Многокритериальный выбор на основе нечеткой информации*

В. Д. Ногин

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. В работе предлагается новый метод решения задачи многокритериальной оптимизации числовой вектор-функции на нечетком множестве. Функция принадлежности нечеткого допустимого множества присоединяется к первоначальному набору критериев, что позволяет исходную задачу многокритериальной оптимизации трактовать как задачу поиска подходящего компромиссного (парето-оптимального) решения относительно расширенного набора критериев. Предполагается, что имеется лишь нечеткая информация о предпочтениях ЛПР в виде квантов информации. На первом этапе «наилучший» компромисс ищется на основе аксиоматического подхода, с помощью которого осуществляется сужение множества Парето. Результатом сужения является нечеткое множество с функцией принадлежности, которая определяется на основе использованной нечеткой информации. На втором этапе полученная функция принадлежности добавляется к имеющемуся расширенному набору критериев, после чего для решения вновь образованной многокритериальной задачи применяется процедура ее скаляризации, реализующая идею целевого программирования.

Ключевые слова: нечеткое множество, многокритериальная оптимизация, многокритериальный выбор, сужение множества Парето, кванты нечеткой информации, скаляризация, целевое программирование.

DOI 10.14357/20718594190205

Введение

Впервые задача оптимизации с нечеткими данными была рассмотрена Л. Заде и Р. Беллманом [1]. Они сформулировали задачу достижения нечетко поставленной цели, предложив в качестве ее решения рассматривать пересечение нечеткого множества цели и нечеткого множества ограничений. Впоследствии идея подобного решения многократно использовалась, например, в работах [2-6] при решении задачи нечеткого линейного программирования. К настоящему времени разработано достаточно много моделей и методов решения задач нечеткого линейного и нелинейного программирования, нечеткого многоцелевого, целочисленного и динамического программирования [7-9].

Орловский С. А. [10-11] предложил задачу оптимизации числовой векторной функции на нечетком множестве рассматривать и решать как задачу отыскания области компромиссов (множества Парето) в новой многокритериальной задаче, в которой участвует исходная целевая вектор-функция, а также функция принадлежности нечеткого множества допустимых решений. Эта идея получила продолжение и развитие в работе [12], где была предложена двухэтапная процедура решения исходной задачи на основе квантов (четкой) информации об отношении предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР), в рамках аксиоматического подхода, развиваемого автором на протяжении ряда лет. Между тем, нередко сведения о предпочтениях ЛПР носят расплывчатый, нечеткий характер и, тем самым, акту-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 16-29-12864, 17-07-00371, 17-29-03236).

✉ *Ногин Владимир Дмитриевич. E-mail*: *noghin@gmail.com*

альной является задача поиска «наилучшего» компромисса при помощи квантов нечеткой информации. Решению этой задачи и посвящена данная работа.

В первом разделе излагаются начальные сведения из теории нечетких множеств и нечетких отношений. Далее рассматривается система аксиом, лежащая в основе используемого аксиоматического подхода, а также формулируется принцип Эджворта-Парето в «нечеткой форме». Этот принцип играет важную роль в дальнейшем изложении.

В третьем разделе обсуждаются вопросы сужения множества Парето (области компромиссов) на основе квантов нечеткой информации. Дается определение кванта нечеткой информации и формулируется теорема, благодаря которой можно осуществлять сужение множества Парето с использованием нечеткой информации. Эта информация позволяет учесть предпочтения ЛПР относительно имеющихся критериев и состоит из нечетких сведений о том, в какой мере тот или иной критерий (группа критериев) является более значимым (более значимой), чем другой критерий (другая группа критериев). Наличие подобной нечеткой информации позволяет осуществить сужение множества Парето до некоторого его нечеткого подмножества, функция принадлежности которого присоединяется к набору исходных критериев, в результате чего образуется новая многокритериальная задача.

В последнем разделе для выполнения второго, завершающего этапа решения исходной многокритериальной задачи на нечетком множестве, описан метод скаляризации полученной многокритериальной задачи, реализующий идею целевого программирования, состоящую в наилучшем равномерном приближении к «идеальному» недостижимому вектору. Приводятся два иллюстративных примера, которые демонстрируют применение предлагаемого двухэтапного подхода. В первом из них требуется максимизировать числовую функцию на конечном числовом множестве, во втором – решается двухкритериальная задача.

1. Предварительные сведения

Напомним некоторые базисные понятия теории нечетких множеств и нечетких отношений. Пусть V означает некоторое обычное (четкое) множество. Нечеткое множество X в V определяется своей функцией принадлежности $\lambda_X : V \to [0,1]$. Для каждого элемента $x \in V$ число $\lambda_X(x) \in [0,1]$ интерпретируется как степень уверенности в том, что данный элемент принадлежит множеству X. В случае, когда функция принадлежности нечеткого множества может принимать лишь два значения 0 или 1, она представляет собой характеристическую функцию данного четкого множества X. Все элементы x множества V, удовлетворяющие неравенству $\lambda_X(x) > 0$, образуют носитель множества X, обозначаемый далее $\mathrm{Supp}(X)$.

Для двух нечетких множеств X и Y в V отношение включения, а также операции объединения и пересечения в терминах их функций принадлежности определяются стандартным образом:

$$X \subset Y \Leftrightarrow \lambda_X(x) \le \lambda_Y(x) \quad \text{для всех } x \in V,$$

$$\lambda_{X \cup Y}(x) = \max\{\lambda_X(x); \lambda_Y(x)\} \quad \text{для всех } x \in V,$$

$$\lambda_{X \cap Y}(x) = \min\{\lambda_X(x); \lambda_Y(x)\} \quad \text{для всех } x \in V.$$

В случае нечеткого множества, заданного функцией принадлежности $\eta(\cdot)$ на некотором линейном пространстве L, используют следующие термины:

- *нечеткий конус*, если равенство $\eta(x) = \eta(\alpha \cdot x)$ выполняется для всех $\alpha > 0$ и всех $x \in L$;
- *нечеткий острый конус*, если носитель этого конуса является острым, т.е. ни один ненулевой элемент носителя не содержится в нем вместе с противоположным ему элементом;
- *нечеткое выпуклое множество*, если
$$\eta(\theta \cdot x + (1-\theta) \cdot y) \ge \min\{\eta(x); \eta(y)\}$$
для всех $x, y \in L$ и всех $\theta \in [0,1]$.

