Сравнение полиинтервальных альтернатив: метод «среднее-риск»*

Г. И. Шепелев

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия

Аннотация. Для полиинтервальных объектов, обобщенных интервальных и нечетких величин, предложены методы расчета числовых характеристик, аналогичных характеристикам функций распределения теории вероятностей (математическое ожидание, дисперсия, среднее полуотклонение). Методы основаны на дефаззификации интервальных оценок для указанных числовых характеристик в случае нечетких полиинтервальных объектов и на представлении обобщенных интервальных оценок в виде вероятностной смеси образующих такую оценку распределений. Полученные результаты позволяют распространить известный метод «среднее - риск», применяющийся обычно для сравнения по предпочтительности и риску в совокупности моноинтервальных величин, на случай полиинтервальных оценок.

Ключевые слова: сравнение поли интервальных альтернатив, метод «среднее – риск», обобщенные интервальные оценки, числовые характеристики нечетких полиинтервальных величин.

DOI 10.14357/20718594190102

Введение

Многие важные прикладные задачи приходиться анализировать в условиях неопределенности. Достаточно часто неопределенность возникает из-за необходимости предсказывать исходные параметры и результирующие показатели исследуемых задач. В большинстве практических случаев эти величины измеряются в количественных (числовых) шкалах и получают из-за неопределенности интервальное представление в виде описывающих указанные величины интервальных оценок. В будущем, после завершения реализации направленного на решение задачи проекта, когда неопределенность будет снята, интервальные оценки его характеристик получат определенные одночисловые (точечные) значения.

В связи с интервальным представлением исследуемых величин необходимо отметить следующее обстоятельство. В реальных ситуациях их возможные предсказываемые оценочные значения, как значения реальных числовых показателей, как правило, образуют дискретные множества, т.е. изолированы друг от друга. Таково, например, множество возможных будущих прогнозируемых значений курсов валют или других стоимостных показателей в финансово-экономическом анализе. В интервальной картине, вопреки изначальной дискретной природе подобных величин, они трактуются как непрерывные. Хотя это и вносит известное искажение в описание параметров задачи, аппроксимация таких дискретных множеств непрерывными интервальными оценками удобна, позволяет использовать более простые методы расчета и повсеместно используется при после-

*Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 18-07-00280, 16-29-12864, 17-07-00512, 17-29-07021).

✉ *Шепелев Геннадий Иванович. E-mail: gis@isa.ru*

дующем анализе, математическом и содержательном. Однако такая аппроксимация оправдана лишь тогда, когда можно предполагать, что исследуемая величина в пределах границ своей вариабельности способна принимать много дискретных значений (точечных реализаций), не слишком удаленных друг от друга.

Обычно предполагается, что интервальные в момент анализа оценки характеристик решаемых задач содержат все их возможные (в большом числе) точечные реализации, прогнозируемые в соответствии с имеющимися знаниями или суждениями экспертов. Это позволяет задавать такие оценки как числовой интервал, или промежуток числовой прямой. Такое предположение спорно. В математической статистике его не безупречность преодолевается заданием вместе с интервальной оценкой определяемых по выборочным данным шансов того, что такая оценка содержит в себе неизвестное точечное значение оцениваемой величины. При задании характеристик задач на основании преимущественно экспертных суждений, не подкрепленных статистикой необходимого объема, эту трудность пытаются преодолевать за счет перехода от моноинтервальных к полиинтервальным оценкам.

Необходимость в полиинтервальном подходе вызвана при этом тем, что в ряде случаев эксперту затруднительно выразить свои знания об анализируемом параметре посредством единственной интервальной оценки: интервал излишнего размаха снижает ценность знаний эксперта, а зауженный интервал довольно часто ведет к ошибкам предсказания. Целесообразно поэтому дать эксперту возможность не ограничиваться только моноинтервальными оценками, а позволить выразить свои знания о параметрах задачи совокупностью интервалов, характеризующей неопределенность экспертных знаний о длине и положении интервала–оценки каждой характеристики задачи. Составляющие такой совокупности описывают указанную неопределенность с разной степенью уверенности. Разумеется, это не отменяет ценности моноинтервального подхода, описания характеристик задачи в рамках моно- и поли- интервальной картин дополняют друг друга.

В ряде практических случаев требуется сравнить имеющиеся варианты решений задач (альтернативы) по их эффективности для достижения поставленных целей. Для реализации процедур сравнения некоторые результирующие показатели математических моделей, описывающих такие объекты, могут по содержательным соображениям быть переведены в разряд показателей качества, характеризующих степень достижения целей имеющимися альтернативами. Будем называть интервальными альтернативами (ИА) такие объекты сравнения с целью выбора эффективных, показатели качества которых имеют, из-за неопределенности, интервальное представление, моно- или полиинтервальное. В качестве критериев сравнения в интервальном случае часто фигурируют, однако, не сами показатели качества, а, как правило, некоторые числовые индикаторы, рассчитываемые на базе указанных интервальных показателей. Они могут иметь размерности, отличные от размерности показателей качества.

Можно видеть, что задачам сравнения ИА свойственно наличие неустранимого риска принятия неверного решения при выборе эффективного объекта. Действительно, уже для двух сравниваемых ИА с ненулевым пересечением интервальных оценок их показателей качества любая альтернатива может оказаться эффективной в будущем, хотя и с разной степенью уверенности в истинности этого утверждения.

Эти соображения показывают, что задачи сравнения ИА по их эффективности, по крайней мере, двухкритериальные – наряду с критерием, связанным с показателем качества альтернативы и оценивающим альтернативу по ее предпочтительности, необходимо на паритетных началах учитывать индикатор, характеризующий риск принятия неверного решения о выборе «лучшей» альтернативы. Отметим, что при анализе риска рядом исследователей предлагается использовать не один, а одновременно несколько критериев риска [1]. Поскольку в момент прогнозного оценивания эффективности ИА недостаточно известны возможные изменения в способах реализации соответствующего проекта, в целях выбора более эффективной альтернативы в число критериев сравнения следовало бы также включить показатели адаптивных свойств альтернатив, их гибкость, надежность, маневренность [2]. Таким образом, эффективность ИА – это сложная категория, всесторонне характеризующая пригодность альтернативы для реализации и позволяющая отличить одну ИА от другой.

