# Эвристика обнаружения эмпирических закономерностей и принципы интеллектуального анализа данных

В.К. Финн

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия

**Аннотация.** В работе формулируются логические средства реализации эвристики обнаружения эмпирических закономерностей посредством ДСМ-рассуждений и ДСМ-исследований. Рассматриваемая эвристика основана на синтезе индукции, аналогии и двух родов абдукции, а также использует возможные расширения последовательностей баз фактов и определяемые посредством них каузальные вынуждения и соответствующие модальности.

**Ключевые слова:** ДСМ-метод, ДСМ-рассуждение, ДСМ-исследование, индукция, аналогия, абдукция 1-го и 2-го рода, каузальные вынуждения, ДСМ-эвристика, эмпирические закономерности.

**DOI** 10.14357/20718594180311

## Введение

ДСМ-метод АПНИ является методологией и логико-математическим аппаратом поддержки научных исследований, использующих расширяемые массивы данных [1, 2]. ДСМ-метод имеет следующие составляющие: условия применимости [2], ДСМ-рассуждения [1, 3, 4], квазиаксиоматические (открытые) теории (КАТ) [2, 5], метатеоретические средства анализа ДСМ-рассуждений и КАТ [1,3], частично упорядоченное множество стратегий ДСМ-рассуждений [6, 3], средства обнаружения эмпирических закономерностей (ER), интеллектуальные системы, реализующие ДСМ-рассуждения и ДСМ-исследования (ИС-ДСМ) [7-9, 10].

ДСМ-метод АПНИ имеет экспериментальное обоснование посредством применения ИС-ДСМ в науках о жизни и социальном поведении [4, 7, 8, 11, 12], знания в которых слабо формализованы, но допускают точное структурирование (определения сходства фактов).

ДСМ-метод АПНИ имеет три последовательно применяемых этапа:

1) ДСМ-рассуждения, являющиеся синтезом индукции, аналогии и абдукции;

2) ДСМ-исследования – применение упорядоченного множества $\overline{Str}$ стратегий ДСМ-рассуждений для обнаружения эмпирических закономерностей (эмпирических законов и эмпирических тенденций) в последовательностях расширяемых баз фактов БФ ( $p$), $p = 0, 1,\dots s$;

3) сравнение результатов (2) посредством пары шкал оценки качества рассуждений и оценки качества порожденных гипотез о причинах и предсказаниях исследуемых эффектов [3].

Эти этапы образуют *эвристику* решения проблем [13,14] посредством правдоподобных рассуждений [15] и порождение гипотез, имеющих аргументацию и обоснование [16]. Результатом ДСМ-эвристики является формирование семейства КАТ, соответствующего множеству стратегий ДСМ–рассуждений, и коррекция КАТ при расширениях множества фактов (КАТ являются средством организации баз знаний ИС-ДСМ).

✉ *Финн Виктор Константинович e-mail: v.k.finn@yandex.ru*

ДСМ–рассуждения формулируются посредством формального языка JL, а ДСМ-исследования – посредством метаязыка MJL, содержащего JL.

В общей конструкции ДСМ–метода АПНИ ДСМ-рассуждения формализуются в многозначной слабой логике предикатов 2-го порядка, в которой выразимо транзитивное замыкание [17] (в JL используются кванторы по кортежам [1, с. 214-232]. Для практической реализации ДСМ–рассуждений, применяемых для конечных моделей, достаточно выразительных средств логики предикатов 1-го порядка [1,с. 287-293]. Исходными предикатами ДСМ–метода АПНИ являются $X \Rightarrow_1 Y$ и $V \Rightarrow_2 Y$ - «объект X обладает множеством свойств Y» и подобъект V есть причина эффекта Y».

Язык JL содержит переменные трех сортов X, Z, V; Y, U, W; *n*, *m*, *k*, *l*, *p*, *q*, *r*, *s* (быть может, с нижними индексами), соответственно, для объектов (подобъектов), множеств свойств (эффектов), натуральных чисел, соответственно. Объекты (подобъекты) и множества свойств, а также операции над ними представимы, соответственно, в двух булевых алгебрах $\mathcal{B}_1 = < 2^{\mathbf{U}^{(1)}}, \varnothing, \mathbf{U}^{(1)}, -, \cap, \cup >$ и $\mathcal{B}_2 = < 2^{\mathbf{U}^{(2)}}, \varnothing, \mathbf{U}^{(2)}, -, \cap, \cup >$, где $\mathbf{U}^{(1)}$ и $\mathbf{U}^{(2)}$ - исходные множества, элементы которых образуют объекты (подобъекты) и эффекты соответственно: $C \in 2^{\mathbf{U}^{(1)}}, Q \in 2^{\mathbf{U}^{(2)}}$, где C,Q – константы.

Логические связки JL: $\neg, \&, \vee, \rightarrow, \forall, \exists$; *J*-операторы [19] $J_{\bar{\nu}}, J_{(\tau,n)}$, где $\bar{\nu} = <\nu, n>$, $\nu \in \{1, -1, 0\}$, $1, -1, 0, \tau$ – типы истинностных значений, фактические истина, ложь, противоречие и неопределенность, соответственно; $\bar{\nu}$ – истинностное значение, а *n* – натуральное число, выражающее число шагов правдоподобных выводов (степень правдоподобия гипотезы); $(\tau, n) = \{<1, n+1>, <1, n+1>, <0, n+0>\} \cup (\tau, n+1)$ представляет неопределенность.

$$J_{\bar{\nu}}\varphi = \begin{cases} t, если\ V[\varphi] = \bar{\nu} \\ f, \quad иначе, \end{cases}$$ где $t, f$ – истина, ложь двузначной логики.

Средствами JL определимы правила индуктивного вывода, вывод по аналогии и абдуктивное принятие гипотез [1, 5, 20].

Индуктивные методы Д.С. Милля (сходства, различия, сходства – различия, остатков и сопутствующих изменений) [21], а также условия запрета на контрпримеры были формализованы в JL как правила правдоподобного индуктивного вывода в [5-7], применяемые в ДСМ–рассуждениях.

Особенностями формализации правил индуктивного вывода в ДСМ-методе АПНИ являются:

1) выбор метода сходства в качестве базисного минимального и расширяемого индуктивного правила,

2) правила определяются симметрично для позитивных и негативных примеров ((±)- примеров),

3) базисные предикаты сходства содержат экзистенциальные условия ($\exists s^{\sigma}$), условия сходства (Sim), эмпирическую зависимость ( $ED^{\sigma}$) с условием исчерпываемости сходных примеров и нижнюю границу числа сходных $(\sigma)$ - примеров *k*, где $k \geq 2$ и $\sigma = +, -$.

Минимальный предикат (+)-сходства имеет следующее строение: $M^{+}_{a,n}(V, W) \rightleftharpoons$ $\exists k((\exists s^{+})\&(\mathrm{Sim})\&(\mathrm{ED}^{+})\&(k \geq 2))$ [6, 2]. Аналогичное строение имеет минимальный предикат (–)-сходства.

Усилениями $M^{\sigma}_{a}$ - предикатов сходства $(\sigma = +, -)$ являются условия различия $(d^{\sigma}_{0})$, сходства-различия $(d^{\sigma}_{2})$ [21] и запрета на контрпримеры $(b^{\sigma})$. Таким образом, усилениями $M^{\sigma}_{a}$ - предикатов являются $M^{+}_{ax,n}(V, W)$ и $M^{-}_{ay,n}(V, W)$, где $x \in \{b^{+}(V), d^{+}_{0}(V), d^{+}_{2}(V)\}$, $y \in \{b^{-}(V), d^{-}_{0}(V), d^{+}_{2}(V)\}$, а $I^{\sigma} = \{a^{\sigma}, (ab)^{\sigma}, (ad_0)^{\sigma}, (ad_0 b)^{\sigma}, (ad_2)^{\sigma},$

$(ad_2 b)^{\sigma}\}$, где $\sigma = +, -$, а $< I^{\sigma}, \circ, \wedge >$ – образуют дистрибутивные решетки с $z_1 \circ z_2 = \inf(z_1, z_2)$, $z_1 \wedge z_2 = \sup(z_1, z_2)$ [6].

В [8,10] реализованы ИС–ДСМ для подрешеток $< I_2^\sigma, \circ, \wedge >$, где $I_2^\sigma = \{a^\sigma, (ab)^\sigma, (ad_0)^\sigma, (ad_0 b)^\sigma\}$.

$b^+(V) \rightleftharpoons \forall X \forall Y((V \subset X) \to (J_{<1,n>}(X \Rightarrow_1 W) \vee J_{(\tau,n)}(X \Rightarrow_1 W)),$

$d_0^+(V) \rightleftharpoons \forall X \forall W \forall Z((J_{<1,n>}(X \Rightarrow_1 W) \,\&\, (V \subset X) \,\&\, ((X - V) \subset Z) \,\&\, \neg((X - V) = \varnothing) \,\&$
$\neg(V \subset Z)) \to \neg J_{<1,n>}(Z \Rightarrow_1 W)).$

Аналогично определяются $b^-(V)$ и $d_0^-(V)$.

Тогда $M_{ab,n}^\sigma(V,W) \rightleftharpoons M_{a,n}^\sigma(V,W) \,\&\, b^\sigma(V)$, $M_{ad_0,n}^\sigma(V,W) \rightleftharpoons M_{a,n}^\sigma(V,W) \,\&\, d_0^\sigma(V)$, где $\sigma = +,-$.

Формализацией и обобщениями индуктивных методов Д.С. Милля [21] являются правила правдоподобного вывода 1-го рода (п.п.в.-1), образованные булевскими комбинациями $M_x^\sigma$- и $M_y^\sigma$-предикатов, где $x \in I^+$, $y \in I^-$:

$$(I)_{x,y}^+ \quad \frac{J_{(\tau,n)}(V \Rightarrow_2 W), M_{x,n}^+(V,W) \,\&\, \neg M_{y,n}^-(V,W)}{J_{<1,n+1>}(V \Rightarrow_2 W)},$$

$(I)_{x,y}^-$ *для* $\neg M_{x,n}^+(V,W) \,\&\, M_{y,n}^-(V,W)$,

$(I)_{x,y}^\circ$ *для* $M_{x,n}^+(V,W) \,\&\, M_{y,n}^-(V,W)$,

$(I)_{x,y}^\tau$ *для* $\neg M_{x,n}^+(V,W) \,\&\, \neg M_{y,n}^-(V,W)$.

