

Алгебра трапециевидных чисел для обработки нечеткой информации*

А.О. Шевляков, М.Г. Матвеев

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. Существующие способы выполнения операций над нечеткими числами имеют ряд серьезных проблем, которые сдерживают применение теории нечетких чисел для представления неопределенности во многих задачах выбора и принятия решений. В предыдущих работах нами была предложена алгебра двухкомпонентных нечетких чисел, решающая данные проблемы применительно к треугольным нечетким числам. В данной статье мы расширим применение алгебры до случая трапециевидных нечетких чисел, исследуем ее свойства и проведем сравнение с другими подходами.

Ключевые слова: нечеткая алгебраическая структура, нечеткая арифметика, трапециевидное нечеткое число.

DOI 10.14357/20718594180405

Введение

Неопределенность является неотделимой частью процесса принятия решений. Большинство систем, в рамках которых возникает необходимость в принятии решений, содержат элемент неопределенности либо в каком-то параметре, определяющем проблему, либо в ситуациях, в которых данная проблема возникает. Одним из способов работы с неопределенностью является использование методов теории вероятностей. Вероятностный подход успешно применяется для решения множества реальных задач, но, в то же время, он имеет свои ограничения. Например, вероятностные методы нуждаются в больших объемах данных, случайных по природе, для достижения требуемого уровня достоверности. При нехватке доступных данных крайне сложно пользоваться статистическим выводом. Препградой в использовании теории вероятно-

стей является существование двух видов неопределенности внутри любой системы - статистической и эпистемической. Статистическая неопределенность возникает в результате естественной вариативности параметров системы. В этом случае параметры можно представить в виде функций распределения вероятностей и использовать все множество методов теории вероятностей. Эпистемическая же неопределенность возникает по причине недостатка знаний о системе, недостатка наблюдений. В этом случае невозможно достоверно установить распределения параметров системы и приходится прибегать к экспертным оценкам. Еще одним ограничением теории вероятности является то, что она способна работать только с количественной информацией, не способная при этом отразить качественные характеристики объектов системы. Из-за этих ограничений теория вероятности не всегда применима к решению задач с неопределенностью.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ грант №17-01-00251.

✉ Шевляков Александр Олегович. E-mail: shevlyakov.a.o@mail.ru

Предложенная Л.А. Заде в 1965 году теория нечетких множеств позволяет преодолеть данные проблемы. В рамках этой теории Л.А. Заде ввел понятие нечеткого числа как выпуклого и нормального нечеткого множества, определенного на оси действительных чисел R [1]. Для использования существующих "четких" алгоритмов решения различных задач в условиях неопределенных параметров, выраженных при помощи нечетких чисел, необходимо иметь возможность выполнять различные нечеткие операции над нечеткими числами. Однако стандартный подход к выполнению операций - принцип обобщения Л.А. Заде [2,3] - имеет ряд серьезных недостатков, не позволяющий применять его во множестве задач управления, оптимизации и т.п. К таким недостаткам можно отнести проблему зависимости: каждое новое вхождение одной и той же нечеткой переменной в уравнение рассматривается как независимое, из-за чего не выполняется множество естественных для "четких" чисел тождеств, таких как $A-A=0$, $A/A=1$, которые желательны во многих задачах. Другим недостатком является то, что вычитание и деление не являются операциями, обратными сложению и умножению. В результате подстановка полученных корней в исходное уравнение не обращает уравнение в тождество. Это не позволяет использовать данный подход при решении различных обратных задач. Также применению препятствует неоправданное расширение неопределенности результата операций и невозможность использования существующих программных средств решения различных математических задач.

За время существования теории в стремлении преодолеть перечисленные выше недостатки было создано множество новых алгебраических подходов к реализации нечетких вычислений и новых представлений нечетких чисел. В работах [4-15] можно найти лишь некоторые из них. Новые подходы решают одну или несколько проблем, свойственных принципу обобщения, но ни один из них не преодолел их полностью.

В работах [16-18] был предложен подход к выполнению операций над нечеткими треугольными числами, решающий все из перечисленных выше проблем. Также было проведено сравнение данного подхода с принципом обобщения и одной из современных арифметик [19]. Треугольные нечеткие числа являются од-

ним из наиболее часто используемых видов нечетких чисел, однако невозможность использования подхода при наличии нечетких чисел другой формы видится серьезным недостатком с точки зрения широкого применения. Целесообразно продолжить начатое в [16] исследование и расширить подход до случая трапециевидных нечетких чисел, сохранив при этом все его полезные свойства.

Статья организована следующим образом. В первом разделе описывается алгебра двухкомпонентных трапециевидных чисел, во втором - некоторые свойства построенной алгебры, в третьем - ряд численных примеров. В заключении сформулированы основные выводы.

