Многокритериальный выбор на нечетком множестве как задача поиска компромисса*

В.Д. Ногин

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. Рассматривается задача многокритериальной оптимизации на нечетком множестве, которое задано своей функцией принадлежности. Предлагается двухэтапный подход к решению этой задачи, состоящий в поиске компромисса между имеющимися критериями и функцией принадлежности. На первом этапе формируется новый векторный критерий путем добавления функции принадлежности к набору исходных критериев, и используется информация о значимости критериев в виде квантов информации для сужения множества Парето. Если полученное суженное множество Парето не выбирается как окончательное решение задачи многокритериальной оптимизации, то на втором этапе применяется скаляризация критериев, реализующая идею целевого программирования.

Ключевые слова: нечеткое множество, многокритериальная оптимизация, многокритериальный выбор, сужение множества Парето, кванты информации.

DOI 10.14357/20718594180319

Введение

Исследования в области оптимизации функции на нечетком множестве берут свое начало с 1970 года [1]. К настоящему времени разработано достаточно много моделей и методов решения задач нечеткого линейного и нелинейного программирования, нечеткого многоцелевого, целочисленного и динамического программирования (например, [2-8]).

В данной работе задачу оптимизации числовой векторной функции на нечетком множестве предлагается рассматривать и решать как задачу поиска парето-оптимального решения в новой многокритериальной задаче, в которой участвует исходная целевая функция, а также функция принадлежности нечеткого множества допустимых решений. Решение осуществляется с помощью двухэтапной процедуры, в соответствии с которой на первом этапе используется аксиоматический подход автора, а на втором – тот или иной способ скаляризации многокритериальной задачи. Идея рассматривать множество Парето как решение задачи оптимизации функции на нечетком множестве, изначально принадлежит С.А. Орловскому [3]. В данной работе эта идея уточняется и развивается.

В Разделе 1 напоминаются начальные сведения из теории нечетких множеств. В следующем разделе приводится система аксиом, лежащая в основе предлагаемого подхода, и напоминается принцип Эджворта-Парето, который является следствием приведенной аксиоматики. Тем самым, исходная задача сводится к поиску подходящего парето-оптимального (компромиссного) решения на четком множестве с новым (расширенным) векторным критерием. Раздел 3 посвящен применению аксиоматического подхода для сужения множества

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №№ 16-29-12864, 17-07-00371, 17-29-03236).

✉ *Ногин Владимир Дмитриевич e-mail: noghin@gmail.com*

Парето (области компромиссов), развитого ранее автором [9]. Этот подход предполагает привлечение дополнительной информации о том, в какой мере тот или иной критерий (группа критериев) является более значимым (более значимой), чем другой критерий (другая группа критериев). С помощью этой информации можно учесть самые разные предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР), относительно критериев в каждой конкретной задаче. На завершающем этапе развиваемого подхода предлагается использовать определенные способы скаляризации, реализующие идею целевого программирования и призванные выделить из образовавшегося после сужения подмножества Парето наиболее подходящее «наилучшее» решение.

1. Предварительные сведения

Напомним некоторые базисные понятия теории нечетких множеств. Пусть U означает обычное (четкое) множество. Нечеткое множество X в U определяется своей функцией принадлежности $\lambda_X : U \to [0,1]$. Для каждого элемента $x \in U$ число $\lambda_X(x) \in [0,1]$ интерпретируется как степень уверенности в том, что данный элемент принадлежит множеству X. В случае, когда функция принадлежности нечеткого множества может принимать лишь два значения 0 или 1, она представляет собой характеристическую функцию данного четкого множества X. Все элементы x множества U, удовлетворяющие неравенству $\lambda_X(x) > 0$, образуют носитель или суппорт множества X, обозначаемый далее $\mathrm{supp}(X)$.

Для нечетких множеств X и Y в U отношение включения, а также операции объединения и пересечения в терминах их функций принадлежности определяются стандартным образом:

$$X \subset Y \Leftrightarrow \lambda_X(x) \le \lambda_Y(x) \quad \text{для всех } x \in U;$$

$$\lambda_{X \cup Y}(x) = \max\{\lambda_X(x); \lambda_Y(x)\} \quad \text{для всех } x \in U;$$

$$\lambda_{X \cap Y}(x) = \min\{\lambda_X(x); \lambda_Y(x)\} \quad \text{для всех } x \in U.$$

Пусть числовая вектор-функция $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ определена на множестве U и X есть нечеткое множество в U с функцией принадлежности $\lambda : U \to [0,1]$. Введем образ $Y = f(\mathrm{supp}(X)) \subset R^m$, представляющий собой четкое множество. На основе принципа продолжения Л. Заде определим образ $\hat{Y} = f(X)$ нечеткого множества X при помощи функции принадлежности

$$\mu(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \{\alpha \in [0,1] \,|\, \lambda(x) = \alpha\}, \text{если } f^{-1}(y) \ne \varnothing \\ 0 \qquad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В работе [10] автором было введено понятие m-мерного нечеткого пространства F^m посредством равенства $F^m = R^m \times [0,1]$. На основании этого определения мы вправе рассматривать нечеткое множество, как некоторое подмножество $(m+1)$-мерного векторного пространства R^{m+1}, т.е. $F^m \subset R^{m+1}$.