Нечеткое бинарное отношение задается на множестве V функцией принадлежности $\mu : V \times V \to [0,1]$. Нечеткое отношение с функцией принадлежности $\mu(\cdot,\cdot)$ называют

- *иррефлексивным*, если $\mu(x,x) = 0$ для всех $x \in V$;
- *транзитивным*, если $\mu(x,z) \ge \min\{\mu(x,y); \mu(y,z)\}$ для всех $x, y, z \in V$;
- *асимметричным*, если $\mu(x,y) > 0 \Rightarrow \mu(y,x) = 0$ для всех $x, y \in V$;
- *нечетким конусным отношением* на линейном пространстве L, если найдется такой нечеткий

конус $\eta : L \to [0,1]$, что $\mu(x,y) = \eta(x-y)$ для всех $x, y \in L$;

- *инвариантным относительно линейного положительного преобразования*, если данное отношение задано на линейном пространстве L и выполняется равенство:

$\mu(\alpha \cdot x + c, \alpha \cdot y + c) = \mu(x,y)$ для всех $x, y \in L$ и всех $\alpha > 0, c \in L$.

Рассмотрим числовую вектор-функцию $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$, определенную на множестве V. Пусть X есть нечеткое множество в V с функцией принадлежности $\lambda_X : V \to [0,1]$. Введем образ носителя множества X, а именно $Y = f(\mathrm{Supp}(X)) \subset R^m$. В соответствии с принципом продолжения Л. Заде определим образ $\hat{Y} = f(X)$ нечеткого множества X при помощи функции принадлежности:

$$\lambda_{\hat{Y}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \{\alpha \in [0,1] \,|\, \lambda(x) = \alpha\}, \text{если } f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0 \quad \text{в противном случае} \end{cases}$$

для всех $y \in R^m$.

2. Формализация задачи. Принцип Эджворта-Парето

Исходная задача, решению которой посвящена данная работа, состоит в отыскании «наилучшего» решения задачи многокритериальной оптимизации (далее для определенности максимизации) векторной функции $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ на нечетком множестве X в V. Нечеткое множество, которое является решением этой задачи, обозначим $Max(\hat{Y}) \subset \hat{Y}$, а его функцию принадлежности – $\lambda^{\max}$.

В работе [13] автором было предложено рассматривать, всякое нечеткое множество, например, $\hat{Y}$ как некоторое (четкое) подмножество множества $R^m \times [0,1] = F^m \subset R^{m+1}$, элементы которого образованы векторами, составленными из m-мерных векторов $y \in Y$ с присоединенными к ним $(m+1)$-ми компонентами $\lambda_{\hat{Y}}(y) \in [0,1]$. По сути дела, было предложено отождествить нечеткое множество с четким множеством из пространства большей размерности, совпадающим с графиком его функции принадлежности. Аналогично нечеткое множество $Max(\hat{Y})$ можно отождествить с графиком функции принадлежности $\lambda^{\max}$ и рассматривать его как некоторое четкое подмножество пространства R^{m+1}. Далее указанное соответствие между нечеткими множествами и их «четкими аналогами» будет активно использоваться.

Введем в рассмотрение следующую $(m+1)$-мерную числовую вектор-функцию

$$\hat{y} = \hat{f}(x) = \begin{cases} (f(x), \lambda_{\hat{Y}}(f(x))), \text{ если } x \in \mathrm{Supp}(X) \\ (f(x), 0) \quad \text{в противном случае} \end{cases}$$

на множестве V. Она представляет собой исходный векторный критерий f с добавленной $(m+1)$-ой компонентой, выражающей степень принадлежности соответствующего векторного аргумента. В соответствии с вышесказанным, нечеткое множество $\hat{Y}$ можно отождествить с четким множеством $\hat{f}(\mathrm{Supp}(X)) \subset F^m$, а нечеткое множество $Max(\hat{Y})$ – с $Max(\hat{f}(\mathrm{Supp}(X)))$.

Предложенный в [12] двухэтапный подход к решению исходной задачи многокритериального выбора на нечетком множестве основан на использовании информации о предпочтениях ЛПР в форме квантов информации о четком отношении предпочтения ЛПР. Однако во многих прикладных задачах рассматриваемого типа информация о предпочтениях носит нечеткий характер. В этой связи представляется актуальной разработка такого подхода к решению исходной многокритериальной задачи на нечетком множестве, который опирается на использовании квантов нечеткой информации. Именно такой подход излагается в Разделах 3, 4.

Приведем базовые аксиомы и некоторые результаты аксиоматического подхода, адаптированные к рассматриваемой задаче и принятым обозначениям. С этой целью, прежде всего, введем в рассмотрение нечеткое бинарное отношение с функцией принадлежности $\mu(\cdot,\cdot)$, заданное на множестве $\hat{Y} = \hat{f}(\mathrm{Supp}(X)) \subset R^{m+1}$, которым руководствуется ЛПР в процессе выбора. Фрагментарная информация об этом отношении в виде квантов позволит построить некоторую оценку сверху для неизвестного множества $Max(\hat{Y})$. Запись $\mu(\hat{y}, \hat{y}') = \mu^* \in [0,1]$ означает, что вектор $\hat{y}$ является более предпочтительным для ЛПР, чем $\hat{y}'$ со степенью уверенности μ^*. Будем считать данное нечеткое отношение иррефлексивным.

Примем следующие «разумные» аксиомы, которые очерчивают класс бинарных отношений, которым должны удовлетворять предпочтения ЛПР.

Аксиома 1 (аксиома исключения). *Для всякой пары векторов* $\hat{y}, \hat{y}' \in \hat{Y}$ *, для которых выполнено* $\mu(\hat{y}, \hat{y}') = \mu^* \in (0,1]$ *, справедливо неравенство* $\lambda^{\max}(\hat{y}') \leq 1 - \mu^*$*.*

В случае $\mu^* = 1$ приведенная аксиома означает, что вектор $\hat{y}'$, не выбираемый в паре $\hat{y}, \hat{y}'$, не должен попасть во множество $Max(\hat{Y})$, так как $\lambda^{\max}(\hat{y}') = 0$.

Аксиома 2 (аксиома транзитивности). *Нечеткое иррефлексивное отношение предпочтения с функцией принадлежности* $\mu(\cdot,\cdot)$ *является транзитивным и, кроме того, существует транзитивное отношение, функцию принадлежности которого обозначим тем же символом* $\mu(\cdot,\cdot)$*, заданное на всем критериальном пространстве* R^{m+1} *и такое, что на множестве* $Y \subset R^{m+1}$ *оба указанных отношения совпадают.*

Аксиома 3 (аксиома Парето). *Для любой пары векторов* $\hat{y}, \hat{y}'$ *вида* $\hat{y}_i \geq \hat{y}'_i$, , $i = 1,2,...,m+1,\ \hat{y} \neq \hat{y}'$ *выполнено равенство* $\mu(\hat{y}, \hat{y}') = 1$.