Надо отметить, что задачи сравнения ИА по эффективности относятся к задачам теории принятия решений. Они не могут быть, вообще говоря, однозначно исчерпывающе решены чисто математическими методами и требуют включения в процесс решения предпочтений лиц, принимающих решение (ЛПР), учитывать их склонность к риску. Математические методы, однако, позволяют предоставить ЛПР значения мер предпочтительности и риска, других критериев, вычисленных для конкретной ситуации сравнения, на базе которых ЛПР, исходя из своих предпочтений и склонности к риску, может принять некоторое рациональное решение.

Обратим внимание также на тот факт, что в проблематике сравнения ИА по эффективности возникают риски различной природы. Среди них риск как возможность получения убытков или как возможность получения реального исхода, отличного от желаемого прогнозируемого результата, а также риск того, что ИА, оцениваемая в момент сравнения как эффективная в их предъявленном множестве, не окажется таковой в момент снятия неопределенности, в действительности эффективной окажется некоторая другая альтернатива.

Чтобы получить возможность оценивать и предпочтительность ИА, и риск принятия решений о предпочтительности, следует дополнить интервальное представление характеризующих альтернативу показателей математическим аппаратом описания шансов реализации их значений в пределах соответствующих интервальных оценок. В случае моно- интервалов наиболее распространен для этого аппарат функций распределения. Использование этого аппарата позволяет рассчитывать для ИА меры предпочтительности и риска в обеих их вышеуказанных трактовках.

Имеются два основных подхода к сравнению ИА в условиях риска. В одном учитывается зависимость предпочтительности ИА и сопутствующего риска от контекста, т.е. конкретной совокупности сравниваемых объектов [3-5]. За меру предпочтительности здесь выбираются шансы правдоподобности гипотезы о том, что анализируемая альтернатива окажется предпочтительнее других сравниваемых, а за меру риска шансы того, что в действительности хотя бы одна другая альтернатива окажется предпочтительной. Метод обладает тем достоинством, что позволяет оценить «коллективный» риск, величина которого может существенно превосходить величину риска при попарном сравнении. Недостатки метода являются следствием того факта, что в его рамках сравнивается лишь относительная эффективность ИА. При этом альтернатива, признанная эффективной при таком сравнении, сама по себе может оказаться неэффективной (убыточной).

В другом подходе к сравнению ИА по эффективности сопоставляемые альтернативы рассматриваются как изолированные, не «взаимодействующие» объекты. Для каждой ИА величина критерия предпочтительности вычисляется отдельно, а затем, безотносительно к этому индикатору, вновь для каждого объекта отдельно, вычисляется тот или иной индикатор риска и лишь затем на базе обоих этих индикаторов осуществляется сравнение. Среди методов этого класса наиболее распространен в настоящее время метод «среднее-риск» (mean - risk) [6].

Критерием предпочтительности в этом методе служит величина математического ожидания случайной величины, заданной на интервальной оценке показателя качества. В качестве критерия риска могут выступать такие показатели как дисперсия, левая и правая полудисперсии (semivariance), среднее полуотклонение (mean semideviation) и другие [7, 8]. Для случая моноинтервальных оценок метод «среднее-риск» для критериев математическое ожидание и среднее полуотклонение исследован в работах [7, 9]. Цель настоящей статьи распространить метод «среднее-риск» для сравнения ИА по эффективности на случай поли- интервальных оценок, поскольку информация, необходимая для сравнения, может быть получена в рамках обеих (моно- и полиинтервальных) картин, а результаты сравнения целесообразно для сопоставимости получить единообразно, посредством одного и того же метода.

1. Метод «среднее-риск» для моноинтервальных альтернатив

Мерой предпочтительности ИА в методе «среднее-риск» служит, как уже отмечалось, математическое ожидание E случайной величины X, заданной на интервальной оценке I показателя качества альтернативы. Мера риска может вводиться по-разному. Будем предполагать для определенности, что в дальнейшем имеют место ситуации, когда бóльшие значения показателя качества предпочтительнее меньших, как если показатель качества это, например, доход или прибыль. Естественно считать при этом, что альтернативы со значениями показателя качества, полностью лежащими в отрицательной области значений, могут быть сразу исключены из рассмотрения как непригодные для реализации.

Можно признать, что отклонения от желаемого значения показателя качества в лучшую сторону сложно связать с риском. Поэтому, начиная с давней работы [10], с риском связывают показатели, предсказывающие возможность отклонений в худшую сторону (downside risk measures), риск получения убытков. Эта концепция была развита в статьях [6, 11] после чего, как свидетельствуют результаты исследований работ [12, 13], меры риска получения убытков стали фактическим стандартом в инструментарии риск менеджмента. В последнее время среди этих мер риска центральное место занял показатель среднего полуотклонения S_I [8, 14], показывающий величину среднего отклонения случайной величины, заданной на интервальной оценке [L, R], от математического ожидания E. Вводят левый S_{Il} и правый S_{Ir} индикаторы полуотклонения. Если $f(x)$ плотность распределения случайной величины X, то, по определению,

$$S_{Il} = \int_L^E (E-x) f(x)dx, \quad S_{Ir} = \int_E^R (x-E) f(x)dx.$$

Удобно, что S_{Il} и S_{Ir} имеют размерность E, а кроме того можно показать, что $S_{Il} = S_{Ir} = S_I$ для любого, не обязательно симметричного распределения. Действительно, так как

$$\int_L^R (E-x) f(x)dx = \int_L^E (E-x) f(x)dx - \int_E^R (x-E) f(x)dx = 0,$$

то $S_{Il} = S_{Ir} = S_I$. Более общая формула, связывающая функции S_{Il} и S_{Ir} для произвольного значения аргумента $a \in [L, R]$, приведена далее.

Более подробно поведение S_I для равномерного и треугольного распределения шансов изучено в работах [9, 15]. Равномерное распределение реализует принцип максимума энтропии в отсутствии какой-либо априорной информации об исследуемой величине. Треугольное распределение достаточно часто используется экспертами в их практической работе, служа для них простой аппроксимацией других унимодальных распределений. Приведем основные результаты указанных работ.