Все 4 п.п.в.-1 представимы посредством прямых произведений решеток для $M^\sigma$- и $\neg M^\sigma$-предикатов $(\sigma = +,-)$ (эти прямые произведения решеток изоморфны) [3, 6].

Декларативными представлениями в КАТ п.п.в.-1 будут импликации:

$\forall V \forall W((J_{(\tau,n)}(V \Rightarrow_2 W) \,\&\, M_{x,n}^+(V,W) \,\&\, \neg M_{y,n}^-(V,W)) \to J_{<1,n+1>}(V \Rightarrow_2 W))$ – для $(I)_{x,y}^+$; аналогичные импликации имеют место для $(I)_{x,y}^\sigma$, где $\sigma = -1, 0, \tau$.

Заметим, что в п.п.в.-1 встроено условие аргументации, соответствующее четырехзначной логике $A_4$[4]. Эти импликации обратимы (образуют эквивалентность), что означает ***локальное вынуждение*** соответствующих истинностных значений $\bar{\nu} = < \nu, n+1 >$, где $\nu = 1, -1, 0$ и множества истинностных значений $(\tau, n)$ для случая неопределенности. Сказанное означает ***конструктивность*** порождения истинностных значений и использование ***когерентной*** теории истины [22].

Правилами правдоподобного вывода 2-го рода (п.п.в.-2) являются выводы по аналогии, определяемые посредством $\Pi^\sigma$- предикатов [4]:

$\Pi_n^{+(V,W)} \rightleftharpoons \exists X((J_{<1,n>}(X \Rightarrow_2 W) \,\&\, (X \subset V) \,\&\, \forall U(((U \subseteq W) \,\&\, \neg(U = \varnothing)) \to$
$\neg \exists Z((J_{<-1,n>}(Z \Rightarrow_2 U) \vee J_{<0,n>}(Z \Rightarrow_2 U)) \,\&\, (Z \subset V)))).$

Определяются $\Pi_n^\sigma(V,W)$ для п.п.в.-2 $(II)_{x,y}^\sigma$, где $\sigma = -1, 0, \tau$ [4].

$$(II)_{x,y}^\sigma \quad \frac{J_{(\tau,n)}(V \Rightarrow_1 W), \Pi_n^\sigma(V,W)}{J_{<\nu,n+1>}(V \Rightarrow_1 W)}, \text{ где } \nu = \begin{cases} 1, \textit{если } \sigma = + \\ -1, \textit{если } \sigma = - \\ 0, \textit{если } \sigma = 0 \\ \tau, \textit{если } \sigma = \tau \end{cases}$$

Имеет место декларативное представление п.п.в.-2 посредством импликации, которые также обратимы: $\forall V \forall W((J_{(\tau,n)}(V \Rightarrow_2 W) \,\&\, \Pi_n^\sigma(V,W)) \to J_{<\nu,n>}(V \Rightarrow_1 W))$, где $\nu =$ $1, -1, 0, \tau$, а $\sigma = +, -, 0, \tau$, соответственно. Следствия $(II)_{x,y}^\sigma$ аналогичны посылкам $(I)_{x,y}^\sigma$, порождающим гипотезы о причинах.

Эти импликации выражают конструктивное ***каузальное вынуждение*** истинностных значений гипотез о предсказаниях исследуемых эффектов, то есть высказываний вида $J_{<\nu,n+1>}(C \Rightarrow_1 Q)$ или $J_{(\tau,n+1)}(C \Rightarrow_1 Q)$, где C, Q – константы.

## 1. ДСМ-исследования и пролонгированные каузальные вынуждения (PCF)

Определим базу фактов ИС-ДСМ: $БФ = БФ^+ \cup БФ^- \cup БФ^\tau$, где $БФ^+ =$ $\{< X, Y > | J_{<1,0>}(X \Rightarrow_1 Y)\}$, $БФ^- = \{< X, Y > | J_{<-1,0>}(X \Rightarrow_1 Y)\}$, а $БФ^\tau = \{< X, Y > | J_{(\tau,0)}(X \Rightarrow_1 Y)\}$.

Таким образом, $БФ = R, БФ^\sigma = R^\sigma$, где R, $R^\sigma$ - бинарные отношения $(\sigma = +,-,\tau)$, а каждое $R^\sigma$ представимо множеством высказываний с *J*-оператором, выражающих $(\sigma)$- факты в *J*-определимом языке JL [23]. Эти множества высказываний обозначим посредством $\Omega^\sigma$, где $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Omega^\tau$.

Неформальная идея эмпирической закономерности (ER) заключается в том, что наблюдаемый эффект **сохраняется** при расширениях множеств фактов, его представляющих. Следовательно, эмпирическая закономерность есть некоторая *регулярность* такая, что она не имеет *контрпримеров* [24, 8, 10].

Формализуем идею ER следующим образом: будем рассматривать последовательности расширяемых БФ( p), где *p*=0, 1, …, *s* такие, что $БФ(0) \subset БФ(1) \subset ...$

$\subset БФ(s)$, то есть, $R_0 \subset R_1 \subset ... \subset R_s$ и, соответственно $\Omega(0) \subset \Omega(1) \subset ... \subset \Omega(s)$. Расширение осуществляется следующим образом: $R_1 = R_0 \cup B_1, R_0 \cap B_1 = Ø$ и $R_{i+1} = R_i \cup B_{i+1}$, где $R_i \cap B_{i+1} =$ Ø, *i*= 0, 1,…, *s*.

Окончание расширения $R_0$ управляется принципом абдукции ДСМ-рассуждений 1-го рода [2, 4], формализующего идею абдукции Ч.С. Пирса [25, 26]:

$АКП^{(+)}\ \forall X \forall Y \exists V(J_{<1,0>}(X \Rightarrow_1 Y) \to \exists n(J_{<1,n>}(V \Rightarrow_2 Y) \,\&\, (V \subset X)))$. Аналогично определяется $АКП^{(-)}$. $АКП^{(\sigma)}$ – аксиомы каузальной полноты, характеризующие $БФ^\sigma$.

Имеет место ослабление $АКП^{(\sigma)} : (\exists^+)\ \exists X \exists Y(J_{<1,0>}(X \Rightarrow_1 Y) \,\&\, \exists n(J_{<1,n>}(V \Rightarrow_2 Y) \,\&$

$(V \subset X)))$. Аналогично определяется $(\exists^-)$.

Заметим, что $АКП^{(\sigma)}$ характеризуют обоснованность гипотез о (σ)-причинах таких, что они объясняют исходные факты из $БФ^\sigma$, а, следовательно, являются средством принятия гипотез [26].

Определим функции степени абдуктивного принятия гипотез на основе $АКП^{(\sigma)}$ и

$(\exists^\sigma) : \rho^\sigma(p) = \dfrac{|\tilde{БФ}^\sigma(p)|}{|БФ^\sigma(p)|}, p = 0,1,...,s;$ $\tilde{R}^\sigma = \widetilde{БФ}^\sigma(p) = \{\langle X, Y\rangle \mid \exists n \exists V(J_{\langle\nu, n\rangle}(X \Rightarrow_1 Y) \& (V \subset X)\}$,

$\sigma = +,-,\ \ \nu = \begin{cases} 1, если\ \sigma = + \\ -1, если\ \sigma = - \end{cases}$; а | | – число элементов множеств объясняемых фактов и всех фактов, соответственно.

Положим, что $\rho^\sigma(s) \geq \overline{\rho}^\sigma$, где $\overline{\rho}^\sigma$ – выбранный порог (например, 0,8). Таким образом, $\rho^\sigma(s) \geq \overline{\rho}^\sigma$ – условие завершения ДСМ-рассуждения для $R(0) \subset ... \subset R(s)$, где $R(p) = БФ(p)$, $p = 0,1,...,s$.

Пусть $\overline{O}_{x,y}(\Omega(p))$ – ДСМ-оператор, реализующий последовательное применение (синтез) индукции (п.п.в.-1) и аналогии (п.п.в.-2) [2, 5], тогда первый этап ДСМ-метода АПНИ есть последовательность $\overline{O}_{x,y}(\Omega(0)), \rho^{+}(0), \rho^{(-)}(0), ..., \overline{O}_{x,y}(\Omega(s)), \rho^{+}(s), \rho^{-}(s)$, где $\rho^{\sigma}(s) \geq \overline{\rho}^{\sigma}$, а $\sigma = +,-$, представляющая ДСМ-рассуждение для последовательности $БФ(0), ..., БФ(s)$.

Заметим, что существенно обнаружение *монотонности* $\rho^{\sigma}(p); \rho^{\sigma}(0) \leq ... \leq \rho^{\sigma}(s)$, а $R, R^{\sigma}$ и $\rho^{\sigma}(p)$ определимы в метаязыке MJL языка JL.

В [16, 24] определены предикаты сохранения истинностных значений гипотез о причинах $L_2^{\sigma}(V, Y, p)$ и гипотез о предсказаниях $L_1^{\sigma}(Z, Y, p)$, где $\sigma = +,-$, а $p = 0,1,...,s$.

Второй этап ДСМ-метода АПНИ – это *ДСМ-исследование*, что означает установление зависимости предиката $L_1^{\sigma}(Z, Y, p)$ от предиката $L_2^{\sigma}(V, Y, p)$. Эта зависимость есть реализация *пролонгированного каузального вынуждения (PCF)* для $R(0) \subset R(1) \subset ... \subset R(s)$ и $\Omega(0) \subset \Omega(1) \subset ... \subset \Omega(s)$, где $\rho^{\sigma}(s) \geq \overline{\rho}^{\sigma}$, $\sigma = +,-$.

Последовательности $\Omega(0), \Omega(1), ..., \Omega(s)$ соответствуют предикаты $V \Rightarrow_2^{(p)} Y$ и $X \Rightarrow_1^{(p)} Y$, зависящие от параметра p, где $p = 0,1,...,s$.

Кодом Cd ДСМ-исследования будем называть выражение $Cd = \nu_1 ... \nu_{s+1} \bullet \Theta_1 ... \Theta_{s+1}$, где • - символ конкатенации, $\nu_i$, $\Theta_i$ – типы истинностных значений гипотез о причинах $(J_{<\nu_i, n_p>}(C' \Rightarrow_2^{(p)} Q))$ и гипотез о предсказаниях $(J_{<\Theta_i, n_p>}(C \Rightarrow_1^{(p)} Q)$, где $C', C, Q$ - константы. $C_{d_1} = \nu_1 ... \nu_{s+1}$, $C_{d_2} = \Theta_1 ... \Theta_{s+1}$.