1. Алгебра трапециевидных двухкомпонентных чисел (Т-чисел)

Алгебра строится с использованием понятия треугольного однокомпонентного числа.

Определение 1. Треугольным однокомпонентным числом X (далее X -число) будем называть конструкцию, представленную в виде $X = x(r) = (a + br)$, где a, b, r - вещественные параметры, $r \in [0, 1]$, $r \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Однокомпонентное число $(3 + 2r)$ показано на Рис. 1.

Если задавать однокомпонентные числа двумя действительными числами $x(0)$ и $x(1)$ (значения $x(r)$ при $r = 0$ и $r = 1$), то операции будут выполняться следующим образом:

$$x_1(r) * x_2(r) = x(0) + (x(1) - x(0))r, \quad (1)$$

где $x(0) = x_1(0) * x_2(0)$, $x(1) = x_1(1) * x_2(1)$, $*$ $\in \{+, -, \cdot, /\}$ и все операции выполняются по правилам работы с действительными числами [20].

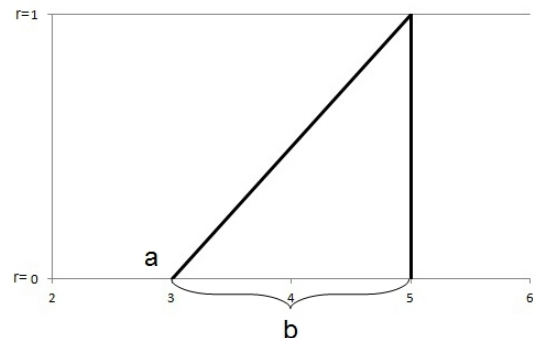


Рис. 1. Однокомпонентное число

Операции линейны по переменной r , множество всех X -чисел является замкнутым по всем операциям, то есть если $x_i(r) \in X$, $x_j(r) \in X$, то $x(r) = x_i(r) * x_j(r) \in X$, $* \in \{+, -, \cdot, /\}$.

Определение 2. Двухкомпонентным трапециевидным числом T (далее T -число) будем называть конструкцию, представленную вектором $(v^L(r); v^R(r))$, $v^L(r) \in X$, $v^R(r) \in X$.

В отличие от W -чисел, с помощью которых представляются треугольные нечеткие числа и для которых обязательно выполняется условие $v^L(1) = v^R(1)$, для T -чисел данное условие не является обязательным.

Трапециевидные нечеткие числа могут быть представлены в виде T -чисел, где левая граница задается в виде $v^L(r) = a^L + b^L r$, $b^L \geq 0$, правая граница - в виде $v^R(r) = a^R + b^R r$, $b^R \leq 0$. На Рис. 2 изображено трапециевидное нечеткое число $A = (1, 2, 4, 6)$. Однокомпонентные нечеткие числа, задающие левую и правую границы нечеткого числа, примут вид:

$$v^L(r) = 1 + r \text{ и } v^R(r) = 6 - 2r.$$

Алгебра T -чисел (далее T -алгебра) так же, как и алгебра W -чисел, предполагает автономное выполнение арифметических операций над левыми компонентами операндов с записью результата в левую компоненту итогового числа и над правыми компонентами с записью в правую компоненту итогового числа.

Определение 3. Пусть T_1 и T_2 - два T -числа. Тогда операции между этими числами будут производиться в соответствии с правилом:

$$(v_1^L, v_1^R) * (v_2^L, v_2^R) = ([v_1^L * v_2^L], [v_1^R * v_2^R]) = (v^L, v^R),$$

где $* \in \{+, -, \cdot, /\}$.

T -число W также можно представить в виде четырех чисел $W = (a, b, c, d)$. Это же число, записанное в параметрической форме, имеет вид $v^L(r) = a + (b - a)r$ и $v^R(r) = d - (d - c)r$.

Определение 4. Пусть два T -числа представлены в $T_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$, $T_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$. Тогда результат выполнения операции примет вид $T = (a_1 * a_2, b_1 * b_2, c_1 * c_2, d_1 * d_2)$, $* \in \{+, -, \cdot, /\}$ и все операции выполняются по правилам работы с действительными числами.

Применение T -алгебры обеспечивает полное преодоление всех перечисленных во введении негативных особенностей, характерных для не-

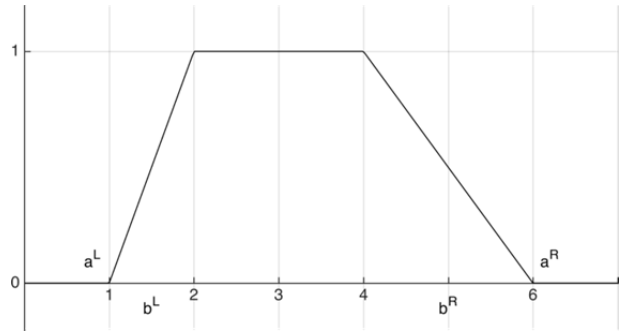


Рис. 2. Трапециевидное нечеткое число

четких арифметик, основывающихся на принципе обобщения Л. Заде. При этом наиболее широко используемые нечеткие числа (нечеткие треугольные и нечеткие трапециевидные числа) являются T -числами.