Известно, что для равномерного распределения среднее E_U и среднее полуотклонение S_{IU} таковы:

$$E_U = (L + R)/2, \text{ а } S_{IU} = (R - L)/8.$$

Для треугольного распределения с модой T математическое ожидание $E_T = (R + T + L)/3$, при $T \le E_T$

$$S_I = S_{Ir} = \int_{E_T}^R (x - E_T) f_r(x)dx = \frac{(R-E_T)^3}{3(R-L)(R-T)}.$$

а при $T > E_T$

$$S_I = S_{Il} = \int_L^{E_T} (E_T - x) f_l(x)dx = \frac{(E_T - L)^3}{3(R-L)(T-L)}.$$

Здесь левая ветвь плотности треугольного распределения $f_l(x) = 2(x - L)/[(R - L)(T - L)]$ (при $L \le x \le T$), а правая $f_r(x) = 2(R - x)/[(R - L)(R - T)]$ (при $T < x \le R$).

Показано, что как функция моды T среднее полуотклонение $S_I(T)$ выпукло вниз, монотонно убывает на интервале [L, $(L + R)/2$] и монотонно возрастает на интервале [$(L + R)/2$, R]. Функция симметрична относительно вертикальной оси $T = (L + R)/2 = E_U$, ее минимум S_{Imin} достигается в точке $T = E_U$, $S_{Imin} = (R - L)/12$, а максимум S_{Imax} в точках $T = L$ и $T = R$, $S_{Imax} = =S_I(L) = S_I(R) = = 8(R–L)/81$.

Таким образом, при выборе функций распределения шансов для описания их знаний об интервальных оценках показателей качества экспертам полезно учитывать следующее. Переход от равномерных распределений к иным, например, треугольным, означает наличие большего знания об объекте. Это приводит к снижению величины индикатора риска, причем $S_{Imax} < S_{IU}$ (для одинаковых интерваловносителей). Выбор в треугольных распределениях моды, равной среднему соответствующего равномерного распределения E_U, имеет следствием наименьшую величину индикатора риска, а отклонения значений моды T от E_U в обе стороны приводят к росту индикатора риска. Однако эти отклонения с позиций сравнения альтернатив не эквивалентны. Отклонения T вправо от E_U приводят к увеличению среднего E_T, - индикатора предпочтительности в подходе «среднее – риск», а влево от E_U к уменьшению E_T.

Индикатор S_{Il} характеризует возможное из-за неопределенности среднее отклонение в неблагоприятную сторону показателя качества альтернативы от величины математического ожидания. Конечно, такое среднее отклонение существенно меньше максимально возможного, так S_{IU} в четыре раза меньше наибольшего возможного неблагоприятного отклонения. Однако выбор математического ожидания в качестве целевого показателя при оценке риска может не соответствовать предпочтениям ЛПР и его склонностям к риску. Так для равномерного распределения шансов при таком выборе ровно половина возможных точечных реализаций показателя качества окажется меньше величины математического ожидания.

Поэтому целесообразно введение индикатора риска $S_{Il}(a)$, аналогичного среднему полуотклонению, но связанного с произвольным допустимым целевым значением a показателя качества альтернативы. Потребуем, однако, чтобы целевые значения a показателя качества альтернативы были неотрицательны. Полезно иметь также выражение для $S_{Ir}(a)$. По определению

$$S_{Il}(a) = \int_{L}^{a} (a-x) f(x) dx, \quad S_{Ir}(a) = \int_{a}^{R} (x-a) f(x) dx.$$

Можно видеть, что $S_{Il}(a) = a - E + S_{Ir}(a)$. Действительно,

$$\int_{L}^{R} (a-x) f(x) dx = \int_{L}^{a} (a-x) f(x) dx + \int_{a}^{R} (a-x) f(x) dx = a - E = S_{Il}(a) - S_{Ir}(a).$$

Для простейших случаев равномерных и треугольных распределений шансов для индикатора $S_{Il}(a)$ могут быть получены следующие соотношения: для равномерных распределений $S_{Il}(a) = (a - L)^2/[2(R - L)]$, а для треугольных при $a < T$ $S_{Il} = (a - L)^3/[3(R - L)(T - L)]$ и при $a > T$ $S_{Il} = a - E_T + (R - a)^3/[3(R - L)(R - T)]$.

Обратим внимание на тот факт, что в реальных задачах сравнения $R > 0$, $L < 0$, поскольку при $R < 0$ альтернативу следует, скорее всего, исключить из числа сравниваемых, а при $L > 0$ альтернатива чаще всего априори пригодна для реализации. Тогда $S_{Il}(a) > 0$, но отрицательные значения математического ожидания E возможны. Естественно потребовать, чтобы к сравнению допускались альтернативы с $E > 0$. Для равномерного распределения шансов это означает, что пригодные для сравнения ИА должны быть такими, что $R > -L$, а для треугольного $R + T > -L$.

2. Метод «среднее – риск» для полиинтервальных альтернатив: обобщенные интервальные оценки

В рамках полиинтервального подхода можно выделить два основных направления: описание посредством аппарата нечетких множеств [16] и с помощью формализма обобщенных интервальных оценок (ОИО) [17, 18].

Подход ОИО является прямым обобщением моноинтервального подхода на поли- интервальный случай. В первом из них первоначальная точечная оценка анализируемого параметра для учета неопределенности знаний о нем «размывается», не обязательно симметрично, заполняя некоторый интервал возможных значений параметра. Для описания шансов воплощения возможных точечных реализаций x параметра используется аппарат функций распределения, задаваемых на интервалах-носителях плотностью функции распределения шансов $f(x)$. В подходе ОИО исходной оценкой служит интервал $I_u = [L_u, R_u]$, и уже он размывается, вновь не обязательно симметрично, порождая в качестве итоговой оценки параметра систему интервалов с интервалом максимальной длины $I_d = [L_d, R_d]$. Какие именно интервалы войдут в результирующую систему, отграничиваемую I_u и I_d, определяется формой, так называемой полиинтервальной оценки (ПИО) – криволинейной трапеции, содержащей все интервалы, включаемые в их систему. Для спецификации шансов реализации интервалов, образующих систему, вводится случайная величина β, помещаемая на ось ординат двумерной плоскости и имеющая плотность распределения шансов $f_1(\beta)$. Величина β служит меткой интервалов, входящих в их систему. Шансы воплощения возможных точечных реализаций x на каждом из интервалов с меткой β, помещаемых на ось абсцисс двумерной плоскости, описываются условной функцией распределения с плотностью $f_2(x|\beta)$. Таким образом, ОИО– это ПИО с заданной на последней плотностью совместной функции распределения $f(\beta, x) = f_1(\beta) f_2(x|\beta)$.