Код Cd называется *регулярным,* если:

1) $\nu_i = \Theta_i$, $i=0,1,…,s+1$; $\nu_i$, $\Theta_i=1,-1$; $\nu_i = \nu_j$, $j = 0,1,...,s+1$.

2) $\underbrace{\tau ... \tau}_{q} \underbrace{\nu ... \nu}_{s+1-q} \bullet \underbrace{\tau ... \tau}_{q} \underbrace{\nu ... \nu}_{s+1-q}$, $\nu = 1,-1$. В этом случае выделяются 2 подслучая $q < \frac{s+1}{2}$ и $q \geq \frac{s+1}{2}$.

Оба условия соответствуют *эмпирическим законам (EL) и эмпирическим тенденциям (ET)*. Если $q < \frac{s+1}{2}$ и $q \geq \frac{s+1}{2}$, то имеем эмпирические тенденции (**ET**) и подозрительные эмпирические тенденции (**SET**), соответственно.

В MJL определим генераторы гипотез о причинах и предсказаниях, типы истинностных значений которых образуют регулярные коды ДСМ-исследований для EL, ET и SET, соответственно. Эти определения специфицируют случаи сохранения типов истинностных значений гипотез в зависимости от монотонности $\rho^{\sigma}(p)$ и значений q, где $q < \frac{s+1}{2}$, либо $q \geq \frac{s+1}{2}$. Выполнимость условия монотонности будем обозначать посредством M, его невыполнимость – посредством $\neg M$ [16].

Предикаты $L_2^{\sigma}(V, Y, p)$ и $L_1^{\sigma}(Z, Y, p)$ являются генераторами $Cd = \nu ... \nu \bullet \nu ... \nu$, где $\nu$ есть 1, либо –1, а $\sigma = +,-$, соответственно; но имеет место $\neg M$ (для $p = 0,1,...,s$).

Предикаты $\hat{L}_2^{\sigma}(V, Y, p)$ и $\hat{L}_1^{\sigma}(Z, Y, p)$ являются усилениями генераторов $L_2^{\sigma}$ и $L_1^{\sigma}$ посредством условия M.

Эти предикаты являются генераторами эмпирических законов ER посредством пролонгированных каузальных вынуждений (PCF), определяемых ниже посредством доказуемого в [5, Часть II; 16] предложения.

**Предложение 1.**
$\forall V \forall Y \forall p \forall Z(L_2^+(V,Y,p) \,\&\, (V \subset Z) \,\&\, P(Z,p)) \to L_1^+(Z,Y,p))$, где $P(Z,p) =$
$\neg\exists V_0((J_{<-1,n_p>}(V_0 \Rightarrow_2^{(p)} Y) \vee J_{<0,n_p>}(V_0 \Rightarrow_2^{(p)} Y)) \,\&\, (V_0 \subset Z)))$.

Аналогичное предложение имеет место для σ = – .

Заменой переменных V и Y на константы $C'$ (носитель причины) и Q (эффект) получим $A_9^\sigma(C',Q)$ – *реализацию* каузального вынуждения $(\sigma = +,-)$. Аналогично определим $\hat{A}_9^\sigma$ и $\hat{A}_9^\sigma(C',Q)$ для предикатов $\hat{L}_2^\sigma(V,Y,P)$ и $\hat{L}_1^\sigma(Z,Y,P)$, усиленных условием монотонности M для $\rho^\sigma(p)$.

$A_9^\sigma(C',Q)$ и $\hat{A}_9^\sigma(C',Q)$ будут использованы для определения *эмпирических законов* [16].

Предикаты $L_{2,\tau}^\sigma(V,Y,p)$ и $L_{1,\tau}^\sigma(Z,Y,p)$ являются генераторами кодов Cd ДСМ-исследования вида $\underbrace{\tau\ldots\tau}_{q}\,\nu\ldots\nu \bullet \underbrace{\tau\ldots\tau}_{q}\,\nu\ldots\nu$ таких, что $q < \frac{s+1}{2}$. Посредством этих предикатов формулируются PCF для *эмпирических тенденций* ET с использованием доказуемого в [16].

**Предложение 2.** $A_{10}^+$ :

$\forall V \forall Y \forall p \forall Z((L_{2,\tau}^+(V,Y,p) \,\&\, (V \subset Z) \,\&\, P(Z,p) \,\&\, \mathrm{P}_1(V,Y,Z)) \to L_1^+(Z,Y,p))$,

где $P_1(V,Y,Z) \rightleftharpoons \forall V_1((J_{<1,n_p>}(V_1 \Rightarrow_2^{(p)} Y) \,\&\, \neg(\mathrm{V}_1 \subset V) \,\&\, \neg(\mathrm{V}_1 = V)) \to \neg(\mathrm{V}_1 \subset Z))$.

Подформула $P_1(V,Y,Z)$ выражает тот факт, что причины, отличные от V, не включатся в Z. $A_{10}^-$ формулируется аналогично, а $A_{10}^\sigma(C',Q)$ выражают *реализации PCF***.** Аналогично формулируется Предложение 2 для $A_{10}^-$ и для $\hat{A}_{10}^\sigma$ с условием монотонности M $(\sigma = +,-)$.

$A_{10}^\sigma(C',Q)$, $\hat{A}_{10}^\sigma(C',Q)$ являются реализациями PCF $A_{10}^\sigma$ и $\hat{A}_{10}^\sigma$, соответственно [16].

Для кодов ДСМ-исследований таких, что $Cd = \tau\ldots\tau\nu\ldots\nu \bullet \tau\ldots\tau\nu\ldots\nu$ и $q \geq \frac{s+1}{2}$, где q – число повторений $\tau$ определяются предикаты $\overline{L}_{2,\tau}^\sigma(V,Y,p)$ и $\overline{L}_{1,\tau}^\sigma(Z,Y,p)$ такие, что они являются их генераторами, то есть $V \Rightarrow_2^{(p)} Y$ и $Z \Rightarrow_1^{(p)} Y$ выполняются в БФ(p) для p=0,1,…,s согласно позициям с номером p в Cd так, что первые q позиций соответствуют типу истинностного значения $\tau$, а $q \geq \frac{s+1}{2}$.

Для $\overline{L}_{2,\tau}^\sigma(V,Y,p)$ и $\overline{L}_{1,\tau}^\sigma(V,Y,p)$ формулируется **Предложение 3** для $\overline{A}_{10}^\sigma$ и их реализации $\overline{A}_{10}^\sigma(C',Q)$. Аналогичное предложение имеет место для $\overline{\hat{L}}_{2,\tau}^\sigma(V,Y,p)$ и $\overline{\hat{L}}_{2,1}^\sigma(Z,Y,p)$, которым соответствуют реализации PCF $\overline{\hat{A}}_{10}^\sigma$, где $\sigma = +,-$. Предложение 3 аналогично Предложению **2**.

Заметим, что $\overline{A}_{10}^\sigma$ и $\overline{\hat{A}}_{10}^\sigma$ характеризуют *подозрительные эмпирические* тенденции **SET**.

## 2. Истории возможных миров и интегральные каузальные вынуждения

Имеется исходная последовательность БФ(p), где $p$ = 0, 1,…, $s$: (*) $R_0 \subset R_1 \subset \ldots \subset R_s$ и, соответственно, $\Omega(0) \subset \Omega(1) \subset \ldots \subset \Omega(s)$, такие, что $R_{i+1} = R_i \cup B_{i+1}$, $R_i \cap B_{i+1} = \varnothing$, $i$ = 0, 1,…, s. Относительно $(*)$ можно для каждой пары $< C', Q >$ установить наличие (отсутствие) соответствующего типа PCF, то есть, его реализацию как EL, ET или SET. Однако заданная $(*)$ не является *единственно* возможной, поэтому для обнаружения *надежности* в распознавании эмпирических закономерностей следует испытать все возможные расширения для $(*)$, которыми являются (s+1)! перестановок $R_0, B_1, ...B_s$.

Используем терминологию семантики модальных логик [27] и будем полагать, что $\Omega(p)$, $p$ = 0, 1,…, $s$, есть возможные миры (PW). Тогда каждую перестановку PW будем называть историей возможных миров $HPW_i$, где i=0,1,…,(s+1)!

Множество возможных эмпирических закономерностей $ER = EL \cup ET \cup SET$ будем определять для каждой пары $< C', Q >$ («причина - эффект») относительно ее поведения для всех $HPW_i$, $i$ = 0, 1,…, $s$+1 при фиксированной стратегии ДСМ-рассуждений $Str_{x,y}$ из заданного множества стратегий $\overline{Str}$ [5, 6]. С этой целью будем распознавать определенные выше пролонгированные каузальные вынуждения (PCF) для каждой $HPW_i$, $i$ = 0, 1,…, ($s$+1)!

Множество всех таких PCF будем называть *интегральным каузальным вынуждением (ICF),* определяющим наличие и тип эмпирической закономерности из $ER = EL \cup ET \cup SET$.

Зафиксируем $Str_{x,y}$ такую, что $x \in I^+$, $y \in I^-$, а $п.п.в.-1^{(\sigma)}$ представимы посредством прямых произведений решеток $M^{\sigma}$ и $\neg M^{\sigma}$ предикатов $(\sigma = +,-)$ [5, 6]. Для $Str_{x,y}$, образованных посредством п.п.в.-1 и п.п.в.-2, а также $АКП^{(\sigma)}_{x,y}$, $(\exists^{(\sigma)}_{x,y})$ и $\rho^{\sigma}(p)$, где $\sigma = +,-$, рассмотрим множество историй возможных миров $\overline{HPW} = \{HPW_1, ..., HPW_{(s+1)!}\}$.

Посредством п.п.в.-1 и п.п.в.-2, которые реализуют локальные и каузальные вынуждения истинностных значений гипотез о предсказаниях, соответственно, определим выполнимость PCF в историях возможных миров $HPW_i$, где i=0,1,…,s, а $\overline{HPW} = \{HPW_1, ..., HPW_{(s+1)!}\}$. Формула $\varphi$ истинна в $HPW^{(h)}$. $HPW^{(h)} \vDash \varphi$, если $\Omega^{(h)}(p) \vDash \varphi$ для всех p=0,1,…,s: $V^{(h)}[\varphi] = t$, то есть, $\varphi$ истинна во всех возможных мирах из $HPW^{(h)}$.