Стоит отметить, что на тему аппроксимации произвольных нечетких чисел трапециевидными нечеткими числами написано большое количество статей. Предлагаемые в данных статьях методы сохраняют те или иные желательные характеристики исходных произвольных нечетких чисел [21-30]. Поэтому наличие алгебры, способной работать лишь с трапециевидными числами, после использования предлагаемых в данных статьях приближений, позволяет решать различные нечеткие задачи с нечеткими числами произвольной формы.

2. Свойства T -алгебры

Рассмотрим свойства предлагаемой T -алгебры на примере произвольных T -чисел $A_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$, $A_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$, $A_3 = (a_3, b_3, c_3, d_3)$:

1. Коммутативность сложения:

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_2, b_2, c_2, d_2) + (a_1, b_1, c_1, d_1) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2).$$

2. Ассоциативность сложения:

$$((a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2)) + (a_3, b_3, c_3, d_3) = (a_1, b_1, c_1, d_1) + ((a_2, b_2, c_2, d_2) + (a_3, b_3, c_3, d_3)) = (a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3, c_1 + c_2 + c_3, d_1 + d_2 + d_3).$$

3. Существование нулевого элемента: нулевым элементом в T -алгебре является четкий ноль $0 = (0, 0, 0, 0) \in T$. $(a_1, b_1, c_1, d_1) + (0, 0, 0, 0) = (a_1, b_1, c_1, d_1)$.

4. Существование противоположного элемента: $-A_1 = (-a_1, -b_1, -c_1, -d_1)$. Тогда

$$A_1 + (-A_1) = (a_1, b_1, c_1, d_1) + (-a_1, -b_1, -c_1, -d_1) = (0, 0, 0, 0).$$

5. Коммутативность умножения:

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_2, b_2, c_2, d_2) \cdot (a_1, b_1, c_1, d_1) = (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2, c_1 \cdot c_2, d_1 \cdot d_2).$$

6. Ассоциативность умножения:

$$((a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot (a_2, b_2, c_2, d_2)) \cdot (a_3, b_3, c_3, d_3) = (a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot ((a_2, b_2, c_2, d_2) \cdot (a_3, b_3, c_3, d_3)) = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3, b_1 \cdot b_2 \cdot b_3, c_1 \cdot c_2 \cdot c_3, d_1 \cdot d_2 \cdot d_3).$$

7. Существование единичного элемента: единичным элементом в Т-алгебре является четкая единица $1 = (1, 1, 1, 1) \in T$. $(a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot (1, 1, 1, 1) = (a_1, b_1, c_1, d_1)$.

8. Дистрибутивность умножения относительно сложения: $((a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2)) \cdot (a_3, b_3, c_3, d_3) = ((a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot (a_3, b_3, c_3, d_3)) + ((a_2, b_2, c_2, d_2) \cdot (a_3, b_3, c_3, d_3)) = ((a_1 + a_2) \cdot a_3, (b_1 + b_2) \cdot b_3, (c_1 + c_2) \cdot c_3, (d_1 + d_2) \cdot d_3)$.

В данной алгебре не выполняется требование существования обратного элемента для ненулевых элементов, так как обратное число не существует, если хотя бы одна из характеристических точек a_1, b_1, c_1, d_1 равна нулю.

Таким образом, предложенная нами Т-алгебра образует коммутативное кольцо с единицей над множеством Т-чисел.

Теорема 1. При проведении операций над трапециевидными числами границы, полученные при помощи Т-алгебры, всегда находятся внутри границ, полученных при использовании подхода на основе принципа обобщения Л. Заде.

Доказательство легко получается подстановкой $\tau=0$ в соответствующие подходы.

3. Сравнительный анализ результатов численных экспериментов

Рассмотрим несколько примеров использования Т-алгебры для решения различных задач. Для части примеров мы сравним результаты, полученные с использованием нашей алгебры, с результатами, получаемыми при использовании принципа обобщения.

Пример 1. Вычитание трапециевидного нечеткого числа $A = (a, b, c, d)$ из самого себя: $W = (a, b, c, d) - (a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$. Результатом является четкий ноль.