Решение задачи многокритериальной оптимизации (далее мы будем иметь дело с максимизацией) векторной функции f на нечетком множестве X обозначим $Max(\hat{Y}) \subset \hat{Y}$. В общем случае это множество является нечетким, но, в частности, оно может оказаться четким и одноэлементным.

Введем в рассмотрение следующую $(m+1)$-мерную числовую вектор-функцию

$$\hat{y} = \hat{f}(x) = \begin{cases} (f(x), \mu(f(x))), \text{ если } \quad x \in \mathrm{supp}(X) \\ (f(x), 0) \quad \text{в противном случае} \end{cases}$$

на множестве U. Она представляет собой исходный векторный критерий с добавленной $(m+1)$-ой компонентой, выражающей степень принадлежности соответствующего векторного аргумента. Нетрудно понять, что $\hat{Y} = \hat{f}(U) \subset R^{m+1}$ и $Max(\hat{Y}) = Max(\hat{f}(U))$.

2. Аксиоматика выбора. Принцип Эджворта-Парето

Излагаемый ниже подход к решению задачи многокритериального выбора на нечетком множестве предполагает использование информации о предпочтениях ЛПР в форме так называемых квантов информации, употребляемых в рамках аксиоматического подхода к сужению множества Парето [9]. Приведем аксиомы и некоторые результаты аксиоматического подхода, адаптированные к рассматриваемой задаче и принятым обозначениям.

Прежде всего, введем в рассмотрение бинарное отношение $\succ_{\hat{f}}$, заданное на множестве

$\hat{Y} = \hat{f}(\text{supp}(X) \subset R^{m+1}$, которым руководствуется ЛПР в процессе выбора. Фрагментарная информация об этом отношении в виде квантов позволит построить некоторую оценку сверху для неизвестного множества $Max(\hat{Y})$. Запись $\hat{y} \succ_{\hat{f}} \hat{y}'$ означает, что $Max(\{\hat{y}, \hat{y}'\}) = \{\hat{y}\}$, т.е. вектор $\hat{y}$ является более предпочтительным для ЛПР в контексте решаемой задачи, чем $\hat{y}'$. Будем считать введенное отношение иррефлексивным. Последнее означает, что ни один элемент множества $\hat{Y}$ не может находиться в отношении $\succ_{\hat{f}}$ с самим собой.

Примем следующие «разумные» аксиомы, которые очерчивают класс бинарных отношений, с которыми ЛПР будет иметь дело.

Аксиома 1. *Если для векторов* $\hat{y}, \hat{y}' \in \hat{Y}$, *имеет место соотношение* $\hat{y} \succ_{\hat{f}} \hat{y}'$, *то* $\hat{y}' \notin Max(\hat{Y})$.

В соответствии с этой аксиомой не выбираемый в паре вектор не должен выбираться и из всего множества $\hat{Y}$.

Аксиома 2. *Бинарное отношение* $\succ_{\hat{f}}$ *является транзитивным. Через* $\succ$ *обозначим продолжение отношения* $\succ_{\hat{f}}$ *на все пространство* R^{m+1}, *которое также предполагается транзитивным.*

Аксиома 3. *Для любой пары векторов* $\hat{y}, \hat{y}' \in R^{m+1}$, *таких что* $\hat{y}_i \geq \hat{y}_i',\ i = 1,2,...,m+1,\ \hat{y} \neq \hat{y}'$, *выполняется соотношение* $\hat{y} \succ \hat{y}'$.

Данная аксиома фиксирует заинтересованность ЛПР как в увеличении значений каждой из компонент целевой векторной функции, так и в увеличении степени принадлежности выбираемого решения. Иными словами, далее мы будем иметь дело с (m+1)-критериальной задачей максимизации на множестве U.

Аксиома 4. *Отношение* $\succ$, *существование которого постулирует Аксиома 2, является инвариантным относительно положительного линейного преобразования, т.е. для всякой пары векторов* $\hat{y}, \hat{y}' \in R^{m+1}$, *таких что* $\hat{y} \succ \hat{y}'$, *имеют место свойства аддитивности* $(\hat{y}+c) \succ (\hat{y}'+c)$ *и однородности* $\nu \cdot \hat{y}' \succ \nu \cdot \hat{y}'$ *для любого вектора* $c \in R^{m+1}$ *и произвольного положительного числа* ν.