Оценка $V^{(h)}[\varphi]$ реализуется в двухосновных алгебраических системах $Sem^{(p)}$ = <$\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\Rightarrow^{(p)}_1, \Rightarrow^{(p)}_2$>. Далее определим модальный оператор необходимости типа ***a*** $\Box_a$, применимый к $\hat{A}^{\sigma}_9(C', Q)$ для пары $< C', Q >$, $\sigma = +,-$.

$\Box_a$ $\hat{A}^{\sigma}_9(C', Q)$, если и только если выполняются условия $(H_1)-(H_3)$:

$(H_1)$ $HPW_1 \vDash \hat{A}^{\sigma}_9(C', Q)$, где $HPW_1$- некоторая начальная история возможных миров; $(H_2)$ $\exists i$ ((i>1) & ($HPW_i \vDash \hat{A}^{\sigma}_9(C', Q)$)), $(H_3)$ $\forall j$ ((j>1)$\rightarrow$ (($HPW_j \vDash \hat{A}^{\sigma}_9(C', Q)$)$\vee$($HPW_j \vDash$ $\hat{A}^{\sigma}_{10}(C', Q)$))).

Аналогично определим $\Box_b$, заменив $\hat{A}^{\sigma}_9$ на $A^{\sigma}_9$ и заменив в $(H_3)$ $\hat{A}^{\sigma}_{10}$ на $A^{\sigma}_{10}$ (то есть, исключив условие M).

Определим $\Box_c$, добавив к $(H_1)$ и $(H_2)$: $(H_3')$ $\exists j$ ($HPW_j \vDash \overline{\hat{A}}^{\sigma}_{10}(C', Q)$,

$(H_4)$ $\forall k$ ((k>1)$\rightarrow$(($HPW_k \vDash \overline{\hat{A}}^{\sigma}_{10}(C', Q)$)$\vee$($HPW^{(k)} \vDash \hat{A}^{\sigma}_{10}(C', Q)$)$\vee$($HPW^{(k)} \vDash \hat{A}^{\sigma}_9(C', Q)$))).

Определим также $\Box_d$, заменив $\hat{A}^{\sigma}_9(C', Q)$ на $A^{\sigma}_9(C', Q)$, $\overline{\hat{A}}^{\sigma}_{10}(C', Q)$ на $\overline{A}^{\sigma}_{10}(C', Q)$.

Далее определим $\Box_e$, $\Box_f$, $\Box_g$ и $\Box_h$.

$\Box_e$ определим, добавив к $(H_1)$ условие $(H_5)$ $\forall j$ ((j>1)$\rightarrow$ ($HPW_j \vDash$ $\hat{A}_{10}^{\sigma}(C',Q)$)).

$\Box_f$ определим посредством $(H_6)$ $HPW_1 \vDash A_9^{\sigma}$ $(C',Q)$,

$(H_7)$ $\forall j$ ((j>1)$\rightarrow$($HPW_j \vDash$ $A_{10}^{\sigma}(C',Q$ ))).

$\Box_g$ определим посредством $(H_1)$ $HPW_1 \vDash \hat{A}_9^{\sigma}(C',Q)$,

$(H_8)$ $\exists j$ ((j>1) & ($HPW_j \vDash \bar{\hat{A}}_{10}^{\sigma}(C',Q)$)),

$(H_9)$ $\forall i$ ((i>1)$\rightarrow$ (($HPW_i \vDash$ $\bar{\hat{A}}_{10}^{\sigma}(C',Q)$) $\vee$ ($HPW_i \vDash \hat{A}_{10}^{\sigma}(C',Q)$))).

$\Box_h$ определим посредством $(H_6)$ $HPW_1 \vDash A_9^{\sigma}(C',Q)$,

$(H_{10})$ $\forall i$ ((i>1)$\rightarrow$ (($HPW_i \vDash$ $\bar{A}_{10}^{\sigma}(C',Q)$)$\vee$ ($HPW_i \vDash A_{10}^{\sigma}(C',Q)$))).

Определим модальный оператор возможности $\Diamond_i$: $\Diamond_i$ $\hat{A}_1^{\sigma}$, если и только если выполняются условия $(H_{11})$ и $(H_{12})$: $(H_{11})$ $HPW_1 \vDash \hat{A}_{10}^{\sigma}(C',Q)$,

$(H_{12})$ $\forall h$ ((h>1)$\rightarrow$ ($HPW_h \vDash$ $\hat{A}_{10}^{\sigma}(C',Q)$)). Заменив в $(H_{11})$ и $(H_{12})$ $\hat{A}_{10}^{\sigma}(C',Q)$ на $A_{10}^{\sigma}(C',Q)$ получим $(H_{13})$ и $(H_{14})$, определяющие $\Diamond_j$ $A_{10}^{\sigma}(C',Q)$.

Определим $\Diamond_k$ посредством $(H_{11})$, $(H_{15})$ и $(H_{16})$:

$(H_{15})$ $\exists h$((h>1) & ($HPW_h \vDash \bar{\hat{A}}_{10}^{\sigma}(C',Q)$)),

$(H_{16})$ $\forall h$ ((h>1) $\rightarrow$(($HPW_h \vDash$ $\hat{A}_{10}^{\sigma}(C',Q)$)$\vee$ ($HPW_h \vDash \bar{\hat{A}}_{10}^{\sigma}(C',Q)$))).

Определим $\Diamond_l$ $\hat{A}_{10}^{\sigma}(C',Q)$, заменив в $(H_{15})$ и $(H_{16})$ $\bar{\hat{A}}_{10}^{\sigma}(C',Q)$ на $\bar{A}_{10}^{\sigma}(C',Q)$ и $\hat{A}_{10}^{\sigma}(C',Q)$ на $A_{10}^{\sigma}(C',Q)$.

Определим также модальные операторы подозрительной возможности $\nabla_m$ и $\nabla_n$.

$\nabla_m$ $\bar{\hat{A}}_{10}^{\sigma}(C',Q)$, если и только если выполняются условия $(H_{17})$ $HPW_1 \vDash \bar{\hat{A}}_{10}^{\sigma}(C',Q)$,

$(H_{18})$ $\forall h$ ((h>1) $\rightarrow$($HPW_h \vDash$ $\bar{\hat{A}}_{10}^{\sigma}(C',Q)$)).

$\nabla_n$ $\bar{A}_{10}^{\sigma}(C',Q)$, если и только если выполняются условия $(H_{19})$ $HPW_1 \vDash \bar{A}_{10}^{\sigma}(C',Q)$,

$(H_{20})$ $\forall h$ ((h>1) $\rightarrow$($HPW_h \vDash$ $\bar{A}_{10}^{\sigma}(C',Q)$)).

*Интегральные каузальные вынуждения* (ICF) определяют модальности $\Box$, $\Diamond, \nabla$ и их виды, обозначаемые соответствующими индексами – они являются *именами* соответствующих эмпирических закономерностей из $ER = EL \cup ET \cup SET$, где $EL = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, $ET = \{i,j,k,l\}$, $SET = \{m,n\}$. Используя условия $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ и $\overline{M}(x)$, такие, что $\alpha(x) > \beta(x) > \gamma(x)$, $x \in ER$, $\alpha(x)$ есть начальная $HPW_1$, $\beta(x)$ есть $HPW_{\beta}$ такая, что она представима $Cd = \nu ... \nu \bullet \nu ... \nu$ или Cd = τ…τν…ν • τ…τν…ν и $HPW_{\beta} \in \overline{HPW}$; $\gamma(x)$ есть одно из условий $q < \frac{s+1}{2}$, $q \geq \frac{s+1}{2}$; $\overline{M}(x)$ принимает значения $M, \neg M$, где $M > \neg M$. Условия $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ определяют общее условие $\psi(x)$. Тогда определимо отношение частичного порядка x ⊒ y $\rightleftharpoons <\psi(x), \overline{M}(x)> \geq <\psi(y), \overline{M}(y)>$ [16].

**Предложение 4.** Множество эмпирических закономерностей ER является частично упорядоченным отношением ⊒, а его *элементы а* и *n* являются *наибольшим и наименьшим* элементами $\forall x\,(a \sqsupseteq \mathrm{x})$ и $\forall x\,(\mathrm{x} \sqsupseteq \mathrm{n})$.

Очевидно, что ⊒ упорядочивает множество модальностей, а □ либо мажорирует $\Diamond$ и $\nabla$, либо с ними несравнима.

Заметим, что ER определяется относительно $Str_{x,y}$ так, что $ER_{x,y} = ER^{+}_{x,y} \cup ER^{-}_{x,y}$, а потому число возможных эмпирических закономерностей для $Str_{x,y}$ $|ER_{x,y}| = |ER^{+}_{x,y}| + |ER^{-}_{x,y}|$, а $|ER| = (|EL| + |ET| + |Set|)\cdot|\overline{Str}|$.

В [6, 9, 10] $|\overline{Str}| = 16$, а так как имеем $|EL| = 8\cdot 2$, $|ET| = 4\cdot 2$, $|Set| = 2\cdot 2$, то $|ER| = 448$.

Очевидно, что $|ER|$ является *верхней границей* для реально обнаруживаемых эмпирических закономерностей.