Пример 2. Деление треугольного нечеткого числа $A = (a, b, c, d)$ на себя: $W = (a, b, c, d) / (a, b, c, d) = (1, 1, 1, 1)$. Результатом является четкая единица.

Пример 3. Рассмотрим линейное уравнение $Ax + B - C = 0$ с нечеткими трапециевидными параметрами $A = (4, 5, 7, 9)$, $B = (1, 2, 3, 4)$, $C = (2, 4, 6, 9)$. Найдем $x = (C - B) / A$:

$$x = \left(\frac{2-1}{4}, \frac{4-2}{5}, \frac{6-3}{7}, \frac{9-4}{9} \right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{5}{9} \right).$$

Подставим полученный x в исходное уравнение:

$$Ax + B - C = (4, 5, 7, 9) \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{5}{9} \right) + (1, 2, 3, 4) - (2, 4, 6, 9) = 0.$$

Подстановка обращает уравнение в тождество.

На Рис. 3 показаны нечеткие корни уравнения, полученные при помощи принципа обобщения Л. Заде (сплошная линия) и предлагаемого принципа (пунктирная линия), на Рис. 4 – результаты подстановки.

Можно видеть, что решение, полученное с использованием нашей алгебры, полностью за-

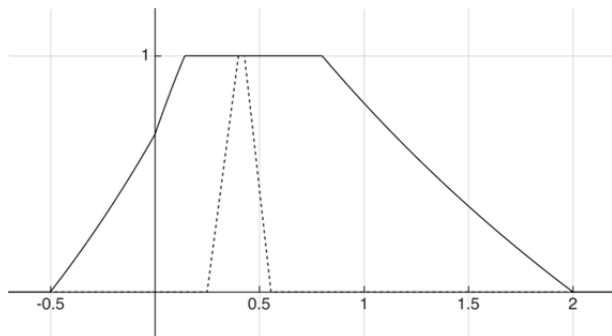


Рис. 3. Решения линейного уравнения

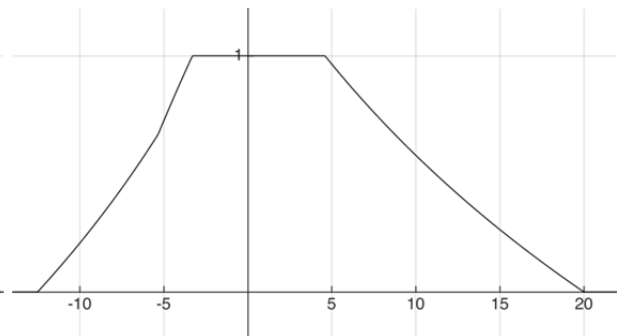


Рис. 4. Результаты подстановки решений в линейное уравнение

ключено внутри решения, полученного при помощи принципа обобщения Л. Заде. Подстановка результата в исходное уравнение приводит к тождеству при использовании нашего подхода. В то же время принцип обобщения приводит к нечеткому числу с большим носителем.

Пример 4. Рассмотрим линейное уравнение $Ax + 2 = 0$ с нечетким трапециевидным параметром $A = (3, 5, 6, 8)$. Найдём $x = -2 / A$: $x = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4})$. Подставим полученный x в исходное уравнение: $Ax + B - C = (3, 5, 6, 8)(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}) + (2, 2, 2, 2) = 0$. Подстановка обращает уравнение в тождество.

На Рис. 5 показаны нечеткие корни уравнения, полученные при помощи принципа обобщения Л. Заде (сплошная линия) и предлагаемого принципа (пунктирная линия), на Рис. 6 – результаты подстановки.

Можно видеть, что решение, полученное с использованием нашей алгебры, заключено на границах ($r=0$) внутри решения, полученного при помощи принципа обобщения Л. Заде. При дробной величине r корни, полученные при помощи нашего метода, выходят за пределы множества