В [14] доказано, что принятие Аксиом 1 и 3, гарантирует выполнение принципа ***Эджворта-Парето*** в «нечеткой форме». Сформулируем его применительно к рассматриваемому случаю. *Пусть выполнены Аксиомы* 1 *и* 3. *Тогда для любого множества* $Max(\hat{Y})$ *имеет место включение* $Max(\hat{Y}) \subset P(\hat{Y})$*, или, что то же, неравенство* $\lambda^{\max}(\hat{y}) \leq \lambda^P(\hat{y})$ *выполняется для всех* $\hat{y} \in \hat{Y}$ *, где*

$$P(\hat{Y}) = \left\{ \begin{array}{l} \hat{y}^* \in \hat{Y} \subset R^{m+1} | \text{не существует } \hat{y} \in \hat{Y} \text{ такого,} \\ \text{что } \hat{y}_i \geq \hat{y}_i^*, i = 1,2,...,m+1, \text{ и } \hat{y} \neq \hat{y}^* \end{array} \right\}$$

есть множество парето-оптимальных (*эффективных, или компромиссных*) *векторов, а* $\lambda^P(\cdot)$ *– его характеристическая функция.*

Согласно сформулированному принципу решение многокритериальной задачи на нечетком множестве следует искать в области компромиссов (множестве Парето) (m+1)-критериальной задачи. Примеры показывают, что это множество, как правило, оказывается достаточно широким и окончательный выбор из него для ЛПР затруднителен. Поэтому необходимо осуществить сужение области компромиссов, не затрагивая искомое множество $Max(\hat{Y})$. Это сужение предлагается проводить на основе квантов нечеткой информации. Для этого потребуется принятие еще одной аксиомы.

Аксиома 4 (аксиома инвариантности). *Нечеткое отношение предпочтения* $\mu(\cdot,\cdot)$ *является инвариантным относительно линейного положительного преобразования.*

Существование отношения $\mu(\cdot,\cdot)$, о котором идет речь в Аксиомах 2 и 4, изначально не очевидно, поэтому необходимо решить вопрос о существовании требуемого отношения.

Определение 1. Пусть $Z \subset R^{m+1}$. Будем говорить, что нечеткое бинарное отношение с функцией принадлежности μ_Z, заданной на множестве Z, является *транзитивным и инвариантным относительно положительного линейного преобразования на* Z, если неравенство $\mu_Z(x,z) \ \geq \ \min\{\mu_Z(x,y); \mu_Z(y,z)\}$ имеет место для любых $x,y,z \in Z$ и, кроме того, для всех $x,y \in Z$ и всех $\alpha > 0$, $c \in R^{m+1}$, таких, что $\alpha \cdot x + c \in Z$, $\alpha \cdot y + c \in Z$, истинна импликация $\mu_Z(x,y) > 0 \Rightarrow \mu_Z(\alpha \cdot x + c, \alpha \cdot y + c) = \mu_Z(x,y)$.

Как показывает нижеследующая теорема, единственное продолжение нечеткого бинарного отношения, удовлетворяющего требованиям Аксиом 2-4, существует при общих предположениях.

Теорема 1. *Пусть* $Z \subset R^{m+1}$ *и* $\operatorname{int} Z \neq \varnothing$. *Всякое иррефлексивное, транзитивное и инвариантное нечеткое бинарное отношение* $\succ$ *с функцией принадлежности* μ_Z*, заданное на множестве* Z*, может быть единственным образом продолжено на все пространство* R^{m+1} *с сохранением свойств иррефлексивности, транзитивности и инвариантности.*

Доказательство Теоремы 1 дается в Приложении.

В большинстве прикладных многокритериальных задач значения критерия f_i лежат в некотором промежутке $\langle a_i, b_i \rangle$, $i = 1,2,...,m$. Тогда в качестве множества, на котором определено нечеткое бинарное отношение, естественно рассматривать декартово произведение $\langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times ... \times \langle a_m, b_m \rangle \times [0,1]$, которое заведомо будет иметь непустую внутренность. Следовательно, согласно Теореме 1 в этом случае всегда существует и притом единственное продолжение иррефлексивного, транзитивного и инвариантного бинарного отношения с указанного декартова произведения на все пространство R^{m+1} с сохранением перечисленных свойств.

3. Сужение области компромиссов при помощи квантов нечеткой информации

Сформулированные выше четыре аксиомы всюду далее будем считать выполненными. Приведем упрощенное определение кванта нечеткой информации [14], адаптированное к условиям рассматриваемой задачи.

Определение 2. Пусть имеется векторный критерий $\hat{y} = \hat{f}(x) = (h_1(x),...,h_{m+1}(x))$ и $A, B \subset \{1,2,...,m+1\}$, $A \cap B = \varnothing$. Говорят, что задан *квант информации о нечетком отношении* μ *с группами номеров критериев A и B* вместе с двумя наборами положительных параметров w_i для всех $i \in A$ и w_j для всех $j \in B$, а также степенью уверенности $\mu^* \in (0,1]$, если для некоторых двух векторов $y, y' \in R^{m+1}$, удовлетворяющих условиям:

$y_i - y'_i = w_i$ для всех $i \in A$, $y'_j - y_j = w_j$ для всех $j \in B$ и $y_s = y'_s$ для всех $s \notin A \cup B$, выполняется $\mu(y, y') = \mu^*$. В этом случае говорят, что *группа критериев A более значима, чем группа B со степенью уверенности* μ^*.

В соответствии с приведенным определением наличие кванта нечеткой информации означает согласие ЛПР (численно выражаемое величиной степени уверенности $\mu^* \in (0,1]$) идти на компромисс, состоящий в готовности потерять по каждому менее значимому критерию h_j группы *B* не более чем величину w_j при условии получить не менее w_i по каждому более значимому критерию h_i группы *A*.

С помощью квантов информации можно выразить, а затем учесть при окончательном выборе широкую гамму соотношений значимости как между отдельными критериями (или группами критериев) исходного набора $f_1, f_2,..., f_m$, так и различие в значимости критерия $\lambda_{\hat{Y}}(f)$ степени принадлежности элемента нечеткому множеству и какого либо критерия (или группы критериев) из начального набора $f_1, f_2,..., f_m$. Для удобства дальнейшего изложения введем обозначение $f_{m+1}(x) = \lambda_{\hat{Y}}(f(x))$.

Следующий результат, который является адаптированным для рассматриваемого случая вариантом Теоремы 7.3 [14], показывает, каким образом следует использовать квант нечеткой информации для сужения области компромиссов.