Итак, формализм ОИО позволяет экспертам дифференцировать входящие в такую поли- интервальную оценку моноинтервалы по степени вхождения в нее не только за счет задания формы ПИО – известного аналога функции принадлежности аппарата нечетких множеств, но и за счет задания распределения шансов их включения в ОИО. При этом распределения шансов реализации значений параметров на моно интервалах, образующих ПИО, могут быть произвольными, а не только равномерными.

Будем в дальнейшем считать, что боковые стороны трапеции ПИО прямолинейны, оценка нормирована так, что $0 < \beta < 1$, метка $\beta = 0$ отвечает интервалу $[L_d = L, R_d = R]$, $\beta = 1$ интервалу $[L_u, R_u]$, причем $L_d < L_u < R_u < R_d$. Такие конфигурации чаще всего возникают при представлении обобщенными интервальными оценками знаний экспертов о параметрах решаемых задач. Конфигурации ПИО более общего вида, например, в сценарном анализе зависимых величин, ПИО с криволинейными боковыми сторонами, а также отвечающие им проблемные ситуации представлены в работах [19,20].

Достаточно часто в приложениях используют ПИО треугольной формы, что соответствует ситуации, когда системой интервалов замещается первоначальная точечная оценка T. В этом случае ПИО задается тремя угловыми точками L, T, R, такими, что $L < T < R$. Распределения шансов $f_1(\beta)$ и $f_2(x|\beta)$, как уже отмечалось, могут быть любыми.

Пусть для простоты распределения шансов на координатных осях ПИО равномерные. Тогда, интегрируя по всем β с учетом задания совместной функции распределения на ПИО треугольной формы, получим на $[L, R]$ - интервале с меткой $\beta = 0$ - плотность маргинальной функции распределения шансов $f(x)$, плотность обобщенного равномерного распределения (ОРР). ОРР на $[L, R]$ представляет собой вероятностную смесь равномерных распределений $f_2(x|\beta)$ со смешивающей функцией $f_1(\beta)$ также равномерной. Свойства ОРР для трапецеидальных и, как частный случай, треугольных ПИО изучены в работах [19, 21].

Используя полученные там результаты, имеем для плотности $f(x)$ ОРР на ПИО треугольной формы: при $L < x < T$ $f(x) = f_l(x)$; при $T < x < R$ $f(x) = f_r(x)$, где $f_l(x) = \ln[(T - L)/(T - x)]/(R - L)$ – левая ветвь плотности распределения, $f_r(x) = \ln[(R - T)/(x - T)]/(R - L)$ – ее правая ветвь. Действуя обычным образом, для среднего E_{GU} ОРР получаем: $E_{GU} = (L + 2T + R)/4$. Для случая симметричной ПИО, когда $T = (L + R)/2$, $E_{GU} = E_U$. Таким образом, ИА, пригодные для сравнения в рамках ОИО-подхода, должны быть таковы, чтобы выполнялось неравенство $R + 2T > - L$. Отметим, что при $T > 0$ это более слабое требование по сравнению с треугольным распределением монослучая, а при $T < 0$ более сильное.

Можно видеть, что $E_{GU} > T$ при $T < E_U$, а при $T > E_U$ $E_{GU} < T$. Имея это в виду, получаем при $T < E_U$ (и, следовательно, при $E_{GU} > T$)

$$S_I = S_{Ir} = \int_{E_{GU}}^{R} (x - E_{GU}) f_r(x) dx,$$

а при $T > E_U$ (и, следовательно, при $E_{GU} < T$):

$$S_I = S_{Il} = \int_{L}^{E_{GU}} (E_{GU} - x) f_l(x) dx.$$

Интегрируя, получаем при $T < E_U$

$$S_I = \frac{1}{2(R-L)}\{(E_{GU} - T)^2 \ln\frac{R-T}{E_{GU}-T} + $$

$$+ \frac{R - E_{GU}}{2}[R - E_{GU} - 2(E_{GU} - T)]\}$$

а при $T > E_U$

$$S_I = \frac{1}{2(R-L)}\{(T - E_{GU})^2 \ln\frac{T-L}{T-E_{GU}} + $$

$$+ \frac{E_{GU} - L}{2}[E_{GU} - L - 2(T - E_{GU})]\}$$

Подобно поведению индикатора полуотклонения для треугольного распределения на моноинтервале-носителе, в случае ОИО с треугольной ПИО и ОРР на интервале максимальной протяженности $[L, R]$ в их системе, $S_I(T)$ как функция верхней угловой точки T выпукло вниз, монотонно убывает на интервале $[L, (L + R)/2]$ и монотонно возрастает на интервале $[(L + R)/2, R]$. Функция симметрична относительно вертикальной оси $T = (L + R)/2 = E_U$, ее минимум S_{Imin} достигается в точке $T = E_U$, $S_{Imin} = (R - L)/16$, а максимум S_{Imax} в точках $T = L$ и $T = R$, $S_{Imax} = S_I(L) = S_I(R) = (R - L)(\ln 4 + 3/2)/32$.

Обратимся теперь к индикаторам риска $S_{Il}(a)$, аналогичных среднему полуотклонению, но связанных с произвольным допустимым целевым значением a показателя качества альтернативы. В случае ОИО имеем:

$$S_{IGE}(a < T) = [\frac{(T-L)^2 - (T-a)^2}{4} -$$

$$-(a-L)(T-a) - \frac{(T-a)^2 \ln\dfrac{T-a}{T-L}}{2}]/(R-T),$$

$$S_{IGE}(a>T)=a-E_{GE}+[\frac{(R-T)^2-(a-T)^2}{4}-$$

$$-(a-T)(R-a)-\frac{(a-T)^2\ln\frac{a-T}{R-T}}{2}]/(R-T).$$

Эти соотношения позволяют ЛПР найти значения индикатора риска для пороговых величин показателя качества a, согласующихся с их склонностью к риску.