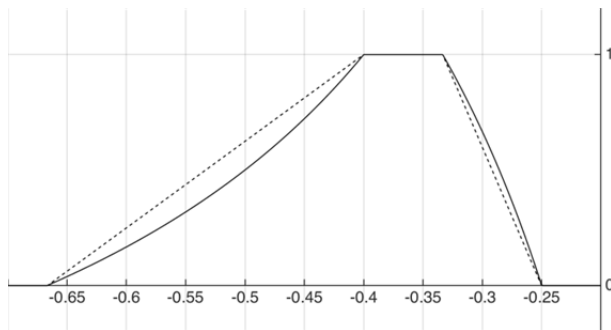


Рис. 5. Решения линейного уравнения

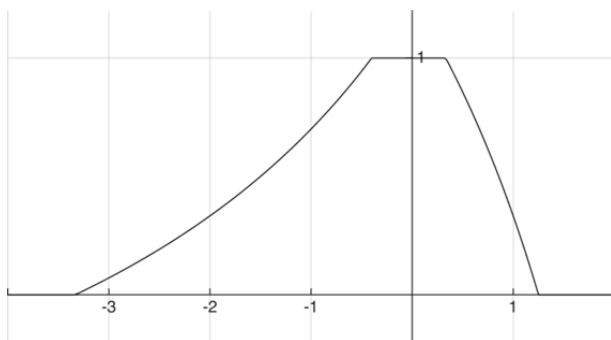


Рис. 6. Результаты подстановки решений в линейное уравнение

всех возможных решений, которые представляет собой принцип обобщения. Это является следствием того, что наш метод дает приближенное решение. Также стоит отметить, что такая ситуация возможна только при рассмотрении операций с небольшим количеством переменных. При большем количестве переменных проблема исчезает из-за очень быстрого роста неопределенности после каждой операции при использовании принципа обобщения.

Подстановка результата в исходное уравнение приводит к тождеству при использовании нашего подхода. В то же время принцип обобщения приводит к нечеткому числу с большим носителем.

Пример 5. Рассмотрим квадратное уравнение $Ax^2 + Bx - C = 0$ с нечеткими трапециевидными параметрами $A = (4, 5, 7, 9)$, $B = (1, 2, 3, 4)$, $C = (2, 4, 6, 9)$. Найдём корни по формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A} = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8}, \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{5}, \frac{-3 \pm \sqrt{177}}{14}, \frac{-2 \pm \sqrt{85}}{9} \right).$$

Полученные корни можно увидеть на Рис. 7. Подставив полученные корни в исходное уравнение, мы получим тождества.

Пример 6. Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 = c_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 = c_2; \end{cases} \quad (2)$$

с нечеткими трапециевидными параметрами $a_1 = (4, 5, 7, 9)$, $b_1 = (1, 2, 3, 4)$, $c_1 = (2, 4, 6, 9)$, $a_2 = (-6, -5, -3, -1)$, $b_2 = (1, 1, 3, 3)$, $c_2 = (1, 3, 3, 4)$. Решим данную систему методом Крамера:

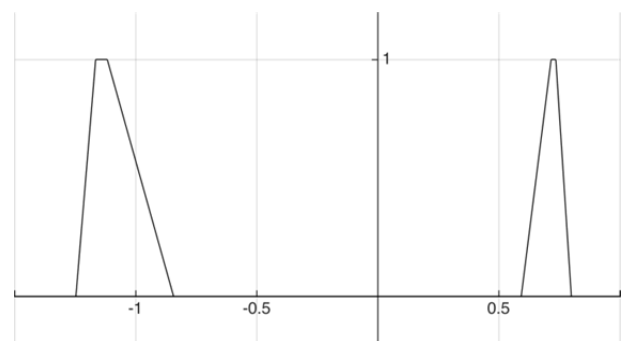


Рис. 7. Корни квадратного уравнения

$$\Delta = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 4 & 1 & 5 & 2 \\ -6 & 1 & -5 & 1 \end{array} \middle| \begin{array}{c|c|c|c} 7 & 3 & 9 & 4 \\ -3 & 3 & -1 & 3 \end{array} \right) = (10, 15, 30, 31),$$

$$\Delta_1 = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array} \middle| \begin{array}{c|c|c|c} 6 & 3 & 9 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \end{array} \right) = (1, -2, 9, 11),$$

$$\Delta_2 = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 4 & 2 & 5 & 4 \\ -6 & 1 & -5 & 3 \end{array} \middle| \begin{array}{c|c|c|c} 7 & 6 & 9 & 9 \\ -3 & 3 & -1 & 4 \end{array} \right) = (16, 35, 39, 45);$$

(3)

откуда получаем решение в виде:
 $x_1 = \left(\frac{1}{10}, -\frac{2}{15}, \frac{3}{10}, \frac{11}{31} \right), \quad x_2 = \left(\frac{8}{5}, \frac{7}{3}, \frac{13}{10}, \frac{45}{31} \right).$ Подстановка решения в исходную систему уравнений приводит к тождеству.

На Рис. 8 показаны решения системы, полученные при помощи принципа обобщения Л. Заде (сплошная линия) и предлагаемого принципа (пунктирная линия), на Рис. 9 – результаты подстановки.

Подстановка решения, полученного при помощи нашего метода, приводит к тождеству. В случае с принципом обобщения, подстановка не только не приводит к тождеству, но также можно наблюдать такую негативную особенность, как неоправданное расширение результата выполнения операций.