Теорема 2. *Пусть* $\hat{y} = \hat{f}(x) = (f_1(x),..., f_m(x), f_{m+1}(x))$ *и имеется квант нечеткой информации с двумя группами критериев A и B вместе с соответствующими наборами положительных параметров* w_i, w_j *(для всех* $i \in A$, $j \in B$*) и степенью уверенности* $\mu^* \in (0,1]$. *Тогда для любого множества* $Max(\hat{Y})$ *с функцией принадлежности* $\lambda^{\max}$ *верно*

$$\lambda^{\max}(\hat{y}) \le \lambda^M(\hat{y}) \le \lambda^P(\hat{y}) \text{ для всех } \hat{y} \in \hat{Y}, \quad (1)$$

где λ^P *– характеристическая функция множества Парето* $P(\hat{Y})$*;* λ^M *–функция принадлежности, определяемая равенствами:*

$$\lambda^M(\hat{y}) = 1 - \sup_{\hat{z} \in \hat{Y}} \varsigma(\hat{z}, \hat{y}) \text{ для всех } \hat{y} \in \hat{Y}, \quad (2)$$

$$\varsigma(\hat{z}, \hat{y}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \hat{z} - \hat{y} \in R_+^{m+1} \\ \mu^*, & \text{если } \tilde{z} - \tilde{y} \in R_+^{p+1}, \quad \hat{z} - \hat{y} \notin R_+^{m+1} \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

$$\text{для всех } \hat{y}, \hat{z} \in \hat{Y}. \quad (3)$$

Здесь $p = m + 1 - |B| + |A| \cdot |B|$, $R_+^k = \{s \in R^k | s_i \ge 0, i = 1,2,...,k, s \ne 0_k\}$, *а вектор* $\tilde{y}$ ($\tilde{z}$) *образован из тех компонент* $\hat{y}_k$ ($\hat{z}_k$), *для которых* $k \notin B$, *а также новых компонент* $w_j\hat{y}_i + w_i\hat{y}_j$ ($w_j\hat{z}_i + w_i\hat{z}_j$) *для всех* $i \in A$ *и* $j \in B$.

Замечание. Анализ формулировки последней теоремы (2)–(3) показывает, что нечеткое множество с функцией принадлежности λ^M, если его представлять в виде графика этой функции в пространстве размерности *m*+1, является множеством $\hat{f}(P_g(\mathrm{Supp}(X))) \subset R^{m+1}$, где $P_g(\mathrm{Supp}(X))$ – это множество парето-оптимальных точек относительно вектор-функции g, составленной из всех тех компонент $f_1(x),...,f_m(x),f_{m+1}(x)$, для которых $k \notin B$, вместе с новыми компонентами вида $w_j f_i + w_i f_j$ для всех $i \in A$, $j \in B$. Поэтому неравенства (1) равносильны включениям $Max(\hat{Y}) \subset \hat{f}(P_g(\text{Supp}(X))) \subset P(\hat{Y})$.

В соответствии с Теоремой 2 для сужения области компромиссов за счет кванта нечеткой информации (т.е. построения функции принадлежности λ^M) следует найти два (четких) множества Парето. Сначала необходимо построить характеристическую функцию исходного множества Парето, т.е. найти множество парето-оптимальных векторов $P(\hat{Y}) \subset R^{m+1}$ и присвоить его элементам степень принадлежности, равную 1, а всем остальным векторам – нулевую степень принадлежности. Далее, на том же множестве $\text{Supp}(X)$ отыскать второе (более узкое) множество парето-оптимальных точек $P_g(\text{Supp}(X))$ относительно новой p- мерной вектор-функции g, составленной из компонент f_i при всех $i \notin B$ и функций $w_j f_i + w_i f_j$ при всех $i \in A$, $j \in B$. После этого следует образовать второе множество парето-оптимальных векторов $\hat{f}(P_g(\text{Supp}(X)))$ и всем векторам первого множества Парето, не вошедшим во второе множество Парето, присвоить степень принадлежности $1-\mu^*$. Тем самым, будет построена функция принадлежности λ^M, которая задает сужение исходного множества Парето на основе имеющегося кванта нечеткой информации.

Следствие. *Пусть в условиях Теоремы* 2 $A=\{i\}, B=\{j\}$. *Тогда* $p=m+1$ *и в равенстве* (3) *участвует вектор* $\tilde{y}$ $(\tilde{z})$, *образованный из компонент исходной вектора* $\hat{y} \in \hat{Y}$ $(\hat{z} \in \hat{Y})$ *за исключением* $\hat{y}_j(\hat{z}_j)$, *но с добавлением новой компоненты* $w_j\hat{y}_i + w_i\hat{y}_j$ $(w_j\hat{z}_i + w_i\hat{z}_j)$.

В общем случае может быть выявлен не один, а целый набор квантов нечеткой информации, в которых участвуют различные группы критериев. В таком случае этот набор сначала необходимо проверить на непротиворечивость [14]. Если он окажется непротиворечивым, для формирования нового векторного критерия g можно применить подходящую теорему из [14]. На этом первый этап решения исходной задачи многокритериального выбора на нечетком множестве завершен.

4. Второй этап решения исходной задачи

На втором этапе для дальнейшего сужения области компромиссов предлагается применить подходящий способ скаляризации многокритериальной задачи.

Пусть реализация первого этапа, состоящего в использовании кванта нечеткой информации (или набора непротиворечивых квантов), свелась к использованию векторного критерия $g(x)=(g_1(x),g_2(x),...,g_p(x))$, $p \ge m$, а $\lambda^M(f(x),\lambda_{\hat{Y}}(f(x))$ – функция принадлежности полученного сужения множества Парето. В итоге после выполнения первого этапа вновь приходим к многокритериальной задаче с векторным критерием g на нечетком множестве с функцией принадлежности λ^M. Ее снова можно рассматривать как некоторую задачу поиска компромиссного решения относительно вектор-функции g на нечетком множестве. С этой целью расширяем векторный критерий g, т.е. формируем вектор-функцию $\hat{g}=(g_1,...,g_p,g_{p+1})$, где $g_{p+1}(x)=\lambda^M(f(x),\lambda_{\hat{Y}}(x))$.