3. Метод «среднее-риск» для полиинтервальных альтернатив: нечеткие объекты

Обратимся теперь к реализации метода «среднее-риск» для случая, когда поли- интервальные оценки представлены как нечеткие объекты. Для сопоставимости результатов с полученными выше результатами подхода ОИО рассмотрим вначале случай треугольных функций принадлежности.

Будем пользоваться теми же показателями предпочтительности (среднее) и риска (среднее полуотклонение), что и выше, однако вопрос в том, как следует понимать эти величины, требует теперь уточнения. Простейший способ получения искомых показателей, при котором функция принадлежности трактуется как плотность функции распределения, едва ли может считаться обоснованной. Более последовательной представляется точка зрения [22, 23], согласно которой различные числовые характеристики, связанные с нечеткими объектами и отвечающие соответствующим характеристикам теории вероятностей, имеют возможность принимать интервальные значения. Поскольку общение с экспертами-практиками желательно проводить на привычном для них языке [24], настоятельно необходимо перейти от таких интервальных величин к характеризующим их числовым оценкам. Для такого перехода используется процедура дефаззификации. Выбор способа дефаззификации определяется ЛПР.

Треугольная функция принадлежности задается тройкой (L, T, R) такой, что $L < T < R$. Будем пользоваться для описания полиинтервальных нечетких объектов их декомпозицией на совокупности α-уровней и примем, что функции принадлежности нормальны, так что $\alpha \in [0, 1]$. Тогда для левых $L(\alpha)$ и правых $R(\alpha)$ границ интервалов $I(\alpha)$, вложенных в треугольную функцию принадлежности, имеем: $L(\alpha) = (1-\alpha)L + \alpha T$, $R(\alpha) = (1-\alpha)R + \alpha T$.

Полагая, что на всех (обычных, не нечетких) интервалах $I(\alpha)$, отвечающих α-уровням, заданы равномерные распределения шансов [25], для математических ожиданий $E(\alpha)$ на α уровнях получаем: $E(\alpha) = \alpha T + (1-\alpha)E_U$, где $E_U = (L + R)/2$. Можно видеть, что возможные значения $E(\alpha)$ лежат в интервале $[E_U, T]$ при $E_U < T$ и в интервале $[T, E_U]$ при $E_U > T$.

Для дефаззификации $E(\alpha)$ будем пользоваться двумя методами. В первом из них все $I(\alpha)$ рассматриваются при получении одночисловой характеристики E_F как равноправные, а во втором, методе центра тяжести, вклад $I(\alpha)$ в интегральную одночисловую характеристику E_{F1} увеличивается с ростом α: $E_F = \int_0^1 d\alpha E(\alpha)$, $E_{F1} = 2\int_0^1 d\alpha\alpha E(\alpha)$. В последнем соотношении множитель 2 является нормирующим. Тогда $E_F = (E_U + T)/2$, $E_{F1} = (E_U + 2T)/3$. Можно видеть, что E_F больше E_{F1} при $T < E_U$, меньше в противном случае и не совпадает, вообще говоря, со средним E_T для треугольного распределения шансов. При этом E_F и E_{F1} больше E_T при $T > E_U$, меньше в противном случае, эти средние совпадают при $T = E_U$. Кроме того, $E_F = E_{GU}$.

Подобным образом могут быть получены и одночисловые характеристики, аналогичные индикаторам среднего полуотклонения. Для каждой интервальной оценки на α-срезе для отвечающего ей индикатора среднего полуотклонения $S_l(\alpha)$ имеем:

$$S_l(\alpha)=\int_{L(\alpha)}^{E(\alpha)} dx[E(\alpha)-x]/\Delta(\alpha)=$$

$$=[E(\alpha)-L(\alpha)]^2/2\Delta(\alpha)=(1-\alpha)(E_U-L)^2/2(R-L),$$

где $\Delta(\alpha) = R(\alpha) - L(\alpha)$.

Можно видеть, что возможные значения $S_l(\alpha)$ лежат в интервале $[0, (R-L)/8]$. Дефаззификация первым методом теперь дает для индикатора среднего полуотклонения S_{lF}: $S_{lF}=(R - L)/16$, а методом центра тяжести $S_{lF1} =(R-L)/24$, т.е. $S_{lF} = 3S_{lF1}/2$. Таким образом, если E_F может быть как больше E_{F1}, так и меньше E_{F1}, то S_{lF} всегда больше S_{lF1}. При этом если и E_F и E_{F1} зависят от положения вершины T функции принадлежности, то величины индикаторов среднего полуотклонения не зависят от него.

Предложенный метод построения одночисловых оценок для интервальных нечетких величин может быть применен и для других числовых характеристик, например, для одночисловой оценки аналога дисперсии случайной величины. Так, в случае треугольной функции принадлежности имеем для дисперсии $Var(\alpha)$ на α-срезе:

$$Var(\alpha)=\int_{L(\alpha)}^{R(\alpha)}\frac{[x-E(\alpha)]^2\,dx}{\Delta(\alpha)}=\frac{(1-\alpha)^2(R-L)^2}{12}.$$

Таким образом, возможные значения дисперсии лежат в интервале $[0, (R-L)^2/12]$. При дефаззификации первым способом для одночисловой оценки дисперсии Var_F получаем $Var_F = (R - L)^2/36$, а при дефаззификации методом центра тяжести для оценки дисперсии Var_{F1} имеем: $Var_{F1} = (R-L)^2/72$. Итак, $Var_F = 2Var_{F1}$. Этот метод построения одночисловых оценок для интервальных нечетких величин может быть использован и для других видов функций принадлежности, в частности, для трапецеидальной. Трапецеидальная функция принадлежности задается четверкой (L, T_1, T_2, R) такой, что $L < T_1 < T_2 < R$. Для левых $L(\alpha)$ и правых $R(\alpha)$ границ интервалов $I(\alpha)$, вложенных в трапецеидальную функцию принадлежности, имеем тогда: $L(\alpha) = (1-\alpha)L + \alpha T_1$, $R(\alpha) = (1-\alpha)R + \alpha T_2$. Для математических ожиданий $E(\alpha)$ на α уровнях получаем теперь соотношение: $E(\alpha)= \alpha(T_1 + T_2)/2 + (1-\alpha)E_U$.