Согласно Аксиомам 2 и 4 должно существовать продолжение бинарного отношения $\succ_{\hat{f}}$ с множества $\hat{Y}$ на все пространство R^{m+1}, причем это продолжение должно быть транзитивным и инвариантным. Существование такого продолжения изначально не очевидно, поэтому следует внимательнее рассмотреть вопрос о существовании требуемого продолжения.

Определение 1. Пусть $Z \subset R^{m+1}$. Будем говорить, что некоторое бинарное отношение $\succ$, заданное на множестве *Z*, является *транзитивным и инвариантным относительно положительного линейного преобразования на Z*, если для любых $x, y, z \in Z$ соотношения $x \succ y \succ z$ влекут $x \succ z$ и, кроме того, для всех $x, y \in Z$ и всех $\nu > 0$, $c \in R^{m+1}$, таких, что $\nu \cdot x + c \in Z$, $\nu \cdot y + c \in Z$, справедлива импликация $x \succ y \Rightarrow \nu \cdot x + c \succ \nu \cdot y + c$.

Вопрос о существовании единственного продолжения бинарного отношения с множества *Z* на все пространство решает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $Z \subset R^{m+1}$ *и* $\text{int}\, Z \neq \varnothing$. *Всякое иррефлексивное, транзитивное и инвариантное бинарное отношение* $\succ$ *на множестве Z может быть единственным образом продолжено на все пространство* R^{m+1} *с сохранением свойств иррефлексивности, транзитивности и инвариантности.*

Доказательство теоремы дается в Приложении.

Следует отметить, что во многих прикладных задачах значения критериев f_i обычно составляют некоторый конечный или бесконечный промежуток $Y_i, i = 1,2,...,m$. Тогда в качестве множества, на котором определено бинарное отношение $\succ$, естественно рассматривать декартово произведение $Y_1 \times Y_2 \times ... \times Y_m \times [0, 1]$, которое заведомо будет иметь непустую внутренность. Следовательно, в этом случае согласно теореме 1 всегда существует и притом единственное продолжение иррефлексивного, транзитивного и инвариантного бинарного отношения с указанного декартова произведения на все пространство R^{m+1} с сохранением всех перечисленных свойств.

Далее сформулированные выше Аксиомы 1 – 4 будут предполагаться выполненными.

Из Аксиом 1 - 3 вытекает следующий фундаментальный результат [9].

Принцип Эджворта-Парето: для любого множества $Max(\hat{Y})$ *имеет место включение*

$$Max(\hat{Y}) \subset P(\hat{Y}),$$

где

$$P(\hat{Y}) = \left\{ \begin{matrix} \hat{y}^* \in \hat{Y} | \text{не существует } \hat{y} \in \hat{Y} \text{ такого,} \\ \text{что } \hat{y}_i \ge \hat{y}_i^*, i = 1,2,...,m+1 \text{ и } \hat{y} \ne \hat{y}^* \end{matrix} \right\}$$

есть множество парето-оптимальных (компромиссных) векторов.

В соответствии с данным принципом решения многокритериальной задачи на нечетком множестве следует искать в области компромиссов (множестве Парето) (m+1)-критериальной задачи. Простые примеры показывают, что это множество, как правило, является достаточно широким и выбор из него оказывается для ЛПР затруднительным. Поэтому необходимо осуществить его сужение, не затрагивая искомое множество $Max(\hat{Y})$.

3. Сужение множества Парето на основе квантов

При условии выполнения перечисленных выше Аксиом 1 – 4 для того, чтобы сузить область компромиссов предлагается использовать сведения об отношении предпочтения $\succ$ в форме так называемых квантов информации [9].

Определение 2. Пусть $\hat{y} = \hat{f}(x) = (h_1(x),...,h_{m+1}(x))$ и $A, B \subset \{1,2,...,m+1\}$, $A \cap B = \varnothing$. Говорят, что задан *квант информации об отношении* $\succ$ *с группами номеров критериев A и B вместе с двумя наборами положительных параметров* w_i *для всех* $i \in A$ *и* w_j *для всех* $j \in B$, если для некоторых двух векторов $y', y'' \in R^{m+1}$, удовлетворяющих $y'_i - y''_i = w_i$ для всех $i \in A$, $y''_j - y'_j = w_j$ для всех $j \in B$ и $y'_s = y''_s$ для всех $s \notin A \cup B$, выполняется $y' \succ y''$. В этом случае будем говорить, что *группа критериев A является более значимой, чем групп B.*

Наличие кванта информации означает готовность ЛПР идти на компромисс, выражающийся в согласии потери по каждому менее значимому критерию h_j группы *B* не более чем на величину w_j соответственно при условии прибавки в размере не менее w_j по каждому более значимому критерию h_i группы *A*.