Простые примеры показывают, что множество Парето даже в случае выпуклого допустимого множества и вогнутых критериев, как правило, не является выпуклым. По этой причине не приходится ожидать, что суппорт функции принадлежности λ^M окажется выпуклым множеством. Поэтому для выполнения второго этапа решения многокритериальной задачи на нечетком множестве необходимо использовать такой метод скаляризации, применение которого не требует каких-либо специальных свойств от допустимого множества и векторного критерия $\hat{g}$. С этой точки зрения удобным оказывается нижеследующий результат. В его формулировке участвует множество «идеальных» векторов вида

$$U=\begin{Bmatrix} u \in R^{p+1} \mid u_i \ge g_i(x), i=1,2,...,p+1, \\ \text{для всех } x \in X \end{Bmatrix}$$

и понятие *слабо эффективной* точки x^* относительно вектор-функции $\hat{g}$ на множестве $\text{Supp}(X)$, которое определяется следующим образом: не существует точки $x \in \mathrm{Supp}(X)$, такой что $g_i(x) > g_i(x^*), i = 1,2,...,p+1$. Сравнение определений парето-оптимальной (эффективной) и слабо эффективной точек показывает, что любая парето-оптимальная точка слабо эффективна, но не наоборот. Аналогичное утверждение имеет место и для соответствующих векторов.

Теорема 3. *Вектор* $x^* \in \mathrm{Supp}(X)$ *слабо эффективен относительно* $\hat{g}$ *на множестве* $\mathrm{Supp}(X)$ *тогда и только тогда, когда для некоторого вектора* $u \in R^{p+1}$, *удовлетворяющего хотя бы одному из условий:*

1) $u \in U_\alpha = \{u \in R^{p+1} \mid \sum_{i=1}^{p+1} u_i = \alpha\}$, *где* α *– произвольное заранее зафиксированное число;*
2) $u \in U = \{u \in R^{p+1} \mid u_i \geq g_i(x), i = 1,2,...,p+1,$ *для всех* $x \in \mathrm{Supp}(X)\}$; *при этом компоненты вектор-функции* g *считаются ограниченными сверху на множестве* $\mathrm{Supp}(X)$,

выполнено неравенство:

$$\max_{i=1,2,...,p+1}(u_i - g_i(x^*)) \leq \max_{i=1,2,...,p+1}(u_i - g_i(x)) \quad \text{для всех } x \in \mathrm{Supp}(X). \tag{4}$$

Теорема 4. *Предположим, что учет набора квантов непротиворечивой нечеткой информации осуществляется на основе p-мерной вектор-функции* g *и* $\hat{g} = (g_1,...,g_p,g_{p+1})$, *где* $g_{p+1}(x) = \lambda^M(f(x), \lambda_{\hat{Y}}(x))$. *Тогда для любого множества* $Max(\hat{Y})$ *выполняется включение:*

$$Max(\hat{Y}) \subset \bigcup_u \left\{ \begin{array}{l} \hat{f}(x^*) \in \hat{Y} \subset R^{m+1} \mid \max\limits_{i=1,2,...,p+1}(u_i - g_i(x^*)) = \\ = \min\limits_{x \in P_{\hat{g}}(\mathrm{Supp}(X))} \max\limits_{i=1,2,...,p+1}(u_i - g_i(x)) \end{array} \right\} \tag{5}$$

где объединение осуществляется по всем векторам $u \in U$ (*или* $u \in U_\alpha$ *с заранее зафиксированным числом* $\alpha > 0$).

Доказательства Теорем 3 и 4 вынесены в Приложение.

В соответствии с Теоремой 4 каждый элемент $\hat{f}(x^*)$ множества, записанного в правой части включения (5), определяется вектором $\hat{g}(x^*)$, реализующим минимум расстояния от некоторой точки $u \in U$ (или $u \in U_\alpha$) в пространстве R^{p+1}, до множества $\hat{g}(P_{\hat{g}}(\mathrm{Supp}(X)))$, где расстояние измеряется с помощью равномерной (чебышевской) метрики.

Для отыскания одноэлементного множества $Max(\hat{Y})$ можно ограничиться какой-то одной из указанных точек u. В качестве подобной «идеальной» точки лучше всего подходит вектор с компонентами $u_i = \sup g_i(x)$, $i = 1,2,...,p+1$, где точная верхняя грань берется по всем $x \in P_{\hat{g}}(\mathrm{Supp}(X))$.

5. Примеры применения двухэтапного подхода

Пример 1. Пусть $f(x) = -(x-1)^2 + 1$ – функция одной переменной, подлежащая максимизации на конечном множестве $\{0, 0.6, 1, 1.5, 2\} \subset R$ и функцией принадлежности λ:

$\lambda(f(0)) = \lambda(0) = 0.8$, $\lambda(f(0.6)) = \lambda(0.84) = 0.6$,
$\lambda(f(1)) = \lambda(1) = 0.5$, $\lambda(f(1.5)) = \lambda(0.75) = 0.4$,
$\lambda(f(2)) = \lambda(0) = 0.8$,

Поскольку $\lambda(f(0)) = \lambda(f(2)) = \lambda(0) = 0.8$, образ нечеткого множества X будет состоять из четырех элементов, т.е. $\hat{Y} = \{(0,0.8),(0.84,0.6),(1,0.5),(0.75,0.4)\}$. Последний вектор этого множества не является парето-оптимальным, поэтому $P(\hat{Y}) = \{(0,0.8),(0.84,0.6),(1,0.5)\}$.

Согласно принципу Эджворта-Парето окончательный выбор должен лежать в пределах найденного множества Парето.

Сначала решим данную задачу без привлечения дополнительной информации в виде квантов (без первого этапа), т.е. сразу применим Теорему 4 к двумерной вектор-функции $\hat{g}(x) = (f(x), \lambda(f(x)))$. Предполагая множество $Max(\hat{Y})$ одноэлементным, назначим компоненты «идеального» вектора следующим образом:

$$d_1 = \max_{x \in \{0,0.6,1\}} f(x) = \max\{0; 0.84; 1\} = 1,$$

$$d_2 = \max_{x \in \{0,0.6,1\}} \lambda(f(x)) = \max\{0.8; 0.6; 0.5\} = 0.8$$

и вычислим

$$\max\{d_1 - 0; d_2 - 0.8\} = \max\{1; 0\} = 1,$$

$$\max\{d_1 - 0.84; d_2 - 0.6\} = \max\{0.16; 0.2\} = 0.2,$$

$$\max\{d_1 - 1; d_2 - 0.5\} = \max\{0; 0.3\} = 0.3.$$

Очевидно, $\min\{1;0.2;0.3\}=0.2$. Поэтому в соответствии с Теоремой 4 имеем $Max\,(\hat{Y})=\{(0.84,0.6)\}$.