Возможные значения $E(\alpha)$ лежат в интервале $[E_U, (T_1 + T_2)/2]$ при $E_U < (T_1 + T_2)/2$ и в интервале $[(T_1 + T_2)/2, E_U]$ в противном случае. Дефаззификация первым методом дает для индикатора среднего $E_F = [E_U + (T_1 + T_2)/2]/2$, а по методу центра тяжести $E_{F1} = (E_U + T_1 + T_2)/3$. Можно видеть, что E_F больше E_{F1} при $L + R + T_1 + T_2 > 0$ и меньше в противном случае.

Точно так же, как выше, для средних полуотклонений $S_l(\alpha)$ на α-срезах получаем, что их возможные значения лежат в интервале $[(T_2 - T_1)/8, (R - L)/8]$, а для одночисловых оценок S_{lF} и S_{lF1} имеем: $S_{lF} = (R - L + T_2 - T_1)/16$, $S_{lF1} = [R - L + 2(T_2 - T_1)]/24$. Теперь величины индикаторов среднего полуотклонения зависят от положения верхних угловых точек функции принадлежности. Знак разности S_{lF} и S_{lF1} определяется знаком величины $R - L + T_1 - T_2$, а потому и здесь, как и для треугольных функций принадлежности, S_{lF} всегда больше S_{lF1}.

Как и выше, для дисперсии $Var(\alpha)$ на α-срезе имеем:

$$Var(\alpha)=\int_{L(\alpha)}^{R(\alpha)}\frac{[x-E(\alpha)]^2\,dx}{\Delta(\alpha)}=$$

$$=\frac{[(1-\alpha)(R-L)+\alpha(T_2-T_1)]^2}{12}.$$

Таким образом, возможные значения дисперсии лежат в интервале $[(T_2 - T_1)^2/12, (R - L)^2/12]$. При дефаззификации первым способом для одночисловой оценки дисперсии Var_F получаем $Var_F = (T_2 - T_1 + R - L)^2/36$, а при дефаззификации методом центра тяжести для одно-числовой оценки дисперсии Var_{F1} имеем: $Var_{F1} = [(R - L)^2+(R - L)(T_2 - T_1) + 3(T_2 - T_1)^2]/72$. Можно показать, что $Var_F > Var_{F1}$.

Отметим, что все полученные для трапецеидального случая соотношения переходят в соответствующие соотношения для треугольной функции принадлежности при $T_1 = T_2 = T$.

В случае нечетких объектов для индикаторов риска $S_{II}(a)$, аналогичных среднему полуотклонению, но связанных с произвольным допустимым целевым значением a показателя качества альтернативы, введем для каждого α-среза допустимые целевые значения $a(\alpha)$ следующим образом: $a(\alpha, k) = L(\alpha) + k[R(\alpha) - L(\alpha)]$. Можно видеть, что $a(\alpha, k = 1/2) = E(\alpha)$. Действуя теперь так же, как выше, в случае треугольной функции принадлежности для одно-числовой оценки индикатора риска S_{IF}, найденной первым способом дефаззификации, получаем $S_{IF} = k^2(R - L)/4$, а для оценки S_{IF1}, найденной методом центра тяжести, имеем $S_{IF1} = k^2(R - L)/6$. Для случая трапецеидальной функции принадлежности соответствующие соотношения имеют вид: $S_{IF} = k^2(R - L + T_2 - T_1)/4$, $S_{IF1} = k^2[R - L + 2(T_2 - T_1)]/6$.

В завершение приведем итоговые минимальные K_{min} и максимальные K_{max} значения коэффициентов при параметре протяженности интервалов $R - L$ в показателе риска S_I для рассмотренных здесь случаев. Эта информация может быть полезной экспертам при работе с интервальными оценками. Моноинтервалы: равномерное распределение $K_{min} = K_{max} = 0{,}125$; треугольное распределение $K_{min} = 0{,}083$; $K_{max} = 0{,}099$. Полиинтервальные оценки: обобщенное равномерное распределение $K_{min} = 0{,}062$; $K_{max} = 0{,}09$, одночисловые оценки для треугольных функций принадлежности при дефаззификации первым способом $K_{min} = K_{max} = 0{,}062$; при дефаззификации методом центра тяжести $K_{min} = K_{max} = 0{,}041$.

Заключение

В статье применительно к полиинтервальным объектам рассмотрен метод «среднее-риск» сравнения ИА. Достоинство метода состоит в возможности расчета для каждой отдельной ИА обоих основных критериальных показателей, необходимых для оценки таких объектов, – индикатора предпочтительности альтернативы и индикатора сопутствующего риска (в частности, среднего полуотклонения). Однако зависимость риска от контекста, т.е. факт наличия других альтернатив в их сравниваемой группе и их влияния на величину риска, не принимается во внимание, что является недостатком метода. Следует упомянуть еще один недостаток, присущий всем методам класса downside risk с расчетом показателей, учитывающих только левый «хвост» распределения шансов: сопоставление с шансами получения выгод (правый «хвост»), – учет риска возможной упущенной выгоды, – не производится.

Недостаток метода «среднее-риск», связанный с необходимостью учета коллективных эффектов в группе сравниваемых ИА, преодолевается в методе оценки «коллективного риска» [26]. Однако этот метод также не лишен недостатков. При его применении сравнивается лишь относительная эффективность ИА. При этом альтернатива, признанная эффективной при таком сравнении, сама по себе может оказаться неэффективной (убыточной), чего не может быть при применении метода «среднее-риск».