С помощью квантов информации можно выразить, а затем и учесть при окончательном выборе широкую гамму отношений значимости как между отдельными критериями (или группами критериев) исходного набора $f_1, f_2,..., f_m$, так и различие в значимости критерия μ степени принадлежности элемента нечеткому множеству и какого либо критерия (или группы критериев) из набора $f_1, f_2,..., f_m$. Например, если ЛПР готово пожертвовать каким-то количеством по одному из критериев f_k ради некоторой гарантированной прибавки в степени принадлежности (что свидетельствует о более высокой степени значимости для нас критерия μ по сравнению с f_k), то, тем самым, имеется соответствующий квант информации и остается только уточнить конкретные величины потери и прибавки. В частном случае, когда оптимизации подлежит числовая (скалярная) функция (т.е. m = 1) ЛПР следует подобрать подходящий для него компромисс между величинами оптимизируемой функции и степенью принадлежности элементов нечеткого множества *X*.

Следующий результат, который является адаптированным для рассматриваемого случая вариантом Теоремы 3.5 [9], показывает, каким образом следует использовать квант информации для сужения множества Парето.

Теорема 2. *Пусть* $\hat{y} = \hat{f}(x) = (h_1(x),...,h_{m+1}(x))$ *и задан квант информации с двумя группами критериев A, B и соответствующими им параметрами. Тогда для любого множества* $Max(\hat{Y})$ *верно*

$$Max(\hat{Y}) \subset \widetilde{P}(\hat{Y}) \subset P(\hat{Y}),$$

где $\widetilde{P}(\hat{Y}) = \hat{f}(P_g(\mathrm{supp}(X)))$,

$$P_g(\mathrm{supp}(X)) = \{x^* \in \mathrm{supp}(X) \,|\, \text{не существует } x \in \mathrm{supp}(X),$$
$$\text{такого, что } g_i(x) \ge g_i(x^*), i = 1,2,..., p;\ g(x) \ne g(x^*)\}$$

а вектор-функция $g = (g_1, g_2,..., g_p)$, $p = m+1-|B|+|A|\cdot|B|$, *образована из компонент* h_k *исходной векторной функции для всех* $k \notin B$ *и новых компонент* $w_j h_i + w_i h_j$, *для всех* $i \in A$ *и всех* $j \in B$.

В соответствии с Теоремой 2 для осуществления сужения следует сформировать новую вектор-функцию *g*, относительно которой множество Парето составит более узкое подмножество исходной области компромиссов и будет заведомо содержать множество $Max(\hat{Y})$.

В общем случае может быть выявлен не один, а целый набор квантов информации, в которых участвуют различные группы критериев. В таком случае этот набор сначала необходимо проверить на непротиворечивость [9]. Если он окажется непротиворечивым, для формирования нового векторного критерия g можно применить соответствующую теорему или же использовать алгоритм построения нового векторного критерия. На этом первая фаза решения исходной задачи многокритериального выбора на нечетком множестве закончена.

Когда множество Парето относительно нового векторного критерия *g* по своим размерам (мощности нового множества Парето) устраивает ЛПР, это множество и будет решением $Max(\hat{Y})$. В противном случае следует перейти ко второй фазе сужения области компромиссов с использованием того или иного способа скаляризации многокритериальной задачи с векторным критерием *g*.

4. Вторая фаза решения задачи – скаляризация

Во второй фазе для дальнейшего существенного сужения области компромиссов предлагается применять тот или иной подходящий способ скаляризации многокритериальной задачи с новым векторным критерием $g = (g_1, g_2, ..., g_p)$. На данный момент существует широкий спектр (например, [11, 12]) различного рода методов сведѐния решения многокритериальной задачи к некоторому семейству скалярных задач, т.е. методов скаляризации. Выбор того или иного способа скаляризации зависит от конкретики данной многокритериальной задачи, характера и объема информации об этой задаче и других факторов.

В контексте приведенного рассмотрения многокритериальная задача с векторной функцией *g* является результатом использования некоторого набора квантов информации об отношении $\succ$, который призван учесть все имеющиеся в распоряжении ЛПР сведения о неравнозначности критериев $f_1, f_2, ..., f_m, \mu$. Поэтому далее имеет смысл ограничиться лишь теми методами скаляризации, в которых не требуется назначение каких-либо коэффициентов для критериев, характеризующих их «важность» (или «весомость»). В этом отношении наиболее подходящим, на взгляд автора, представляется использование идеи целевого программирования, согласно которому «наилучшим» объявляется ближайший (по той или иной метрике) вектор множества $\hat{Y}$ к некоторому «идеальному» вектору пространства R^{m+1}.