Теперь предположим, что имеют место Аксиомы 1- 4 и критерий f для ЛПР является более значимым, чем λ с параметрами $w_1=0.3$, $w_2=0.1$ и степенью уверенности $\mu^*=0.8$. В таком случае согласно Теореме 2 получаем:

$$g_1(x)=f(x),\quad g_2(x)=0.1\cdot f(x)+0.3\cdot\lambda(f(x)).$$

Вычисляем образ новой вектор-функции, а также в соответствии со следствием из Теоремы 2 находим значения функции принадлежности нового множества Парето:

$$g(P(\hat{Y}))=\{(0,0.24),(0.84,0.264),(1,0.25)\},$$

$$\lambda^M(0,0.24)=1-0.8=0.2,\ \lambda^M(0.84,0.264)=1,$$

$$\lambda^M(1,0.25)=1.$$

Переходим ко второму этапу. Увеличиваем размерность векторного критерия, присоединяя значения функции принадлежности λ^M к векторам множества $g(P(\hat{Y}))$:

$$\{(0,0.24,0.2),(0.84,0.264,1),(1,0.25,1)\}.$$

В этом наборе первый вектор не является парето-оптимальным, поэтому его можно удалить из последующего рассмотрения. Назначим компоненты «идеального» вектора:

$$d_1=\max\{0.84;1\}=1,$$

$$d_2=\max\{0.264;0.25\}=0.264,\ d_3=\max\{1;1\}=1,$$

тогда

$$\max\{d_1-0.84;d_2-0.264;d_3-1\}=\max\{0.16;0;0\}=$$
$$=0.16,$$

$$\max\{d_1-1;d_2-0.25;d_3-1\}=\max\{0;0;0.014\}=$$
$$=0.014.$$

Имеем $\min\{0.16;0.014\}=0.014$, поэтому вектор (1,0.25,1) отвечает «наилучшему» решению в соответствии с предлагаемым подходом. Это означает, что после применения нечеткого кванта информации найдено решение $Max(\hat{Y})=\{(1,0.5)\}$, отличное от полученного ранее без использования кванта информации.

Пример 2. Рассмотрим двухкритериальную задачу, в которой $Y=\{y^1,y^2,...,y^5\}$, причем

$$y^1=(4,4),\ y^2=(5,3),\ y^3=(6,2),\ y^4=(7,1),\ y^5=(8,0).$$

$$\lambda(y^1)=0.7,\ \lambda(y^2)=0.9,\ \lambda(y^3)=0.7,\ \lambda(y^4)=0.8,$$

$$\lambda(y^5)=0.5.$$

В соответствии с общей методологией предлагаемого подхода увеличим размерность исходного векторного критерия на единицу, добавив к имеющимся двумерным векторам множества Y третью компоненту с отвечающими этим векторам значениям степени принадлежности λ, получим:

$$\hat{Y}=\left\{\begin{matrix}(4,\ 4,\ 0.7),\ (5,\ 3,\ 0.9),\ (6,\ 2,\ 0.7),\\ (7,\ 1,\ 0.8),\ (8,\ 0,\ 0.5)\end{matrix}\right\}.$$

Как видим, здесь все векторы являются парето-оптимальными, т.е. применение принципа Эджворта-Парето не дает возможность сузить область поиска «наилучшего» решения.

Как и в предыдущем примере, сначала решим исходную задачу без использования дополнительной информации о предпочтениях ЛПР. Перед тем как применить Теорему 4, которая основана на равномерной метрике, в силу существенной неоднородности компонент векторов множества $\hat{Y}$ имеет смысл привести все критерии к единой шкале, подвергнув их нормализации. В данном случае для нормализации каждый из имеющихся критериев f_1,f_2,f_3, где $f_3=\lambda$, заменим на отношение $(f_i-f_i^{\min})/(f_i^{\max}-f_i^{\min})$, где $f_i^{\max}$ и $f_i^{\min}$ – максимальное и минимальное возможные значения критерия f_i. Заметим, что такое преобразование критериев не изменит множество Парето. В результате нормализации вместо $\hat{Y}$ получим множество векторов:

$$\overline{Y}=\left\{\begin{matrix}(0,1,0.5),\ (0.25,\ 0.75,\ 1),\ (0.5,\ 0.5,\ 0.5),\\ (0.75,\ 0.25,\ 0.75),(1,\ 0,\ 0)\end{matrix}\right\}.$$

Предположим, что искомое решение $Max(\hat{Y})$ состоит из одного элемента. Вектор из единиц принимаем за «идеальный» и вычисляем значения функции $\max(1-y_1;1-y_2;1-y_3)$ для каждого из пяти векторов полученного множества $\overline{Y}$: 1, 0.75, 0.5, 0.75 и 1, соответственно. Минимальное из этих чисел 0.5 отвечает вектору y^3. Следовательно, решением данной задачи без использования квантов информации является $Max(\hat{Y})=\{(6,2,0.7)\}$.

Теперь допустим, что выполнены Аксиомы 1-4 и критерий степени принадлежности λ является более значимым, чем группа, состоящая из первого и второго критериев, с параметрами $w'=0.3, w_1=3, w_2=2$ и степенью уверенности

$\mu^* = 0.8$. Это означает, что ЛПР с указанной степенью уверенности согласно потерять не более трех единиц по первому критерию и двух единиц по второму критерию ради увеличения степени принадлежности не менее чем на величину, равную 0.3. В соответствии с Теоремой 2, составляем новый векторный критерий $g_1 = 0.3y_1 + 3\lambda,\ g_2 = 0.3y_2 + 2\lambda,\ g_3 = \lambda$ и находим образ множества $\hat{Y}$ для этого критерия:

$$g(\hat{Y}) = \begin{Bmatrix} (3.3,\ 2.6,\ 0.7), (4.2,\ 2.7,\ 0.9), (3.9, 2,\ 0.7), \\ (4.5,\ 1.9,\ 0.8),\ (3.9,\ 1,\ 0.5) \end{Bmatrix},$$

где первый, третий и пятый векторы не являются парето-оптимальным. Следовательно, в силу (2)-(3) $\lambda^M(y^1) = \lambda^M(y^3) = \lambda^M(y^5) = 1 - 0.8 = 0.2$, $\lambda^M(y^k) = 1,\ k = 2, 4$.

