. Doctor of Sciences in "Mathematical modeling, numerical methods and complexes of programs", Professor, VSUET. The author of 180 publications, 1 monograph. E-mail: y\_bugaev@mail.ru.

**Nikitin Boris E.** Associate Professor of the Department of information technologies of modeling and control of the "Voronezh state University of engineering technologies" (VSUET), Voronezh, Revolution Avenue, 19. Candidate of Sciences (PhD) in "Mathematical modeling, numerical methods and complexes of programs", associate Professor, VSUET. The author of 35 publications. E-mail: nbe6419@gmail.com.

**Shurupova Irina Yu.** Associate Professor of the Department of information technologies of modeling and control of the "Voronezh state University of engineering technologies" (VSUET), Voronezh, Revolution Avenue, 19. Candidate of Sciences (PhD) in Differential equations, associate Professor, VSUET. The author of 50 publications. E-mail: i\_shur@mail.ru