Следует заметить, что характеризация ER осуществляется в метаязыке MJL, то есть, в MMJL, в котором завершается структурное описание ДСМ-эвристики, порождающее множество моделей КАТ для каждой $Str_{x,y}$ [5, Часть II],

В MJL определяется абдукция 2-го рода. Рассмотрим частный случай CF для $\hat{A}^{+}_{9}$ и его реализации $\hat{A}^{+}_{9}(C',Q)$: $\forall p \forall Z((\hat{L}^{+}_{2}(C',Q,p)\,\&\,(\mathrm{C}' \subset \mathrm{Z})\,\&\,\mathrm{P(Z,p)}) \to \hat{\mathrm{L}}^{+}(Z,Q,p))$, используя $\rho^{+}(\overline{s}) \geq \overline{\rho}^{+}$, которая есть результат абдукции 1-го рода, и $\hat{L}^{+}_{2}(V,Y,\overline{s})$, $\hat{L}^{+}_{1}(Z,Y,\overline{s})$, где $\overline{s}$ - константа, получим

$$\begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \forall Z((\hat{L}^{+}_{2}(C',Q,\overline{s})\,\&\,(\mathrm{C}' \subset \mathrm{Z})\,\&\,\mathrm{P(Z,p)}) \to \hat{\mathrm{L}}^{+}_{1}(Z,Q,\overline{s})).$$

Так как $A^{\sigma}_{9}, \hat{A}^{\sigma}_{9}$ доказуемы в MJL[5, Часть II; 16], а, следовательно, $V[\hat{A}^{+}_{9}] = t$, а потому $V[\hat{A}^{+}_{9}(C',Q)] = t$, то для $\hat{A}^{+}_{9}(C',Q)$ выполняются условия $(H_1)-(H_3)$, а, следовательно, $\Box_a$ $\hat{A}^{+}_{9}(C',Q)$ истинно относительно $\overline{HPW}$ и фиксированной $Str_{x,y}$:

$$\overline{HPW} \vDash \Box_a\, A^{+}_{9}(C',Q).$$

Наряду с функциями оценки $V_{HPW_i}$, соответствующих CF (они – средство когерентной теории истины [22]), следует применить оценку $Ver$, верифицирующую результат предсказания эффекта $L^{+}_{1}(Z,Q,\overline{s})$, сохраняющегося для всех p=0,1,…,$\overline{s}$ (очевидно, что это средство корреспондентской теории истины [28]). В связи со сказанным введем допущение $\forall Z((C' \subset Z) \to Ver[L^{+}_{1}(Z,Q,\overline{s})] = t)$, представляющее вторую посылку абдуктивного вывода, необходимую для формализации принятия порожденной гипотезы – основы пролонгированного каузального вынуждения (PCF).

Таким образом, получим:

$$\frac{\begin{array}{l}\Box_a\ \forall Z((\hat{L}^{+}_{2}(C',Q,\overline{s})\,\&\,(\mathrm{C}' \subset \mathrm{Z})\,\&\,\mathrm{P(Z,p)}) \to \hat{\mathrm{L}}^{+}_{1}(Z,Q,\overline{s}))\\ \forall Z((C' \subset Z) \to Ver[L^{+}_{1}(Z,Q,\overline{s})] = t)\end{array}}{\Box_a\ L^{+}_{2}(C',Q,\overline{s})}$$

Для фиксированной $Str_{x,y}$ имеем $\overline{HPW}_{x,y} \vDash \Box_a\ L^{+}(C',Q,\overline{s})$, при условии $Ver[L^{+}_{1}(Z,Q,\overline{s})] = t$. Очевидно, что аналогичные абдуктивные выводы формулируются для всех элементов ER с операторами □, $\Diamond$, $\nabla$.

Сформулируем теперь ***принцип оправдания*** ДСМ-эвристики обнаружения эмпирических закономерностей [16].

Пусть $R_0^{(1)}, R_1^{(1)}, ..., R_s^{(1)}$ $(**)$ – начальная последовательность БФ($p$), $p$ = 0, 1, …, $s$ такая, что она порождает $\overline{HPW}^{(1)}, |\overline{HPW}^{(1)}| = (s+1)!$.

Будем к $(**)$ последовательно добавлять $R_{s+1}^{(2)}, ..., R_{s+k-1}^{(k)}$ такие, что $R_s^{(1)} \subset R_{s+1}^{(2)} \subset ... \subset R_{s+k-1}^{(k)}$ согласно правилу расширения БФ(p).

Пусть, далее $\overline{HPW}^{(2)}, ..., \overline{HPW}^{(k)}$ - соответствующие множества историй возможных миров. Пусть также $M_s$ - модальный оператор, применимый к следствию абдуктивного вывода 2-го рода: $\overline{HPW}^{(1)} \models M_s L_2^{\sigma}(C', Q, \bar{s})$, где $\sigma = +,-$. Тогда сделаем $k$–1 расширение $(**)$ и получим последовательность модальных операторов $M_{s+1}, ..., M_{k-1}$, называем ее *модальным следом* расширений $(**)$. Пусть имеет место условие $M_{k-1} \sqsupseteq M_{k-2} \sqsupseteq \ldots \sqsupseteq M_s$, тогда будем говорить, что модальный след расширений $(**)$ имеет k-1 оправдания $L_2^{\sigma}(C', Q, \bar{s})$ и $L_1^{\sigma}(Z, Q, \bar{s})$ для всех Z, таких, что $C' \subset Z$.

Рассмотрим $\hat{A}_9^{\sigma}$, устраним $\forall V$ и $\forall Y$ из префикса и получим $\hat{A}_9^{\sigma}(V, Y)$, где V и Y имеют свободные вхождения в $\hat{A}_9^{\sigma}(V, Y)$. Тогда введем следующее определение: $Caus_a^{\sigma}(V, Y) \rightleftharpoons \Box_a \hat{A}_9^{\sigma}(V, Y)$ - «V – необходимая $(\sigma)$ - причина Y типа $a$», где $a \in EL$, $\sigma = +,-$.

Ценность гипотез, являющихся реализациями $Caus_a^{\sigma}(V, Y)$ имеет степень $h$, где $1 \le h \le k-1$, в соответствии с модальным следом расширений начальной последовательности БФ(p).

Очевидно, что сформулированный процесс оправдания гипотез имеет место для всех модальностей, соответствующих ER.

## Заключение

Итак, подведем итог обсуждению эвристики ДСМ-метода АПНИ**е**.

1) Основой ДСМ-эвристики является **синтез** познавательных процедур – индукции, аналогии и абдукции, реализующий естественный познавательный процесс: анализ данных (индукция) – предсказание (аналогия) – объяснение (абдуктивное принятие гипотез).

2) Индукция основана на локальном вынуждении (с использованием сходства фактов), гипотез о $(\pm)$ - причинах.

3) Эти гипотезы используются для каузального вынуждения гипотез о предсказаниях.

4) Принятие порожденных гипотез контролируется абдукцией $1^{\underline{ого}}$ рода [3, 25, 26]. Это принятие завершает ДСМ-рассуждения.

5) ДСМ-рассуждения используются для проведения ДСМ-исследований – обнаружения множества эмпирических закономерностей $ER = EL \cup ET \cup SET$.

Рассматривается последовательность расширяемых (вложенных) баз фактов и гипотезы порождаются и оцениваются посредством пролонгированного каузального вынуждения (PCF).

6) PCF используется для порождения множества ER посредством множества всех возможных историй возможных миров $(\overline{HPW})$. Для каждой $Str_{x,y}$ порождается $ER_{x,y}$, а $\overline{ER} = \left\{ER_{x,y} \mid (x \in I^+)\&(y \in I^-)\right\}$.

7) Множествам $\overline{Str}$ и $\overline{ER}$ соответствует множество КАТ [2; 5, Часть II].

8) Ценность гипотез устанавливается посредством абдукции 2-го рода, порождающей гипотезы с приписываемыми модальными операторами типов $\Box$, $\Diamond$, $\nabla$.

9) Расширения начальной последовательности $БФ^{(1)}(p)$ и использование верификации порождаемых гипотез формирует модальный след ДСМ-исследования, подтверждающий *k*-1 раз гипотезы, принятые посредством абдукции 2-го рода.

10) Использование множеств $\overline{Str}$ и $\overline{ER}$, а также $БФ^{+}(p)$ и $БФ^{-}(p)$ является основанием для *параллельной* реализации ИС-ДСМ и ДСМ-исследований и использования суперкомпьютеров для осуществления интеллектуального анализа данных.

Таким образом, пункты (1) – (10) образуют ДСМ-эвристику обнаружения нового знания (knowledge discovery) посредством ИС-ДСМ.

## Приложения

В Приложениях добавим Дерево T для классификации ER (Приложение 1) [16], формулировку приближенного варианта порождения ER (Приложение 2) и определение квазиаксиоматических теорий (КАТ) ([5], Часть II) (Приложение 3).

### Приложение 1. Дерево T классификации ER

Приводим Дерево классификации ER, рассмотренное в [16]. Дерево T представляет классификацию $ER = ER^{+} \cup ER^{-}$ для *типов* эмпирических закономерностей без различения $ER^{+}$ и $ER^{-}$.

Посредством T формулируется отношение строгого порядка $\sqsupset$ на ER, которое расширяется до отношения частичного порядка $\sqsupseteq$ с наибольшим и наименьшим элементом.

Ради удобства записи введем следующие обозначения *a, b, c, d, e, f, g, h* вместо $EL_s, EL_1, EL_2, EL_3, EL, EL_4, EL_5, EL_6 : a / EL_s, b / EL_1, c / EL_2, d / EL_3, e / EL, f / EL_4, g / EL_5, h / EL_6$.

Имеем следующие мажоранты $\langle \nu,\nu \rangle$ старше $\langle \tau,\nu \rangle$ (первая мажоранта), $\langle \nu,\nu \rangle | \langle \tau,\nu \rangle$ старше $\langle \tau,\nu \rangle$ (вторая мажоранта), $q < \frac{s+1}{2}$ старше $q \geq \frac{s+1}{2}$: $1^{ая}$ мажоранта старше $2^{ой}$ мажоранты, $2^{ая}$ мажоранта старше $q \geq \frac{s+1}{2}$.

Сформируем определения *ER* - порядка на множестве всех эмпирических закономерностей, заданных для произвольной, но фиксированной стратегии ДСМ - рассуждений из множества всех имеющихся стратегий $\overline{Str}$.

Посредством *X, Y* будем обозначать переменные для *EL*, а посредством $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ и $\overline{M}(x)$ будем обозначать функции с областями значений (ranges).

$\left\{\langle \nu,\nu \rangle^{*}, \langle \nu,\tau \rangle^{*}\right\}; \left\{\langle \nu,\nu \rangle | \langle \tau,\nu \rangle, \langle \tau,\nu \rangle\right\}; \left\{q < \frac{s+1}{2}, q \geq \frac{s+1}{2}\right\}$; соответственно, где $\langle \nu,\nu \rangle^{*}, \langle \nu,\tau \rangle^{*}$ - обозначения возможных *типов Cd* начальной истории возможных миров *(PW)*; $\langle \nu,\nu \rangle | \langle \tau,\nu \rangle, \langle \tau,\nu \rangle$ – обозначения для типов *Cd* историй *PW*, являющихся потомками начальной истории *PW* ($\langle \nu,\nu \rangle | \langle \tau,\nu \rangle$ – тип историй *PW* таких, что он содержит *Cd* $\langle \nu,\nu \rangle$ и *Cd*$\langle \tau,\nu \rangle$); $q < \frac{s+1}{2}$, $q \geq \frac{s+1}{2}$ – условия, используемые в спецификациях каузальных вынуждений посредством $A_{10}^{\sigma}$ и $\overline{A}_{10}^{\sigma}$, соответственно.