Переходя ко второму этапу, добавляем к векторам множества $g(\hat{Y})$ еще одну компоненту λ^M:

$$\hat{g}(\hat{Y}) = \begin{Bmatrix} (3.3,\ 2.6,\ 0.7,\ 0.2),\ (4.2,\ 2.7,\ 0.9, 1), \\ (3.9,\ 2,\ 0.7, 0.2),\ (4.5,\ 1.9,\ 0.8, 1), \\ (3.9,\ 1,\ 0.5, 0.2) \end{Bmatrix}.$$

Аналогично тому, как это было сделано выше, приводим все критерии к единой шкале, подвергнув их указанной выше нормализации. После нормализации векторы множества $\hat{g}(\hat{Y})$ примут вид:

$$\begin{matrix} (0, 0.94, 0.5, 0), (0.75, 1, 1, 1), (0.5, 0.59, 0.5, 0), \\ (1, 0.53, 0.75, 1), (0.5, 0, 0, 0) \end{matrix}.$$

Чтобы выбрать из них «наилучший», применим Теорему 4, считая, что искомое множество $Max(\hat{Y})$ состоит из одного элемента. Для этого в качестве «идеального» вектора вновь берем вектор из единиц и последовательно вычисляем значения функции $\max\{1 - y_1; 1 - y_2; 1 - y_3; 1 - y_4\}$ в каждом из пяти векторов, полученных после нормализации. Получим 1, 0.25, 1, 0.47, и 1, соответственно. Минимальному из найденных чисел 0.25 соответствует второй вектор, т.е. $Max(\hat{Y}) = \{(5, 3, 0.9)\}$, что не совпадает с тем, что было получено ранее без учета информации о значимости критериев. Тем самым, использованная нечеткая информация изменила окончательный выбор в пользу повышения степени принадлежности выбираемого решения.

Заключение

Рассмотрена задача многокритериального выбора на нечетком множестве с соответствующей функцией принадлежности. Решение этой задачи предложено искать путем сужения множества Парето, соответствующего новой многокритериальной задаче с дополнительным критерием в виде функции принадлежности данного нечеткого множества. Тем самым, решение задачи выбора на нечетком множестве сведено к поиску компромисса относительно расширенного векторного критерия. Для осуществления этого компромисса используется нечеткая информация о значимости участвующих в задаче критериях в виде квантов. Учет поступивших в распоряжение ЛПР квантов нечеткой информации приводит к новому нечеткому множеству, функция принадлежности которого также присоединяется к имеющемуся списку критериев. Окончательное сужение осуществляется с помощью метода целевого программирования, согласно которому «наилучшим» признается парето-оптимальный вектор, находящийся ближе всего по равномерной метрике к некоторому «идеальному» недостижимому вектору. Разобраны два иллюстративных примера задачи выбора с одним, а также двумя критериями на конечном множестве.

Приложение

Доказательство теоремы 1. Выберем произвольно внутреннюю точку $z^0 \in \text{int}Z$. Существует $\varepsilon > 0$, при котором $U_\varepsilon(z^0) \subset Z$, где $U_\varepsilon(z^0)$ – ε - окрестность точки z^0. Благодаря инвариантности отношения $\succ$, не ограничивая общности последующих рассуждений, можно положить $z^0 = 0_{m+1}$.

Обозначим функцию принадлежности нечеткого бинарного отношения $\succ$ через μ_Z. Введем нечеткое множество $\hat{Z}$ с функцией принадлежности $\lambda_{\hat{Z}} : R^{m+1} \to [0,1]$, определяемой равенством

$$\lambda_{\hat{Z}}(\hat{z}) = \begin{cases} \mu_Z(\hat{z},0_{m+1}), & \text{если } \hat{z} \in U_\varepsilon(0_{m+1}) \text{ и } \mu_Z(\hat{z},0_{m+1}) > 0 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

а также порождаемое им нечеткое множество *K* с функцией принадлежности:

$$\lambda_K(z) = \begin{cases} \lambda_{\hat{Z}}(\hat{z}), & \text{если } z = \alpha \cdot \hat{z} \text{ при некоторых } \alpha > 0 \text{ и } \hat{z} \in \mathrm{Supp}(\hat{Z}) \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

Благодаря однородности функции μ_Z, множество *K* представляет собой нечеткий конус. Этот конус не содержит начала координат в силу иррефлексивности отношения $\succ$. Установим, что этот конус является острым и выпуклым. В самом деле, если данный конус не является острым, то должен найтись ненулевой вектор $z = \alpha \cdot \hat{z}$ при некоторых $\alpha > 0$ и $\hat{z} \in \mathrm{Supp}(\hat{Z})$, такой что $\lambda_K(\alpha \cdot \hat{z}) > 0$ и $\lambda_K(-\alpha \cdot \hat{z}) > 0$. В этом случае число α можно выбрать настолько малым, чтобы выполнялись оба неравенства $\lambda_K(\alpha \cdot \hat{z}) = \lambda_K(z) = \mu_Z(z,0_{m+1}) > 0$ и $\lambda_K(-\alpha \cdot \hat{z}) = \lambda_K(-z) = \mu(0_{m+1}, z) > 0$ при некотором $z \in Z$. Используя транзитивность отношения $\succ$, отсюда приходим к неравенству $\mu(z,z) > 0$, которое противоречит иррефлексивности отношения $\succ$ на *Z*.

Выпуклость нечеткого конуса *K* вытекает из выпуклости нечеткого множества $\hat{Z}$, что, в свою очередь, имеет место благодаря инвариантности и транзитивности нечеткого отношения $\succ$ на *Z*. Для доказательства выпуклости множества $\hat{Z}$ выберем произвольно две точки $\hat{z}^1, \hat{z}^2 \in \hat{Z}$ и число $\theta \in [0,1]$. Имеем $\hat{z}^1, \hat{z}^2 \in U_\varepsilon(0_{m+1})$, более того,

$$\theta \cdot \hat{z}^1 \in U_\varepsilon(0_{m+1}),\ (1-\theta) \cdot \hat{z}^2 \in U_\varepsilon(0_{m+1}),\ \theta \cdot \hat{z}^1 + (1-\theta) \cdot \hat{z}^2 \in U_\varepsilon(0_{m+1}).$$

Последнее включение выполняется в силу $\hat{z}^1, \hat{z}^2 \in U_\varepsilon(0_{m+1})$ и неравенства треугольника:

$$\| \theta \cdot \hat{z}^1 + (1-\theta) \cdot \hat{z}^2 \| \le \theta \cdot \| \hat{z}^1 \| + (1-\theta) \cdot \| \hat{z}^2 \| < \varepsilon.$$

Если имеет место хотя бы одно из равенств $\mu(\hat{z}^1, 0_{m+1}) = 0$ или $\mu(\hat{z}^2, 0_{m+1}) = 0$, то доказывать нечего. Поэтому далее будем считать, что $\mu(\hat{z}^1, 0_{m+1}) > 0$ и $\mu(\hat{z}^2, 0_{m+1}) > 0$.