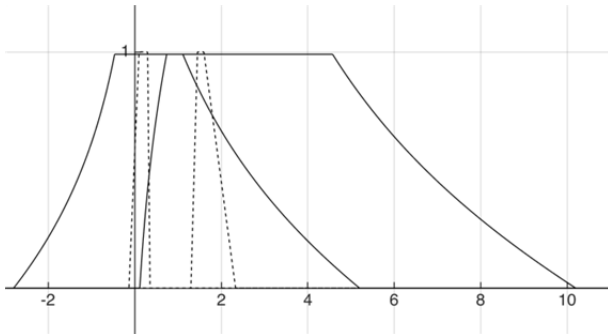


Рис. 8. Решения системы уравнений

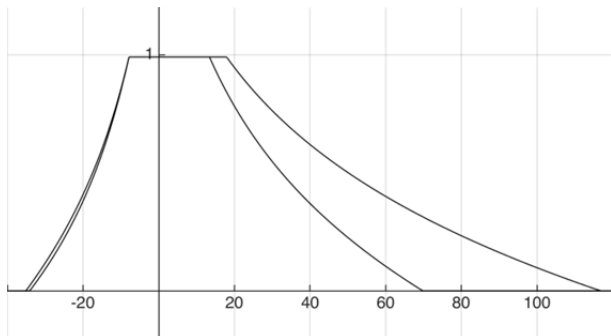


Рис. 9. Корни квадратного уравнения

Заключение

Предложенная Т-алгебра позволяет решать задачи с параметрами, представленными в виде трапециевидных нечетких чисел, и лишена серьезных недостатков, которые долгое время ограничивали применение теории нечетких множеств для решения задач в условиях неопределенности. Т-алгебра обеспечивает выполнение естественных для четких чисел отношений в проблемных для подходов на основе принципа обобщения ситуациях, таких как вычитание/деление числа на само себя, подстановка результата решения уравнения в исходное уравнение и т.п. Уменьшение носителя при выполнении операций вычитания и деления сдерживает рост носителя, благодаря чему получаемые результаты можно интерпретировать и на их основе принимать решения в решаемых задачах. Также Т-алгебра позволяет использовать все существующие методы, алгоритмы и программные средства, предназначенные для работы с действительными числами, при решении задач с нечеткими параметрами.

Возможность работы с нечеткими трапециевидными числами, при наличии огромного числа подходов аппроксимации произвольных нечетких чисел трапециевидными, условно делает данный подход применимым к задачам с нечеткими параметрами произвольной формы. Данное обобщение, как и все полезные свойства, описанные выше, достигается за счет получения приближенных решений, так что данный подход не применим, когда в решении необходимо отобразить все возможные значения. Однако для случаев, когда приближенное решение допустимо, и особенно в ситуациях, когда перед принятием решений будет применяться фаззификация, сводящая всю полезную информацию к одной точке, данный подход может принести значительную пользу.

Литература

1. Zadeh L.A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Parts 1, 2, 3 // Information Sciences. 1975. №8. P. 43–80, 199–249, 301–357.
2. Zadeh L.A. Fuzzy sets // Fuzzy sets Information and Control. 1965. №8(3). P. 338–353.
3. Zadeh L.A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility // Fuzzy sets and systems. 1978. №1. P. 3–28.