Таким образом, в настоящее время нет подходов или методов решения задач выбора лучших интервальных альтернатив, превосходящих другие по качеству рекомендаций ЛПР, предлагаемых на их основе. Каждый метод и подход имеет свои достоинства и недостатки, разные трактовки риска и методы расчета их индикаторов дополняют друг друга. В связи с этим разумной представляется попытка создания комплексного метода оценки интервальных альтернатив, сочетающего при совместном использовании достоинства различных частных методов. На первом этапе применения комплексного метода метод «среднее-риск» используется для отбора приемлемых ИА, рассматриваемых изолированно от прочих в их сравниваемой совокупности, а на втором – отбор эффективных ИА в уже суженной их совокупности производится с учетом величины коллективного риска. Для моноинтервальных оценок такая попытка сделана в работах [9, 15]. Для реализации комплексного метода для полиинтервальных объектов следует разработать для них метод оценки «коллективного риска», что будет сделано в дальнейшем.

Литература

1. Szegö G. Measures of risk // J. Banking&Finance. 2002. V. 26(7). P. 1253–1272.
2. Локтионов В.И. Свойство адаптации как критерий эффективности инвестиционных проектов в топливно-энергетическом комплексе // Экономический анализ: теория и практика. 2013. № 6(309). С. 45–50.
3. Shepelyov G., Sternin M. Methods for comparison of alternatives described by interval estimations// International Journal of Business Continuity and Risk Management. 2011. V. 2. Issue 1. P.56–69.
4. Стернин М.Ю., Шепелев Г.И. Оценка риска в совокупности интервальных альтернатив // Искусственный интеллект и принятие решений. 2015. №3. С. 83–91.
5. Shepelev G. Decision-making in groups of interval alternatives // International journal “Information theories and applications”. 2016. V. 23. Issue 4. P. 303–320.
6. Fishburn P.C. Mean-risk analysis with risk associated with below-target returns // American Economic Review. 1977. V. 67. P. 116–126.
7. Подиновский В.В. Числовые меры риска как критерии выбора при вероятностной неопределенности // Искусственный интеллект и принятие решений. 2015. №2. С. 60–74.
8. Ogryczak W, Ruszczyński A. From stochastic dominance to mean-risk models: semideviations as risk measures // European journal of operational research. 1999. V. 116. P. 33–50.
9. Shepelev G.I., Morozova N.V. Multimethod approach to comparing of interval alternatives // Труды XII-й Международной школы-симпозиума «Анализ, моделирование, управление, развитие» (АМУР-2018). Симферополь - Судак, Крым, Россия. 2018. С. 502–507.
10. Roy A.D. Safety first and the holding of assets // Econometrica. 1952. V. 20(3). P. 431–449.
11. Bawa V. S. Optimal rules for ordering uncertain prospects // Journal of Financial Economics. 1975. V 2(1). P. 95–121.
12. Sortino F.A., Meer R.V. Downside Risk // Journal of Portfolio Management. 1991. V. 17(4). P. 27–31
13. Nawrocki D. A Brief History of Downside Risk Measures // The Journal of Investing. 1999. V. 8(3). P. 9–25.
14. Grechuk B., Molyboha A., Zabarankin M. Mean-deviation analysis in the theory of choice // Risk analysis. 2012. V. 32. P. 1277–1292.
15. Шепелев Г.И., Жиянов В.И. Комплексный метод сравнения интервальных альтернатив в условиях риска // Вестник ЦЭМИ РАН. 2018. Вып. 3 [Electronic resource]. Access for registered users. URL: http://cemi.jes.su/s111111110000061-0-1 (circulation date:15.01.2019).
16. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука. 1981. – 208 с.
17. Chugunov N., Shepelyov G., Sternin M. The generalized interval estimations in decision making under uncertainty

// International Journal of Technology, Policy and Management. 2008. V. 8. Issue 3. P. 298–321.
18. Стернин М., Шепелев Г. Обобщенные интервальные экспертные оценки в принятии решений // Доклады академии наук. 2010. Т. 432. № 1. С. 33–34.
19. Стернин М.Ю., Шепелев Г.И. Анализ сценариев в методе обобщенных интервальных оценок //Таврический вестник информатики и математики. №2. 2008. С. 195–201.
20. Стернин М.Ю., Чугунов Н.В., Шепелев Г.И. Учет неопределенности экспертных знаний: синтез интервального и вероятностного подходов // Информационные технологии и вычислительные системы. 2005. №4. С. 36–46.
21. Стернин М.Ю., Шепелев Г.И., Шепелев Н.Г. Свойства обобщенного равномерного распределения вероятностей/Вторая международная конференция «Системный анализ и информационные технологии» (САИТ-2007). Труды конференции в 2-х томах. М.: ЛКИ. 2007. Т.1. С. 239-242.
22. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике/ Пер. с фр. - М.: Радио и связь. 1990 . - 288 с. (Dubois D., Prade H. Theorie des possibilites. Paris: Masson, 1988).
23. Хургин Я.И. Четкие и нечеткие алгебраические средние и их использование // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2000. Т.66. №1. С.64–66.
24. Ларичев О.И., Петровский А.Б. Системы поддержки принятия решений. Современное состояние и перспективы развития. // Итоги науки. Техническая кибернетика. М.: ВИНИТИ. 1987. Т. 21. С. 131–164.
25. Дилигенский Н.В., Дымова Л.Г., Севастьянов П.В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология. М.: Машиностроение. 2004. -397 с.
26. Shepelev G. Risk behaviour in a set of interval alternatives //International Journal "Information models and analyses". 2015. V. 4. P. 303–323.

Comparing poly-interval alternatives: "mean-risk" method

G. I. Shepelev

Department of Federal research center "Computer science and control" of RAS, Moscow, Russia

Abstract. For poly-interval objects, such as generalized interval estimations and fuzzy values, are proposed methods to calculate numerical characteristics, which are similar to characteristics of distribution functions of probability theory (mathematical expectation, variance, average semideviation). The methods are based on the defuzzification of interval estimates of the indicated numerical characteristics in the case of fuzzy poly-interval objects and on the representation of generalized interval estimations as a probability mixture of distributions forming such generalized estimations. These results allow extend the well-known "mean-risk" method, which is usually used for comparing mono-interval values on their preference and risk, to the case of poly-interval estimations.

Keywords: comparing poly-interval alternatives, "mean-risk" method, generalized interval estimations, numerical characteristics of fuzzy poly-interval values.