Когда исходные критерии $f_1, f_2, ..., f_m$ вместе с функцией μ обладают свойством вогнутости, на второй фазе решения исходной задачи предлагается использовать евклидову метрику. При этом если дополнительно из претендентов на «наилучшие» (т.е. из множества $Max(\hat{Y})$) исключить так называемые несобственно эффективные варианты, что заведомо выполняется в случае линейных, а также полиэдрально вогнутых критериев и полиэдрального (многогранного) множества $\mathrm{supp}(X)$, то для реализации второй фазы решения можно использовать следующий результат.

Теорема 3. *Предположим, что учет набора квантов непротиворечивой информации производится при помощи векторного критерия* $g = (g_1, g_2, ..., g_p)$, *множество* $\mathrm{supp}(X)$ *выпукло, а функции* $f_1, f_2, ..., f_m, \mu$ *ограничены сверху и покомпонентно вогнуты на нем. Тогда для любого множества* $Max(\hat{Y})$ *имеет место включение:*

$$Max(\hat{Y}) \subset \bigcup_{t \in T} \{\hat{f}(x^*) \in \hat{Y} \mid \| t - g(x^*) \| = \min_{x \in X} \| t - g(x) \| \},$$

где $T = \{t \in R^p \mid t_i > \sup_{x \in X} g_i(x),\ i = 1,2,...,p\}$ *и* $\|a\|$ *означает евклидову норму вектора a.*

Напомним [11], что парето-оптимальная (эффективная) точка относительно векторного критерия $g = (g_1, g_2, ..., g_p)$ на множестве $\mathrm{supp}(X)$ называется несобственно эффективной, если для любого положительного числа $A > 0$ найдутся $i \in \{1,2,...,p\}$ и $x \in \mathrm{supp}(X)$, удовлетворяющие неравенству $g_i(x) > g_i(x^*)$, что для всякого $j \in \{1,2,...,p\}$ вида $g_j(x) < g_j(x^*)$, будет иметь место неравенство $(g_i(x) - g_i(x^*))/(g_j(x^*) - g_j(x)) > A$.

Справедливость Теоремы 3 вытекает из Теоремы 7 [12] и того факта, что декартово произведение $\mathrm{supp}(X) \times [0,1]$ выпуклых множеств является выпуклым множеством. В соответствии с этой теоремой в качестве «идеального» вектора *t* можно взять любой элемент множества *T*, однако наиболее подходящим в данном случае можно считать вектор, компоненты t_i которого равны или чуть больше точных верхних граней функций $g_i(x)$, на множестве *X* (или на новом множестве Парето $P_g(U)$), $i = 1,2,..., p$.

Пример 1. Рассмотрим однокритериальную задачу максимизации линейной функции двух переменных $f(x) = x_1 + x_2$ на нечетком множестве *X* с вогнутой функцией принадлежности $\mu(x) = 1 - x_1^2 - x_2^2$, заданной на выпуклом множестве $U = \{x = (x_1, x_2) \,|\, x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$. Нетрудно найти множество Парето в двухкритериальной задаче с критериями *f* и μ. А именно,

$$P_{\hat{f}}(U) = \{x = (k,k) \,|\, k \in [0, \sqrt{2}/2]\}.$$

Предположим, что при выборе наилучшего варианта ЛПР готово пожертвовать некоторым уменьшением значения функции принадлежности ради увеличения значения максимизируемой функции *f*. Это означает, что критерий *f* является для ЛПР более значимым, чем функция принадлежности μ нечеткого множества *X*, т.е. имеется некий квант информации. Пусть соответствующие параметры данного кванта суть $w_1 = 0.15,\ w_2 = 0.1$. В соответствии с Теоремой 2 имеем:

$$g_2 = 0.1 \cdot f + 0.15 \cdot \mu = 0.1 \cdot (x_1 + x_2) + {}$$
$$+ 0.15 \cdot (1 - x_1^2 - x_2^2),$$

$$g_1 = f(x) = x_1 + x_2$$

$$P_g(U) = \{x = (k,k) \,|\, k \in [0.33, 1]\}.$$

Для выполнения второй фазы поиска решения будем использовать Теорему 3, поскольку все ее предположения выполнены. В качестве «идеального» возьмем вектор $(1.4, 0.18)$, компоненты которого представляют собой максимальные значения функций g_1, g_2 на множестве Парето $P_g(U)$. Несложные вычисления с помощью компьютера приводят к точке $x_1 = x_2 \approx 0.35, \mu(x_1, x_2) \approx 0.75$, которая является ближайшей во множестве $g(P_g(U))$ к указанному вектору при использовании евклидовой метрики. Заметим, что без учета указанного кванта информации наилучшим решением, полученным аналогично с помощью той же теоремы и «идеального» вектора $(1.4, 1)$, является другое решение $x_1 = x_2 \approx 0.33,\ f(x_1, x_2) \approx 0.66,\ \mu(x_1, x_2) \approx 0.78$, отвечающее меньшему значению максимизируемой функции, но с большей величиной степени принадлежности.