4. Dubois D., Prade H. Operations on fuzzy numbers // *International Journal of Systems Science*. 1978. №9(6). P. 613–626.
5. Klir G.J. Fuzzy arithmetic with requisite constraints // *Fuzzy Sets and Systems*. 1997. №91. P. 165–175.
6. Lodwick W.A. Constrained interval arithmetic // *CCM report*. 1999. №138. P. 1–11.
7. Piegat A. *Fuzzy Modeling and Control*. Springer-Verlag, 2001. 728 p.
8. Nagoor Gani A., Mohamed Assarudeen S.N. A New Operation on Triangular Fuzzy Number for Solving Fuzzy Linear Programming Problem // *Applied Mathematical Sciences*. 2012. №11. P. 525–532.
9. Chalco-Cano Y., Lodwick W.A., Bede B. Single level constraint interval arithmetic // *Fuzzy Sets and Systems*. 2014. №257. P. 146–168.
10. Воронцов Я.А., Матвеев М.Г. Алгебраические операции с нечеткими LR-числами с использованием преобразования L // *Программная инженерия*. 2014. №8. С. 23–29.
11. Piegat A. A new definition of the fuzzy set // *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*. 2005. №15(1). P. 125–140.
12. Stefanini L., Guerra M.L. On fuzzy arithmetic operations: some properties and distributive approximations // *International Journal of Applied Mathematics*. 2006. №19. P. 171–199.
13. Gao S., Zhang Z., Cao C. Multiplication operation on fuzzy numbers // *Journal of Software*. 2009. №4(4). P. 331–338.
14. Taleshian A., Rezvani S. Multiplication operation on trapezoidal fuzzy numbers // *Journal of Physical Science*. 2011. №11. P. 17–26.
15. Deschrijver G. Arithmetic operators in interval-valued fuzzy set theory // *Information Sciences*. 2007. №177. P. 2906–2924.
16. Шевляков А. О. Алгебраические операции с нечеткими треугольными числами с использованием алгебры двухкомпонентных чисел // *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии*. 2017. №1. С. 149–153.
17. Matveev M. G., Shevlyakov A. O., Semenov M. E., Meleshenko P. A. Solution of selection problems with fuzzy parameters // *17-th International Multidisciplinary Scientific Geoconference SGEM, Conference proceedings*. 2017. №17. P. 595–603.
18. Shevlyakov A.O., Matveev M.G. W-algebra for solving problems with fuzzy parameters // *Journal of Physics: Conf. Series*. 2018. №973.
19. Шевляков А. О., Матвеев М.Г. Сравнение различных нечетких арифметик // *Искусственный интеллект и принятие решений*. 2017. №4. С. 60–68.
20. Матвеев М.Г. Анализ и решение задач выбора с параметрической нечеткостью // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия "математическое моделирование и программирование"*. 2015. №8(4). С. 14–29.
21. Ban A. Approximation of fuzzy numbers by trapezoidal fuzzy numbers preserving the expected interval // *Fuzzy Sets and Systems*. 2008. №159(11). P. 1327–1344.
22. Abbasbandy S., Hajjari T. Weighted trapezoidal approximation-preserving cores of a fuzzy number // *Computers & Mathematics with Applications*. 2010. №59(9). P. 3066–3077.
23. Ban A.I., Coroianu L. Nearest interval, triangular and trapezoidal approximation of a fuzzy number preserving ambiguity // *International Journal of Approximate Reasoning*. 2012. №53(5). P. 805–836.
24. Abbasbandy S., Asady B. The nearest trapezoidal fuzzy number to a fuzzy quantity // *Applied mathematics and computation*. 2004. №156(2). P. 381–386.
25. Ban A., Coroianu L., Grzegorzewski P. Trapezoidal approximation and aggregation // *Fuzzy Sets and Systems*. 2011. №177(1). С. 45–59.
26. Yeh C.T. Trapezoidal and triangular approximations preserving the expected interval // *Fuzzy Sets and Systems*. 2008. №159(11). P. 1345–1353.
27. Grzegorzewski P., Mrowka E. Trapezoidal approximations of fuzzy numbers // *Fuzzy Sets and Systems*. 2005. №153(1). С. 115–135.
28. Abbasbandy S., Amirfakhrian M. The nearest trapezoidal form of a generalized left right fuzzy number // *International Journal of Approximate Reasoning*. 2006. №43(2). P. 166–178.
29. Coroianu L. Best Lipschitz constant of the trapezoidal approximation operator preserving the expected interval // *Fuzzy Sets and Systems*. 2011. №165(1). P. 81–97.
30. Grzegorzewski P. Trapezoidal approximations of fuzzy numbers preserving the expected interval - algorithms and properties // *Fuzzy Sets and Systems*. 2008. №159(11). P. 1354–1364.

Algebra of trapezoidal fuzzy numbers for fuzzy information processing

A.O. Shevlyakov, M.G. Matveev

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Existing approaches to the implementation of fuzzy calculations have several significant problems that restrain practical applications of the fuzzy sets theory to the solutions of many control and decision-making tasks. In our previous research, we proposed the algebra of double component numbers that solves the aforementioned problems for fuzzy triangular numbers. In this paper, we extend the algebra of double component numbers to the trapezoidal fuzzy numbers, explore its properties and compare it with other approaches.

Keywords: fuzzy algebraic structure, fuzzy arithmetic, trapezoidal fuzzy numbers.