DOI 10.14357/20718594190102

References

1. Szegö G. Measures of risk // J. Banking&Finance. 2002. V. 26(7). P. 1253–1272.
2. Loktionov V. 2013. Svoistvo adaptatsii kak kritery effektivnosti investitsionnykh proektov v toplivno-energeticheskom komplekse [Adaptation property as performance criterion for investment projects in the fuel and energy complex] // Ekonomichesky analiz: teoriya i praktika [Economic analysis: theory and practice] 6(309): 45–50.
3. Shepelyov G., Sternin M. Methods for comparison of alternatives described by interval estimations// International Journal of Business Continuity and Risk Management. 2011. V. 2. Issue 1. P.56–69.
4. Sternin M., Shepelev G. 2015. Otsenka riska v sovokupnosti intervalnykh alternativ [Risk estimating in interval alternatives set] // Iskusstvenny intellekt i prinyatie resheny [Artificial intelligence and decision-making] 3: 83–91.
5. Shepelev G. Decision-making in groups of interval alternatives // International journal "Information theories and applications". 2016. V. 23. Issue 4. P. 303–320.
6. Fishburn P.C. Mean-risk analysis with risk associated with below-target returns // American Economic Review. 1977. V. 67. P. 116–126.
7. Podinovsky V. 2015. Chislovye mery riska kak kriterii vybora pri veroyatnostnoi neopredelennosti [Numerical risk measures as selection criteria for probabilistic uncertainty] //Iskusstvenny intellekt i prinyatie resheny [Artificial intelligence and decision-making] 2: 60–74.
8. Ogryczak W, Ruszczyński A. From stochastic dominance to mean-risk models: semideviations as risk measures // European journal of operational research. 1999. V. 116. P. 33–50.
9. Shepelev G.I., Morozova N.V. 2018. Multimethod approach to comparing of interval alternatives // Trudy 12-oi Mezhdunarodnoi shkoly-simposiuma "Analiz, modelirovanie, upravlenie, razvitie" (AMUR-2018) [The 12th International

School-Symposium "Analysis, Modeling, Management, Development" (AMUR-2018)]. Simpheropol. P. 502 – 507.
10. Roy A.D. Safety first and the holding of assets // Econometrica. 1952. V. 20(3). P. 431–449.
11. Bawa V. S. Optimal Rules For Ordering Uncertain Prospects // Journal of Financial Economics. 1975. V 2(1). P. 95–121.
12. Sortino F.A., Meer R.V. Downside Risk // Journal of Portfolio Management. 1991. V. 17(4). P. 27–31.
13. Nawrocki D. A Brief History of Downside Risk Measures // The Journal of Investing. 1999. V. 8(3). P. 9–25.
14. Grechuk B., Molyboha A., Zabarankin M. Mean-deviation analysis in the theory of choice // Risk analysis. 2012. V. 32. P. 1277–1292.
15. Shepelev G., Zhiyanov V. Kompleksnyi metod sravneniya alternativ v usloviyakh riska [Comprehensive method for comparing interval alternatives under risk] //Vestnik TSEMI [Herald of CEMI]. 2018. Issue 3 [Electronic resource]. Access for registered users. URL: http://cemi.jes.su/s111111110000061-0-1 (circulation date: 15.01.2019).
16. Orlovsky S. Problemy prinyatiya resheny pri nechetkoi iskhodnoi informarsii. 1981. [Decision making problems with fuzzy source information]. Moscow: Nauka. 208 p.
17. Chugunov N., Shepelyov G., Sternin M. The generalized interval estimations in decision making under uncertainty // International Journal of Technology, Policy and Management. 2008. V. 8. Issue 3. P. 298–321.
18. Sternin M., Shepelev G. Generalized interval expert estimates in decision making // Doklady Mathematics. 2010. V. 81. Issue 3. P. 485–486.
19. Sternin M., Shepelev G. 2008. Analiz stsenariev v metode obobshchennykh intervalnykh otsenok [Scenario analysis in the method of generalized interval estimates] //Tavrichesky vestnik informatiki i matematiki [Tavrichesky bulletin of computer science and mathematics]. 2: 195–201.
20. Sternin M., Chugunov N., Shepelev G. 2005. Uchet neopredelennosti ekspertnykh znany: sintez intervalnogo i veroyatnostnogo podkhodov [The uncertainty of expert knowledge: the synthesis of interval and probabilistic approaches] // Informatsionnye tekhnologii i vychislitelnye sistemy [Information technology and computing systems]. 4: 36–46.
21. Sternin M., Shepelev G., Shepelev N. 2007. Svoistva obobshchennogo ravnomernogo raspredeleniya veroyatnostei [Properties of the generalized uniform probability distribution] // Trudy 2-oi Mezhdunarodnoi konferentsii “Sistemny analiz i informatsionnye tekhnologii” [2-nd International Conference "System Analysis and Information Technologies" (SAIT-2007)]. Moscow. V.1. P. 239-242.
22. Dubois D., Prade H. 1988. Theorie des possibilites. Paris: Masson. 288 p.
23. Khurgin Ya. 2000. Chetkie i nechetkie algebraicheskie srednie i ikh ispolzovanie [Clear and fuzzy algebraic means and their using] //Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov. [Factory laboratory. Diagnostics of materials] 66(1): 64–66.
24. Larichev O., Petrovsky A. 1987. Sistemy podderzhki prinyatiya resheny. Sovremennoe sostoyanie i perspektivy razvitiya [Decision support systems. State of art and development prospects] //Itogi nauki. Tekhnicheskaya kibernetika [Results of science. Technical cybernetics]. Moscow. VINITI 21: 131–164.
25. Diligensky N., Dymova N., Sevastiyanov P. 2004. Nechetkoe modelirovanie i mnogokriterialnaya optimizatsiya proizvodstvennykh system v usloviyakh neopredelennosti: tekhnologiya, ekonomika, ekologiya [Fuzzy modeling and multi-criteria optimization of production systems under uncertainty: technology, economy, ecology]. Moscow: Engineering-1 Publs. 397 p.
26. Shepelev G. Risk behaviour in a set of interval alternatives //International Journal ”Information models and analyses”. 2015. V. 4. P. 303–323.