Посредством $\overline{M}$ будем обозначать функции такие, что их областью определения является множество $\{M, \neg M\}$, где *M* обозначает монотонное неубывание $\rho^{\sigma}(p)$, а $\neg M$ – его невыполнимость.

На множестве $\{\alpha, \beta, \gamma, M, \neg M\}$ определим отношение строгого порядка >: $\alpha > \beta > \gamma$, $M > \neg M$.

Определим, далее, отношение мажорирования $\sqsupset$.

$X \sqsupset Y$, если имеют место (1) или (2), или (3), или (4):

1) $(\alpha(X) > \alpha(Y))\,\&\,(\overline{M}(X) = \overline{M}(Y))$,

2) $(\alpha(X) = \alpha(Y))\,\&\,(\beta(X) > (\beta(Y))\,\&\,(\overline{M}(X) = \overline{M}(Y))$,

3) $(\alpha(X) = \alpha(Y))\,\&\,(\beta(X) = \beta(Y)\,\&(\gamma(X) > \gamma(Y))\,\&\,(\overline{M}(X) = \overline{M}(Y))$,

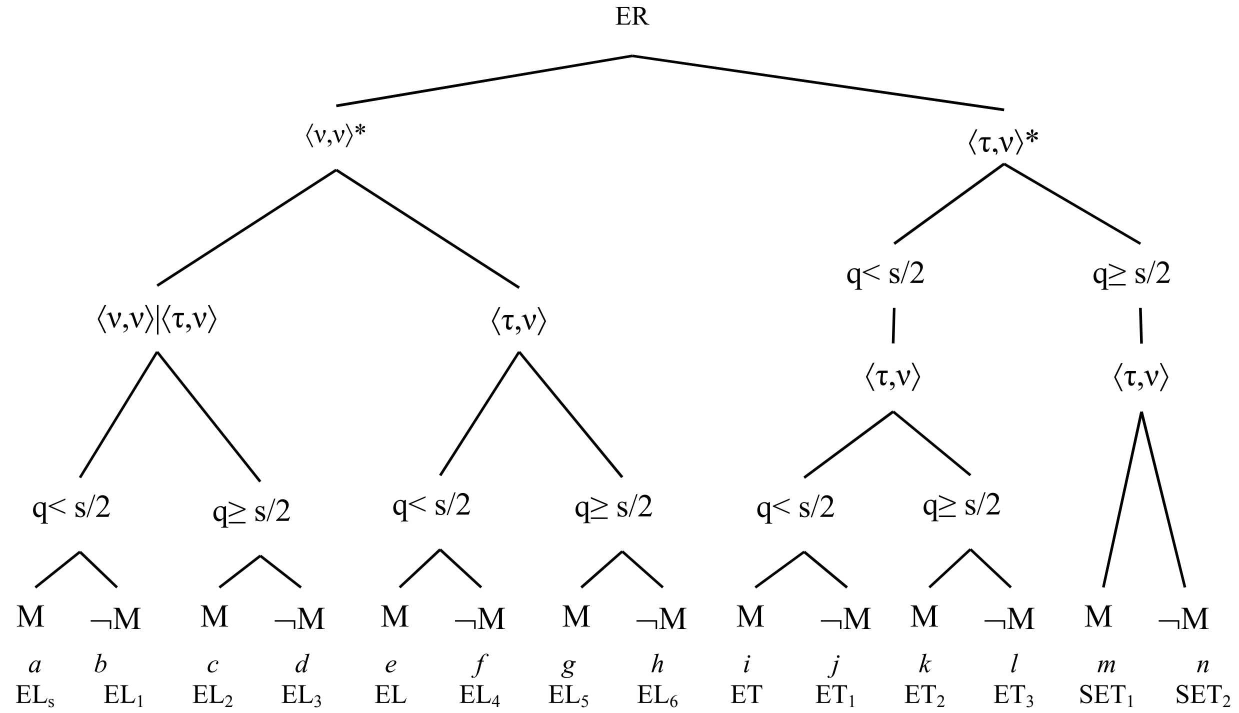
4) $(\alpha(X) = \alpha(Y))\,\&\,(\beta(X) = \beta(Y)\,\&(\gamma(X) = \gamma(Y))\,\&\,(\overline{M}(X) > \overline{M}(Y))$.

Пусть $\Psi_i(X)$ и $\Psi_i(Y)$, где $i$ = 1, 2, 3, 4 представляют условия, характеризующие в (1), (2), (3), (4) X и Y, соответственно. Тогда положим, что $\Psi_i(X) > \Psi_i(Y)$, где $i$ = 1, 2, 3, 4, а $X \sqsupseteq Y$, если и только если $\langle \psi(X), \overline{M}(X) \rangle \rangle \langle \psi(Y), \overline{M}(Y) \rangle$, что означает, что $\psi(X) > \psi(Y)$ и $\overline{M}(X) > \overline{M}(Y)$.

Тогда определим и несравнимость $X$ и $Y$, обозначив ее посредством $X \parallel Y : X \parallel Y$, если и только если $((\psi(X) > \psi(Y))\,\&\,\overline{M}(Y) > \overline{M}(X))) \vee ((\psi(Y) > \psi(X))\,\&\,(\overline{M}(X) > \overline{M}(Y))$.

Очевидно, что $X = Y$, если $(\psi(X) = \psi(Y))\,\&\,(\overline{M}(X) = \overline{M}(Y))$.

Согласно определению отношения $\sqsupset$ построим дерево классификации эмпирических закономерностей *(ER)* ***T***, начальной вершиной которого является *ER*, а две непосредственно следующими *<ν, ν>* и <τ, ν>**, представляющие типы кодов *Cd*, порождаемые каузальными вынуждениями $A_9^\sigma$ и $A_{10}^\sigma$ или $\overline{A}_{10}^\sigma$ для эмпирических законов *(EL$^\sigma$)* и эмпирических тенденций *(ET$^\sigma$)* или подозрительных эмпирических тенденций *(SET$^\sigma$)* с условием $q \geq \dfrac{s+1}{2}$, соответственно.




$ER = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n\}$,

$EL = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,

$ET = \{i, j, k, l\}$.

Рис. 1. Дерево **T**

## Приложение 2. Способ приближенного порождения эмпирических закономерностей

Рассмотрим частный случай порождения с использованием PCF $A_9^+$. Пусть $A_9^+(C',Q)$ – реализация $A_9^+$, а $L_1^+(Z,Q,p)$ и $L_2^+(C',Q,p)$ – подформулы $A_9^+(C',Q)$. Пусть, далее, $\bar{s}$ – значение p такое, что $\rho^+(\bar{s}) \ge \bar{\rho}^+$. Тогда $L_1^+(C,Q,\bar{s})$ и $L_2^+(C',Q,\bar{s})$, где $C' \subset C$, соответствуют $J_{<1,n_{\bar{s}}>}(C' \Rightarrow_2^{(\bar{s})} Q)$ и $J_{<1,n_{\bar{s}}+1>}(C \Rightarrow_1^{(\bar{s})} Q)$.

Пусть $A_9^+(C',Q)$ – реализация CF $A_9^+$ для истории возможных миров $HPW_1$, тогда можно породить истории всех возможных миров $\overline{HPW}$, где $HPW_1$ – *действительный* мир и $HPW_1 \in \overline{HPW}$, а $|\overline{HPW}| = (\bar{s}+1)!$, если $HPW_1 = \{БФ_1(0), БФ_1(1), ..., БФ_1(s)\}$.

Рассмотрим $\Omega(i,p)$, где $i = 1,...,(\bar{s}+1)!$, $p = 0,1,...,\bar{s}$, а $\Omega(i,p)$ представление $БФ_i(p)$ посредством *J*-формул вида $J_{<\nu,0>}(C \Rightarrow_1^{(p)} Q), J_{(\tau,0)}(C \Rightarrow_1^{(p)} Q)$, где $\nu \in \{1, -1, 0\}$.

Применение п.п.в.-1 (правил индуктивного вывода) к $\Omega(i,p)$ порождает множество гипотез о причинах $\tilde{\Delta}(i,p)$, представимых *J*-формулами вида $J_{<\nu,n_p>}(C' \Rightarrow_2^{(p)} Q)$ и $J_{(\tau,n_p)}(C' \Rightarrow_2^{(p)} Q)$. Применение же п.п.в.-2 (правил вывода по аналогии) к $\Omega(i,p)$ порождает множество гипотез о предсказаниях $\tilde{\Omega}(i,p)$, представимых *J*-формулами вида $J_{<\nu,n_p+1>}(C \Rightarrow_1^{(p)} Q)$ и $J_{(\tau,n_p+1)}(C \Rightarrow_1^{(p)} Q)$.

В MJL определим метапредикат непротиворечивости Consis *J*-формул (гипотез о причинах и гипотез о предсказаниях), принадлежащих $\tilde{\Delta}(1,\bar{s})$ и $\tilde{\Omega}(1,\bar{s})$ для $HPW_1$; и множеств порожденных гипотез для $HPW_j$, $j = 2,...,(\bar{s}+1)!$ и $p = 0,1,...,\bar{s}$ :

Consis $(J_{<1,n_{\bar{s}}>}(C' \Rightarrow_2^{(\bar{s})} Q), \tilde{\Delta}^-(j,p) \cup \tilde{\Delta}^0(j,p)) \rightleftharpoons \neg((J_{<-1,n_{\bar{s}}>}(C' \Rightarrow_2^{(\bar{s})} Q) \in \tilde{\Delta}^-(j,p)) \vee$

$(J_{<0,n_{\bar{s}}>}(C' \Rightarrow_2^{(\bar{s})} Q) \in \tilde{\Delta}^0(j,p)))$, аналогично Consis определяется для $J_{<-1,n_{\bar{s}}>}(C' \Rightarrow_2^{(\bar{s})} Q)$ и $\tilde{\Delta}^+(j,p) \cup \tilde{\Delta}^0(j,p)$;

Consis $(J_{<1,n_{\bar{s}}+1>}(C \Rightarrow_1^{(\bar{s})} Q), \tilde{\Omega}^-(j,p) \cup \tilde{\Omega}^0(j,p) \rightleftharpoons \neg((J_{<-1,n_{jp}>}(C \Rightarrow_1^{(\bar{s})} Q) \in \tilde{\Omega}^-(j,p)) \vee$

$(J_{<0,n_{jp}>}(C \Rightarrow_1^{(p)} Q) \in \tilde{\Omega}^0(j,p)))$, аналогично Consis определяется для $J_{<-1,n_{\bar{s}}+1>}(C \Rightarrow_1^{(\bar{s})} Q)$ и $\tilde{\Omega}^+(j,p) \cup \tilde{\Omega}^0(j,p)$.