Для задач, в которых не выполняется условие выпуклости множества $\mathrm{supp}(X)$ и вогнутости функций $f_1, f_2, ..., f_m, \mu$ вторую фазу можно осуществлять, опираясь, например, на следующий результат [12].

Теорема 4. *Предположим, что учет набора квантов непротиворечивой информации производится на основе вектор-функции g. Пусть* α *– произвольное фиксированное число. Тогда для любого множества* $Max(\hat{Y})$ *выполняется включение:*

$$Max(\hat{Y}) \subset \bigcup_t \{f(x^*) \in Y \,|\, \max_{i=1,2,...,p} (t_i - g_i(x^*)) = \min_{x \in X} \max_{i=1,2,...,p} (t_i - g_i(x))\},$$

где вектор $t = (t_1, t_2, ..., t_p)$ *удовлетворяет условию* $\sum_{i=1}^{p} t_i = \alpha$.

В частности, в условиях последней теоремы множество $\mathrm{supp}(X)$ (или $\hat{Y}$) может состоять из конечного числа элементов.

В соответствии с Теоремой 4 каждый элемент множества $y^* = f(x^*) \in Max(\hat{Y})$ содержится среди векторов $g(x^*)$, реализующих минимум расстояния от некоторой точки *t* гиперплоскости, задаваемой уравнением $\sum_{i=1}^{p} t_i = \alpha$ в пространстве R^p, до множества $g(P_g(U))$, где расстояние измеряется с помощью равномерной метрики (метрики Чебышева). Для отыскания одноэлементного множества $Max(\hat{Y})$ можно ограничиться одной из точек указанной гиперплоскости. В качестве такой «идеальной» точки для наших целей лучше всего подходит вектор с компонентами $t_i = \sup g_i(x)$, $i = 1,2,...,p$, где точная верхняя грань берется по всем $x \in U$ (или $x \in P_g(U)$).

Пример 2. Рассмотрим двухкритериальную задачу, в которой $Y = \{y^1, y^2, ..., y^5\}$, причем

$$y^1 = (4,1.7),\ y^2 = (2,1.8),\ y^3 = (3,1.7),\ y^4 = = (4,1.6),\ y^5 = (4.5,1.3).$$

$$\mu(y^1) = 0.7,\ \mu(y^2) = 0.9,\ \mu(y^3) = 0.8,\ \mu(y^4) = = 0.7,\ \mu(y^5) = 0.5.$$

Здесь все векторы (кроме y_4) являются парето-оптимальными. Допустим, что для ЛПР первый критерий более значим, чем второй, причем за уступку в размере одной единицы в значении второго критерия ЛПР хотело бы получить прибавку в размере не менее четырех единиц по первому критерию. Согласно аксиоматическому подходу, это означает, что в наличии имеется квант информации, состоящий в том, что первый критерий является более значимым, чем второй с параметрами $w_1^* = 4, w_2^* = 1$. Образуем трехкритериальную задачу, добавив к имеющимся двум критериям степень принадлежности μ. Пусть критерий степени принадлежности является более значимым, чем первый критерий с параметрами $w_1' = 1, w_3' = 0.2$. Это означает, что ЛПР согласно потерять не более одной единицы по первому критерию ради увеличения значения степени принадлежности не менее чем на 0.2. Данная информация является непротиворечивой (это можно проверить с помощью критерия непротиворечивости из [9]). В соответствии с Теоремой 2, примененной дважды, составляем новый векторный критерий $g_1 = 0.2y_1 + \mu,\ g_2 = y_1 + 4y_2,\ g_3(x) = \mu$ и находим образ множества возможных векторов для этого критерия:

$$g(P(Y)) = \begin{Bmatrix} (1.5,10.8,0.7), (1.3,9.2,0.9), (1.4,9.8,0.8), \\ (1.4,9.7,0.5) \end{Bmatrix}.$$

В полученном наборе последний вектор не является парето-оптимальным. Он выбывает из дальнейшего рассмотрения. Для того чтобы из оставшихся трех векторов выбрать «наилучший», применим Теорему 4. С этой целью сначала нам следует привести все критерии к единой шкале, подвергнув их преобразованию, которое носит название нормализации критериев. В данном случае для нормализации каждый из критериев g_i заменим на отношение $(g_i - g_i^{\min})/(g_i^{\max} - g_i^{\min})$, где $g_i^{\max}$ и $g_i^{\min}$ – максимальное и минимальное значения критерия g_i на новом множестве Парето $P_g(U)$. В результате получим векторы $z^1 = (1,1,0)$, $z^2 = (0,0,1)$ и $z^3 = (0.5, 0.4, 0.5)$. Вектор из единиц принимаем за «идеальный» и вычисляем значения функции $\max(1 - z_1, 1 - z_2, 1 - z_3)$ в каждом из трех векторов. Получаем 1, 1 и 0.6, соответственно. Минимальное из этих чисел отвечает третьему вектору, т.е. z^3, который, в свою очередь, соответствует вектору y^3. Следовательно, именно он должен быть признан «наилучшим» согласно использованному подходу.