DOI 10.14357/20718594180405

References

1. Zadeh L.A. 1975. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, Parts 1, 2, 3. *Information Sciences*. 8:43–80,199–249,301–357.
2. Zadeh L.A. 1965. Fuzzy sets. *Fuzzy sets Information and Control*. 8(3):338–353.
3. Zadeh L.A. 1978. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy sets and systems*. 1:3–28.
4. Dubois D, Prade H. 1978. Operations on fuzzy numbers. *International Journal of Systems Science*. 9(6):613–626.
5. Klir G.J. 1997. Fuzzy arithmetic with requisite constraints. *Fuzzy Sets and Systems*. 91:165–175.
6. Lodwick W.A. 1999. Constrained interval arithmetic. CCM report. 138:1–11.
7. Piegat A. 2001. *Fuzzy Modeling and Control*. Springer-Verlag. 728 p.
8. Nagoor Gani A., Mohamed Assarudeen S.N. 2012. A New Operation on Triangular Fuzzy Number for Solving Fuzzy Linear Programming Problem. *Applied Mathematical Sciences*. 11:525–532.
9. Chalco-Cano Y., Lodwick W.A., Bede B. 2014. Single level constraint interval arithmetic. *Fuzzy Sets and Systems*. 257:146–168.
10. Vorontsov Y.A., Matveev M.G. 2014. Algebraicheskie operacii s nechetkimi LR-chislami s ispol'zovaniem preobrazovaniya L [L-transform Based Algebraic Operations on fuzzy LR-numbers]. *Programmnaja inzhenerija [Software Engineering]*. 8:23–29.
11. Piegat A. 2005. A new definition of the fuzzy set. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*. 15(1):125–140.
12. Stefanini L., Guerra M.L. 2006. On fuzzy arithmetic operations: some properties and distributive approximations. *International Journal of Applied Mathematics*. 19:171–199.
13. Gao S., Zhang Z., Cao C. 2009. Multiplication operation on fuzzy numbers. *Journal of Software*. 4(4):331–338.
14. Taleshian A., Rezvani S. 2011. Multiplication operation on trapezoidal fuzzy numbers. *Journal of Physical Science*. 11:17–26.
15. Deschrijver G. 2007. Arithmetic operators in interval-valued fuzzy set theory. *Information Sciences*. 177:2906–2924.
16. Shevlyakov A.O. 2017. Algebraicheskie operacii s nechetkimi treugol'nymi chislami s ispol'zovaniem algebrы dvuhkomponentnyh chisel [Algebraic Operations On Triangular Fuzzy Numbers Using The Algebra Of Double Component Numbers]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta, serija "Sistemnyj analiz i informacionnye tehnologii"* [Scientific journal Proceedings of Voronezh State University. Ser. Systems Analysis and Information Technologies]. 1:149–153.
17. Matveev M. G., Shevlyakov A. O., Semenov M. E., Meleshenko P. A. 2017. Solution of selection problems with fuzzy parameters. 17-th International Multidisciplinary Scientific Geoconference SGEM, Conference proceedings. 17:595–603.
18. Shevlyakov A.O., Matveev M.G. 2018. W-algebra for solving problems with fuzzy parameters. *Journal of Physics: Conf. Series*. 973. 012044.
19. Shevlyakov A.O., Matveev M.G. 2017. Sravnenie razlichnyh nechetkih arifmetik [A comparison of different fuzzy arithmetics]. *Sravnenie razlichnyh nechetkih arifmetik [Artificial Intelligence and Decision Making]*. 4:60–68.
20. Matveev M.G. 2015. Analiz i reshenie zadach vybora s parametricheskoj nechetkost'ju [Analyzing and Solving Problems of Decision Making with Parametric Fuzzy]. *Vestnik Juzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta, serija "matematicheskoe modelirovanie i programirovanie"* [Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software]. 8(4):14–29.
21. Ban A. 2008. Approximation of fuzzy numbers by trapezoidal fuzzy numbers preserving the expected interval. *Fuzzy Sets and Systems*. 159(11):1327–1344.
22. Abbasbandy S., Hajjari T. 2010. Weighted trapezoidal approximation-preserving cores of a fuzzy number. *Computers & Mathematics with Applications*. 59(9):3066–3077.
23. Ban A.I., Coroianu L. 2012. Nearest interval, triangular and trapezoidal approximation of a fuzzy number preserving ambiguity. *International Journal of Approximate Reasoning*. 53(5):805–836.
24. Abbasbandy S., Asady B. 2004. The nearest trapezoidal fuzzy number to a fuzzy quantity. *Applied mathematics and computation*. 156(2):381–386.
25. Ban A., Coroianu L., Grzegorzewski P. 2011. Trapezoidal approximation and aggregation. *Fuzzy Sets and Systems*. 177(1):45–59.
26. Yeh C.T. 2008. Trapezoidal and triangular approximations preserving the expected interval. *Fuzzy Sets and Systems*. 159(11):1345–1353.
27. Grzegorzewski P., Mrowka E. 2005. Trapezoidal approximations of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*. 153(1):115–135.
28. Abbasbandy S., Amirfakhrian M. 2006. The nearest trapezoidal form of a generalized left right fuzzy number. *International Journal of Approximate Reasoning*. 43(2):166–178.
29. Coroianu L. 2011. Best Lipschitz constant of the trapezoidal approximation operator preserving the expected interval. *Fuzzy Sets and Systems*. 165(1):81–97.
30. Grzegorzewski P. 2008. Trapezoidal approximations of fuzzy numbers preserving the expected interval - algorithms and properties. *Fuzzy Sets and Systems*. 159(11):1354–1364.