Напомним, что $\tilde{\Delta}^\sigma(j,p)$ и $\tilde{\Omega}^\sigma(j,p)$ – множества гипотез, порожденных п.п.в.-1 и п.п.в.-2, соответственно, где $\sigma \in \{+,-,0\}$.

Сформулируем теперь принципы *приближенного* порождения эмпирических закономерностей типа $A_9^+$ $P_{r,9}^+1$ и $P_{r,9}^+2$ :

$P_{r,9}^+1$ $\forall Z \forall j \forall p(((2 \le j \le (\bar{s}+1)!) \,\&\, (0 \le p \le \bar{s}) \,\&\, L_1^+(Z,Q,\bar{s})) \to Consis\ (J_{<1,n_{\bar{s}}+1>}(Z \Rightarrow_1^{(\bar{s})} Q),$
$\tilde{\Omega}^-(j,p) \cup \tilde{\Omega}^0(j,p))))$,

$P_{r,9}^+2$ $\forall j \forall p(((2 \le j \le (\bar{s}+1)!) \,\&\, (0 \le p \le \bar{s}) \,\&\, L_2^+(C',Q,\bar{s}) \to Consis\ (J_{<1,n_{\bar{s}}>}(C' \Rightarrow_2^{(\bar{s})} Q),$
$\tilde{\Delta}^-(j,p) \cup \tilde{\Delta}^0(j,p))))$.

Аналогично формулируются $P_{r,9}^-1$ и $P_{r,9}^-2$ для $A_9^-$, а также $\hat{P}_{r,9}^\sigma 1$, $\hat{P}_{r,9}^\sigma 2$ для $\hat{A}_9^\sigma$, где $\sigma \in \{+, -\}$.

Если для $HPW_1$ имеет место $A_9^\sigma(\hat{A}_9^\sigma)$ и выполняются $P_{r,9}^\sigma 1$, $P_{r,9}^\sigma 2$ ($\hat{P}_{r,9}^\sigma 1$, $\hat{P}_{r,9}^\sigma 2$), то будем говорить, что порождены **слабые** *эмпирические законы (WEL)* типов $aw^\sigma$ и $\hat{a}w^\sigma$, соответственно, где $\sigma \in \{+, -\}$.

Определимы также и **слабые эмпирические тенденции (WET)** и *слабые подозрительные эмпирические тенденции (WSET)* для $A_{10}^\sigma, \hat{A}_{10}^\sigma$ и $\overline{A}_{10}^\sigma, \hat{\overline{A}}_{10}^\sigma$, соответственно, типы которых обозначим посредством $iw^\sigma, \hat{i}w^\sigma$ и $mw^\sigma, \hat{m}w^\sigma$, соответственно.

Очевидно, что $|WEL| = 4 \cdot 16$, аналогично, $|WET| = 4 \cdot 16$ и $|WSET| = 4 \cdot 16$, где $|\overline{Str}| = 16$ [3, 8-10].

## Приложение 3. Квазиаксиоматические теории – результат ДСМ-исследований

Квазиаксиоматические теории (КАТ) являются средством представления знаний и их организации в базах знаний интеллектуальных систем (ИС-ДСМ), реализующих ДСМ-метод АПНИ [2].

КАТ являются *открытыми* теориями с расширяемыми массивами фактов (БФ(p), $p = 0, 1, \ldots, s$), логическими средствами которых являются ДСМ-рассуждения и ДСМ-исследования.

КАТ будем определять для фиксированной стратегии ДСМ-рассуждений $Str_{x,y}$ из множества возможных стратегий $\overline{Str}$.

$Str_{x,y}$ образованы ДСМ-операторами $\overline{O}_{x,y}(\Omega(p))$ и функциями абдуктивного принятия гипотез $\rho^+(p)$ и $\rho^-(p)$. $\overline{O}_{x,y}(\Omega(p))$ образованы последовательным применением *п.п.в.* $-1^{(\sigma)}$ (правил индуктивного вывода) и *п.п.в.* $-2^{(\sigma)}$ (правил вывода по аналогии), которыми являются $(I)_{x,y}^\sigma$ и $(II)_{x,y}^\sigma$, где $\sigma \in \{+,-,0,\tau\}$ [5], а именно: $(I)_{x,y} = \{(I)_{x,y}^+, (I)_{x,y}^-, (I)_{x,y}^0, (I)_{x,y}^\tau\}$, $(II)_{x,y} = \{(II)_{x,y}^+, (II)_{x,y}^-, (II)_{x,y}^0, (II)_{x,y}^\tau\}$, где $(I)_{x,y}(\Omega(p)) =$

$\widetilde{\Delta}_{x,y}(p); (II)_{x,y}(\Omega(p)) = \widetilde{\Omega}_{x,y}(p)$ и $\overline{O}_{x,y}(\Omega(p)) = \widetilde{\Omega}_{x,y}(p)$ (п.п.в.-2 использует результаты п.п.в.-1, а завершает ДСМ-рассуждение процедура абдуктивного принятия гипотез).

Базисом КАТ $\widetilde{\Im}_{x,y}(p)$ для стратегии $Str_{x,y}$ и БФ(р) будем называть $\Im_{x,y}(p) = \langle \Sigma, \Omega(p), \Re \rangle$, а КАТ определим посредством ДСМ-замыкания $[\Im_{x,y}(p)]$ такого, что $[\Im_{x,y}(p)] = \langle \tilde{\Sigma}, \tilde{\Omega}_{x,y}(p) \cup \tilde{\Delta}_{x,y}(p), \Re \rangle$, где $\overline{O}_{x,y}(\Omega(p)) = \tilde{\Omega}_{x,y}(p)$ и $(I)_{x,y}(\Omega(p)) = \tilde{\Delta}_{x,y}(p)$.

Таким образом, $\widetilde{\Im}_{x,y}(p) = [\Im_{x,y}(p)]$, где Σ – исходное множество аксиом, характеризующих предметную область (дескриптивных) и структуру данных и представляющих процедуры их анализа посредством п.п.в.-1 и п.п.в.-2, а $\Re$ – множество правил вывода. $\widetilde{\Sigma}$ – расширение Σ, полученное посредством ДСМ-исследований, результатом которых является подмножество $ER_{x,y}$ для фиксированной стратегии ДСМ-рассуждений $Str_{x,y}$.

Семейство КАТ, соответствующее множеству стратегий ДСМ-рассуждений $\overline{Str}$, обозначим посредством $\widetilde{\Im}(p)$, где $\widetilde{\Im}(p) = \{\widetilde{\Im}_{x,y}(p) \mid Str_{x,y} \in \overline{Str}\}$.

Заметим, что каждый $HPW_j$, где $j = 1, \ldots, (s+1)!$ соответствует $\widetilde{\Im}(j,p) =$

$\{\tilde{\Im}_{x,y}(j,p) \mid Str_{x,y} \in \overline{Str}\}$, а $\tilde{\Im} = \{\tilde{\Im}_{x,y}(j,p) \mid 1 \le j \le (s+1)!\}$ есть множество всех КАТ, соответствующее ER и $\overline{Str}$. $\tilde{\Sigma}$ является расширением Σ посредством, порожденных ***реализаций*** элементов ER: например, $A_9^\sigma(C',Q), \hat{A}_9^\sigma(C',Q)$; $A_{10}^\sigma(C',Q), \hat{A}_{10}^\sigma(C',Q)$; $\overline{A}_{10}^\sigma(C',Q), \hat{\overline{A}}_{10}^\sigma(C',Q)$.

Порождение семейства КАТ $\tilde{\mathfrak{I}}$ является *результатом ДСМ-исследований*, которое может быть продолжено в соответствии с распознаванием модального следа расширений ДСМ-исследований, который является *принципом оправдания* ДСМ-эвристики обнаружения эмпирических закономерностей. Возникает, конечно, проблема упорядочения $\tilde{\mathfrak{I}}$ посредством шкал оценок качества ДСМ-рассуждений и гипотез [3] и выбора предпочтительных КАТ. Эта проблема является демонстрацией партнерского характера человеко-машинных интеллектуальных систем, реализующих ДСМ-метод АПНИ, который является формализованной эвристикой *интеллектуального анализа данных***.**