Заметим, что исключение первого этапа (т.е. отказ от использования квантов информации) в результате нормализации и применения того же способа скаляризации приводит к «наилучшему» вектору y^1.

Заключение

Рассмотрена задача многокритериального выбора на нечетком множестве с соответствующей функцией принадлежности. Ее решение предложено искать во множестве Парето (области компромиссов), которое соответствует новой многокритериальной задаче с дополнительным критерием в виде функции принадлежности данного нечеткого множества. Тем самым, задача выбора на нечетком множестве сведена к задаче поиска компромисса относительно расширенного векторного критерия. Для осуществления этого компромисса используется информация о значимости участвующих в задаче критериях в виде квантов информации. После учета имеющихся в распоряжении ЛПР квантов информации дополнительное сужение предложено осуществлять с помощью определенных двух способов скаляризации многокритериальной задачи. Оба эти способа реализуют идею целевого программирования, согласно которой «наилучшим» считается допустимый вектор, находящийся ближе всего по определенной (евклидовой или равномерной) метрике к некоторому «идеальному» вектору. Предлагаемый подход проиллюстрирован примерами.

Приложение

Доказательство Теоремы 1. Выберем произвольно внутреннюю точку $z^0 \in \operatorname{int} Z$. Существует $\varepsilon > 0$, при котором $U_\varepsilon(z^0) \subset Z$, где $U_\varepsilon(z^0)$ – ε-окрестность точки z^0.

Введем множество

$$\hat{Z} = \begin{Bmatrix} \hat{z} \in R^{m+1} \mid \hat{z} = z - z^0 \succ 0_{m+1} \\ \text{при некотором } z \in Z \cap U_\varepsilon(z^0) \end{Bmatrix}$$

и порождаемый этим множеством конус:

$$K = \begin{Bmatrix} z' \in R^{m+1} \mid z' = \alpha \cdot \hat{z} \\ \text{при некоторых } \alpha > 0 \text{ и } \hat{z} \in \hat{Z} \end{Bmatrix}.$$

Введенный конус не содержит начала координат (благодаря иррефлексивности $\succ$), является острым и выпуклым.

В самом деле, если данный конус не является острым, то должен найтись ненулевой вектор $\alpha \cdot \hat{z} \in K$ при некоторых $\alpha > 0$ и $\hat{z} \in \hat{Z}$, такой что $-\alpha \cdot \hat{z} \in K$. В этом случае число α можно выбрать настолько малым, чтобы выполнялось $\alpha \cdot \hat{z} = z - z^0 \succ 0_{m+1}$ и $-\alpha \cdot \hat{z} = z^0 - z \succ 0_{m+1}$ при некотором $z \in Z$. Отсюда, благодаря свойству аддитивности отношения $\succ$ на Z, следует $z \succ z^0$ и $z^0 \succ z$. Полученное противоречит иррефлексивности отношения $\succ$ на Z.

Выпуклость конуса K вытекает из выпуклости множества $\hat{Z}$, что, в свою очередь, имеет место благодаря инвариантности и транзитивности отношения $\succ$ на Z. Действительно, выберем произвольную пару точек $z^1 = z' - z^0 \succ 0_{m+1}, z^2 = z'' - z^0 \succ 0_{m+1}$ множества $\hat{Z}$, где $z', z'' \in Z \cap U_\varepsilon(z^0)$, и произвольное число $\lambda \in (0,1)$. Точка $\hat{z} = \lambda z^1 + (1-\lambda) z^2$ лежит в отрезке, соединяющем z^1 и z^2, который целиком содержится в окрестности $U_\varepsilon(z^0)$. Следовательно, $\hat{z} \in U_\varepsilon(z^0)$. Остается проверить, что $\hat{z} \succ 0_{m+1}$.

В силу $\lambda \in (0,1)$ и свойства однородности отношения $\succ$ на множестве Z, из $z^1 \succ 0_{m+1}, z^2 \succ 0_{m+1}$ вытекают соотношения $\lambda z^1 \succ 0_{m+1}$ и $(1-\lambda) z^2 \succ 0_{m+1}$. Из первого соотношения на основании свойства аддитивности получаем $\lambda z^1 + (1-\lambda) z^2 \succ (1-\lambda) z^2$, что вместе со вторым соотношением благодаря транзитивности $\succ$ влечет $\hat{z} = \lambda z^1 + (1-\lambda) z^2 \succ (1-\lambda) z^2 \succ 0_{m+1}$. Выпуклость конуса K установлена.

Согласно Лемме 2.2 [9], острый выпуклый конус K, не содержащий начала координат, единственным образом порождает конусное бинарное отношение с этим конусом на R^{m+1}, которое обладает свойствами иррефлексивности, транзитивности и инвариантности. Ясно, что это отношение является продолжением отношения $\succ$. Единственность продолжения вытекает из единственности конуса K, порождаемого множеством $\hat{Z}$.

Литература

1. Zadeh L.A., Bellman R.E. Decision-Making in a Fuzzy Environment // Management Science, 1970, vol. 17, pp. 141-164.
2. Negoita C.V., Ralesku D.A. Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis. Basel, Birkhausner Verlag, 1975.
3. Orlovsky S.A., On Programming with Fuzzy Constraint Sets // Kybernetes, 1977, vol. 1, pp. 197-201.
4. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука. 1981.
5. Kacprzyk J., Orlovski S.A., Fuzzy Optimization and Mathematical Programming: A Brief Introduction and Survey, in Optimization Models Using Fuzzy Sets and Possibility Theory, Reidel, D. Publishing Company, 1987, pp. 50-72.
6. Tang J., Wang D. and Fung R.Y.K. Understanding of Fuzzy Optimization: Theories and Methods // Journal of Systems Science and Complexity, 2004, vol. 17, No 1.
7. Fuzzy Multi-Criteria Decision Making: Theory and Applications with Recent Developments (Kahraman, C., ed.), Springer. 2008.
8. Luhandjula M.K. Fuzzy Optimization: Milestones and Perspectives // Fuzzy Sets and Systems, 2015, vol. 74, pp. 4–11.
9. Noghin V.D. Pareto Set Reduction: an Axiomatic Approach. Springer Inc., 2018.
10. Noghin V.D. Approximation of Convex Fuzzy Sets. In Proc. of Intern. Conf. Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA), 2017, pp. 127-129. Интернет-ресурс: https://ieeexplore.ieee.org/document/7973994/
11. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач (2-е изд., испр. и доп.). М.: Физматлит. 2007.
12. Noghin V.D. Pareto Set Reduction Based on Some Metrics // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2017, vol. 57(4), pp. 645-652.

Multicriteria choice over the fuzzy set as a problem of compromise search

V.D. Noghin

Saint-Petersburg State University, Russia

The problem of multicriteria optimization on a fuzzy set, which is specified by its membership function, is considered. A two-step approach is proposed to solve this problem. One consists in finding a compromise between the available criteria and the membership function. At the first stage, a new vector criterion is formed, which is obtained by adding a membership function to a set of initial criteria, and information about the importance of criteria in the form of information quanta for the Pareto set reduction is used. If the set obtained after such reduction is not appropriate as the final solution of the multicriteria optimization problem, then in the second stage we use scalarization, realizing the idea of goal programming.

Keywords: fuzzy set, multicriteria choice, reduction of the Pareto set, quanta of fuzzy information.

DOI 10.14357/20718594180319

References

1. Zadeh L.A., Bellman R.E. Decision-Making in a Fuzzy Environment // Management Science, 1970, vol. 17, pp. 141-164.
2. Negoita C.V., Ralesku D.A. Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis. Basel, Birkhausner Verlag, 1975.
3. Orlovsky S.A., On Programming with Fuzzy Constraint Sets // Kybernetes, 1977, vol. 1, pp. 197-201.
4. Orlovskij S.A. Problemy prinyatiya reshenij pri nechetkoj iskhodnoj informacii. M. Nauka. 1981.
5. Kacprzyk J., Orlovski S.A., Fuzzy Optimization and Mathematical Programming: A Brief Introduction and Survey, in Optimization Models Using Fuzzy Sets and Possibility Theory, Reidel, D. Publishing Company, 1987, pp. 50-72.
6. Tang J., Wang D. and Fung R.Y.K. Understanding of Fuzzy Optimization: Theories and Methods // Journal of Systems Science and Complexity, 2004, vol. 17, No 1.
7. Fuzzy Multi-Criteria Decision Making: Theory and Applications with Recent Developments (Kahraman, C., ed.), Springer. 2008.
8. Luhandjula M.K. Fuzzy Optimization: Milestones and Perspectives // Fuzzy Sets and Systems, 2015, vol. 74, pp. 4–11.
9. Noghin V.D. Pareto Set Reduction: an Axiomatic Approach. Springer Inc., 2018.
10. Noghin V.D. Approximation of Convex Fuzzy Sets. In Proc. of Intern. Conf. Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA), 2017, pp. 127-129. Интернет-ресурс: https://ieeexplore.ieee.org/document/7973994/
11. Podinovskiy V.V., Nogin V.D. Pareto-optimal'nye resheniya mnogokriterial'nikh zadach (2-e izd., ispr. i dop.). M. Fizmatlit. 2007.
12. Noghin V.D. Pareto Set Reduction Based on Some Metrics // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2017, vol. 57(4), pp. 645-652.