## Литература


1. ДСМ-метод автоматического порождения гипотез: логические и эпистемологические основания. Сост. О.М. Аншаков, Е.Ф. Фабрикантова. Под общей редакцией О.М. Аншакова. М.: ЛИБРОКОМ, 2009. 432 с.
2. Финн В.К. Эпистемологические основания ДСМ-метода автоматического порождения гипотез // Научно-техническая информация. Сер. 2. 2013. № 9. С. 1-29 (Часть I); № 12. С. 1-26 (Часть II).
3. Финн В.К. О классе ДСМ-рассуждений, использующих изоморфизм правил индуктивного вывода // Искусственный интеллект и принятие решений. 2016. № 3. С. 48-61.
4. Финн В.К. Искусственный интеллект: методология, применения, философия. М.: КРАСАНД, 2011. 448 с.
5. Финн В.К., Шестерникова О.П. О ДСМ-рассуждениях, применимых к объединениям подмножеств баз фактов // Научно-техническая информация. Серия 2. 2017. № 10. С. 1-25 (Часть I); № 12. С. 10-32 (Часть II).
6. Финн В.К. Дистрибутивные решетки индуктивных ДСМ-процедур // Научно-техническая информация. Серия 2. 2014. № 11. С. 1-30.
7. Автоматическое порождение гипотез в интеллектуальных системах. Под общей ред. В.К. Финна. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 528 с.
8. Шестерникова О.П., Агафонов М.А., Винокурова Л.В., Панкратова Е.С., Финн В.К. Интеллектуальная система прогнозирования развития сахарного диабета у больных хроническим панкреатитом // Искусственный интеллект и принятие решений. 2015. № 4. С. 12-50.
9. Шестерникова О.П. О применении интеллектуальной системы прогнозирования развития диабета у больных хроническим панкреатитом // Искусственный интеллект и принятие решений. 2016. №3. С. 62-71.
10. Агафонов М.А., Шестерникова О.П., Винокурова Л.В., Панкратова Е.С., Финн В.К. О принципах и логических средствах, реализуемых в интеллектуальной системе для гастроэнтерологии // Научно-техническая информация. Серия 2. 2017. № 3. С. 16-39.
11. Климова С.Г., Михеенкова М.А., Финн В.К. ДСМ-метод в качественном социологическом исследовании: основные принципы и опыт использования // Социологический журнал. 2016. Том 22. № 2. С. 8-30.
12. Винокурова Л.В., Агафонов М.А., Варванина Г.Г., Финн В.К., Панкратова Е.С., Добрынин Д.А. Применение интеллектуальной системы типа ДСМ для анализа клинических данных // Российский биотерапевтический журнал. 2014. Т. 13. № 3. С. 57-60.
13. Пойа Д.А. Как решать задачу / Пер. с англ. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1959. 208 с.
14. Неизвестный Д.А. Поспелов: становление ИИ в СССР и России. – М.: УРСС, 2017.
15. Пойа Д.А. Математика и правдоподобные рассуждения / Пер. с англ. – М.: Наука, 1975. 464 с.
16. Финн В.К., Шестерникова О.П. Эвристика обнаружения эмпирических закономерностей посредством ДСМ-рассуждений // Научно-техническая информация. Сер. 2, №9. С. 7-42.
17. Барвайс Д. Введение в логику первого порядка. Справочная книга по математической логике. Часть I. Теория моделей / Пер. с англ. – М.: Наука, 1982. 392 с.
18. Скворцов Д.П. О некоторых способах построения логических языков с кванторами по кортежам // Семиотика и информатика. 1983. Вып. 20. С. 102-126.
19. Rosser, J.B., and Turquette, A.R. 1958. Many-Valued Logics. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 124 p.
20. Финн В.К. Индуктивные методы Д.С. Милля в системах искусственного интеллекта // Искусственный интеллект и принятие решений. 2010. №3. С. 3-21 (Часть I); №4. С. 14-40 (Часть II).
21. Милль Д.С. Система логики силлогистической и индуктивной / Пер. с англ. – Изд. 5-е. – М.: ЛЕНАНД, 2011. 832 с.
22. Rescher, N. 1973. The coherence theory of truth. Oxford: The Clarendon Press. 388 p.
23. Anshakov O.M., Finn V.K., Skvortsov D. P. On Axiomatization of Many-Valued Logics Associated with Formalization of Plausible Reasoning // Studia Logica. 1989. Vol. XLVIII. № 4. Pp. 423-447.
24. Финн В.К. Обнаружение эмпирических закономерностей в последовательностях баз фактов посредством ДСМ-рассуждений // Научно-техническая информация. Сер. 2. 2015. № 8. С. 1-29.
25. Peirce, C.S. 1934. Collected papers of Charles Sanders Peirce. Vol. 5. Cambridge, MA: Harvard University Press. 189 p.
26. Kapitan T. 1992. Peirce and the Autonomy of Abductive Reasoning. Erkenntnis. 37 (1): 1–26.
27. Chellas, B.F. 1980. Modal Logic: An Introduction. Cambridge University Press. 299 p.
28. Поппер К. Объективное знание: эволюционный подход / Пер. с англ. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. 384 р.

## Heuristics of empirical regularities discovering and principles of knowledge discovery

V.K. Finn

Federal Research Centre “Informatic and Control” Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

The paper formulates the logical means of implementing the heuristics of empirical regularities discovering by means of JSM reasoning and JSM research. The considered heuristics is based on the synthesis of induction, analogy and two kinds of abduction. It also makes use of possible extensions of sequences of fact bases and causal forcing and corresponding modalities determined through them.

**Keywords:** JSM Method, JSM reasoning, JSM research, induction, analogy, abduction of the 1st an 2nd kind, causal forcing, JSM heuristics, empirical regularities.

**DOI** 10.14357/20718594180311

### References

1. Anshakov, O.M., ed. 2009. DSM metod avtomaticheskogo porozhdeniya gipotez: logicheskie I epistemologicheskie osnovaniya [JSM Method of Automatic Hypotheses Generation: Logical and Epistemological Foundation]. Moscow: LIBROCOM. 432 p.
2. Finn, V. K. 2014. Epistemological Foundations of the JSM Method for Automatic Hypothesis Generation. Automatic Documentation and Mathematical Linguistics. 48 (2): 96–148.
3. Finn, V. K. 2017. On the Class of JSM Reasoning That Uses the Isomorphism of Inductive Inference Rules. Scientific and Technical Information Processing. 44 (6): 387–396.
4. Finn, V. K. 2011. Iskusstvenny intellect: metodologiya, primeneniya, filosofiya [Artificial intelligence: methodology, applications, philosophy]. Moscow: KRASAND. 448 p.
5. Finn, V. K., and Shesternikova, O.P. 2017. On JSM Reasoning Applicable to Unions of Factbase Subsets. Automatic Documentation and Mathematical Linguistics. 51 (5): 220–234 (Part 1); 51 (6): 266–288 (Part 2).
6. Finn, V. K. 2014. Distributive Lattices of Inductive JSM Procedures. Automatic Documentation and Mathematical Linguistics. 48 (6): 265–295.
7. Finn, V. K. 2009. Avtomaticheskoe porozhdenie gipotez v intellectual’nykh sistemakh [Automatic Hypotheses Generation in Intelligent Systems]. Moscow: LIBROCOM. 528 p.
8. Shesternikova, O.P., Agafonov, M.A., Vinokurova, L.V., Pankratova, E.S., and Finn, V.K. 2016. Intelligent System for Diabetes Prediction in Patients with Chronic Pancreatitis. Scientific and Technical Information Processing. 43 (5-6): 315–345.
9. Shesternikova, O.P. 2016. O primenenii intellectual’noy sistemy prognozirovaniya razviniya diabetom u bol’nykh pankreatitom [On the Use of Intelligent System for Diabetes Prediction in Patients with Chronic Pancreatitis]. Iskusstvenny intellect i prinyatie resheniy [Artificial Intelligence and Decision Making] 3: 62–71.
10. Agafonov, M.A., Shesternikova, O.P., Vinokurova, L.V., Pankratova, E.S., and Finn, V.K. 2017. O printsipakh i logicheskikh sredstvakh, realizuemykh v intellectual’noy sisteme dlya gastroenterologii [On Principles and logical tools implemented in Intelligent System for gastroenterology]. Nauchno-technicheskaya informatsiya. Seria 2 [Scientific and Technical Information. Series 2] 3: 16–39.
11. Klimova, S.G., Mikheyenkova, M.A., and Finn, V.K. 2016. DSM Metod v kachestvennom sociologicheskom issledovanii: osnovnye printsipy i opyt ispol’zovaniya [JSM Method in Qualitative Sociological Research: the Main Principles and the Use Experience]. Sociologichesky zhurnal [Sociological Magazine] 22 (2): 8–30
12. Vinokurova, L.V., Agafonov, M.A., Varvanina, G.G., Finn, V.K., Pankratova, E.S., and Dobrynin D.A. 2014. Primenenie intellectual’noy sistemy tipa DSM dlya analiza klinicheskikh dannykh [The Use of Intelligent System of JSM Type for Clinical Data Analysis]. Rossiysky bioterapevtichesky zhurnal [Russian Magazine of Biotherapy] 13 (3): 57–60.
13. Polya, G. 1957. How to Solve It. Garden City, NY: Doubleday. 253 p.
14. Neizvestny D.A. Pospelov: stanovlenie II v SSSR i Rossii [Disclosed D.A. Pospelov: the Development of AI in the USSR and Russia]. 2017. Moscow: URSS.
15. Polya, G. 1954. Mathematics and Plausible Reasoning. Princeton University Press. 296 p.
16. Finn, V.K., Shesternikova O.P. 2018. Evristica obnaruzheniya empiricheskikh zakonomernostey posredstvom DSM rassuzhdeniy [The Heuristics of Empirical Regularities discovering by JSM Reasoning]. Nauchno-technicheskaya informatsiya. Seria 2 [Scientific and Technical Information. Series 2] №9, pp 7-42.
17. Ed. Barwise, J. 1977. Handbook of Mathematical Logic. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publishing Company. 1166 p.
18. Skvortsov, D.P. 1983. O nekotorykh sposobakh postroeniya logicheskikh yazykov s kvantorami po kortezham [On some ways of constructing languages with quantifier on the tuples]. Semiotica i informatica [Semiotics and Informatics] 20: 102–126.
19. Rosser, J.B., and Turquette, A.R. 1958. Many-Valued Logics. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 124 p.
20. Finn, V.K. 2011. J.S. Mill’s Inductive Methods in Artificial Intelligence Systems. Scientific and Technical Information Processing. 38 (6): 315–345 (Part 1); 39 (5): 241–260 (Part 2).

21. Mill, J.S. 1843. A System of Logic Ratiocinative and Inductive, being a connected View of the Principles of Evidence and the Methods of Scientific Investigation. London: Parker, Son and Bowin. 569 p.
22. Rescher, N. 1973. The coherence theory of truth. Oxford: The Clarendon Press. 388 p.
23. Anshakov, O.M., Finn, V.K., and Skvortsov, D.P. 1989. On Axiomatization of Many-Valued Logics Associated with Formalization of Plausible Reasoning. Studia Logica. XLVIII (4): 423–447.
24. Finn, V. K. 2015. Detecting Empirical Regularities in Bases of Facts Using JSM Reasoning. Automatic Documentation and Mathematical Linguistics. 49 (4): 122–151.
25. Peirce, C.S. 1934. Collected papers of Charles Sanders Peirce. Vol. 5. Cambridge, MA: Harvard University Press. 189 p.
26. Kapitan T. 1992. Peirce and the Autonomy of Abductive Reasoning. Erkenntnis. 37 (1): 1–26.
27. Chellas, B.F. 1980. Modal Logic: An Introduction. Cambridge University Press. 299 p.
28. Popper, K.P. 1979. Objective Knowledge: An Evolutionary Approach. Oxford: At the Clarendon Press. 407 p.