Используя $(\theta - 1) \cdot \hat{z}^2 \in U_\varepsilon(0_{m+1})$ и транзитивность отношения $\succ$ на множестве $U_\varepsilon(0_{m+1})$, получаем:

$$\mu_{\hat{Z}}(\theta \cdot \hat{z}^1, (\theta-1) \cdot \hat{z}^2) \ \ge\ \min\{\mu_{\hat{Z}}(\theta \cdot \hat{z}^1, 0_{m+1}); \mu_{\hat{Z}}(0_{m+1}, (\theta-1) \cdot \hat{z}^2)\}.$$

Отсюда на основании инвариантности того же отношения следует

$$\mu_{\hat{Z}}(\theta \cdot \hat{z}^1 + (1-\theta) \cdot \hat{z}^2, 0_{m+1}) \ \ge\ \min\{\mu_{\hat{Z}}(\hat{z}^1, 0_{m+1}); \mu_{\hat{Z}}(0_{m+1}, -\hat{z}^2)\},$$

или

$$\lambda_{\hat{Z}}(\theta \cdot \hat{z}^1 + (1-\theta) \cdot \hat{z}^2) \ge\ \min\{\lambda_{\hat{Z}}(\hat{z}^1); \lambda_{\hat{Z}}(\hat{z}^2)\},$$

что устанавливает выпуклость множества $\hat{Z}$.

Нечеткий острый выпуклый конус *K*, не содержащий начала координат, единственным образом порождает нечеткое конусное бинарное отношение с этим конусом на R^{m+1}. Согласно Лемме 7.2 [14], это отношение обладает свойствами иррефлексивности, транзитивности и инвариантности. Ясно, что это отношение является продолжением отношения $\succ$. Единственность продолжения вытекает из единственности конуса *K*, порождаемого множеством $\hat{Z}$.

Доказательство теоремы 3. Данная теорема для Условия 1 доказана в работе [15]. Поэтому продолжим доказательство, считая выполненным Условие 2.

Необходимость: пусть x^* – произвольная слабо эффективная точка. Нетрудно понять, что существует такое положительное число α, при котором вектор $w = (\alpha, \alpha, \ldots, \alpha) \in R^{p+1}$ удовлетворяет включению $u = \hat{g}(x^*) + w \in U$. Для доказательства предположим противное, т.е. найдется точка $x \in \mathrm{Supp}(X)$, для которой выполнено $\max\limits_{i=1,2,\ldots,p+1} (u_i - g_i(x^*)) > \max\limits_{i=1,2,\ldots,p+1} (u_i - g_i(x))$. Отсюда для каждого *i* следует неравенство:

$$\max_{i=1,2,\ldots,p+1} (u_i - g_i(x^*)) > u_i - g_i(x).$$

Подставив в обе части последнего неравенства $u_i = g_i(x^*) + \alpha$, получим $g_i(x) < g_i(x^*)$, $i = 1, 2, ..., p+1$, что противоречит слабой эффективности x^*.

Достаточность: пусть для вектора u из Условия 2 данной теоремы выполняется неравенство (4). Вновь используем рассуждение от противного: точка x^* не является слабо эффективной, т.е. найдется точка $x \in \mathrm{Supp}(X)$, такая что $g_i(x) > g_i(x^*),\ i = 1, 2, ..., p+1$, или $u_i - g_i(x^*) > u_i - g_i(x), i = 1,2,..., p+1$. Отсюда вытекает неравенство $\max\limits_{i=1,2,...,p+1}(u_i - g_i(x^*)) > u_i - g_i(x)$ для любого i, а значит, имеет место и неравенство $\max\limits_{i=1,2,...,p+1}(u_i - g_i(x^*)) > \max\limits_{i=1,2,...,p+1}(u_i - g_i(x))$, противоречащее (4).

Доказательство теоремы 4. Согласно Теореме 3 правая часть включения (5) представляет собой множество векторов, которые соответствуют слабо эффективным точкам относительно вектор-функции $\hat{g}$ на множестве $\mathrm{Supp}(X)$. Теорема 2 (Замечание к теореме) гарантирует, что имеет место включение $Max(\hat{Y}) \subset \hat{f}(P_g(\mathrm{Supp}(X)))$. Поскольку $\hat{g} = (g, g_{p+1})$, верно включение $P_g(\mathrm{Supp}(X)) \subset P_{\hat{g}}(\mathrm{Supp}(X))$, а значит и $\hat{f}(P_g(\mathrm{Supp}(X))) \subset \hat{f}(P_{\hat{g}}(\mathrm{Supp}(X)))$. Поэтому выполнено $Max(\hat{Y}) \subset \hat{f}(P_{\hat{g}}(\mathrm{Supp}(X)))$. Но правая часть включения (5) разве что шире, чем $\hat{f}(P_{\hat{g}}(\mathrm{Supp}(X)))$, так как всякая парето-оптимальная точка является слабо эффективной относительно одной и той же вектор-функции $\hat{g}$. Тем самым, включение (5) доказано.

Литература

1. Zadeh L.A., Bellman R.E. Decision-Making in a Fuzzy Environment//Management Science, 1970, vol. 17, pp. 141-164.
2. Negoita C.V., Minou S., Stan E. On Considering Imprecision in Dynamic Linear Programming //ECEESR, 1976, № 3, pp. 83-95.
3. Negoita C.V., Ralesku D.A. Application on Fuzzy Sets to Systems Analysis. Basel. Birkhauser Verlag, 1975.
4. Negoita C.V., Sularia M. On Fuzzy Mathematical Programming and Tolerances in Planning//ECEESR, 1976, № 1, pp. 3-14.
5. Zimmermann H.-J. Fuzzy Programming with Several Objectives Functions//Fuzzy sets and systems, 1978, vol. 1, pp. 46-55.
6. Hamacher H., Leberling H., Zimmermann H.-J. Sensitivity Analysis in Fuzzy Linear Programming//Fuzzy sets and systems, 1978, vol. 1, pp. 269-281.
7. Tang J., Wang D., Fung R.Y.K. Understanding of Fuzzy Optimization: Theories and Methods//Journal of Systems Science and Complexity, 2004, vol. 17, No 1.
8. Fuzzy Multi-Criteria Decision Making: Theory and Applications with Recent Developments (Kahraman, C., ed.), Springer. 2008.
9. Luhandjula M.K. Fuzzy Optimization: Milestones and Perspectives//Fuzzy Sets and Systems, 2015, vol. 74, pp. 4–11.
10. Orlovsky S.A., On Programming with Fuzzy Constraint Sets//Kybernetes, 1977, vol. 1, pp. 197-201.
11. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981.
12. Ногин В.Д. Многокритериальный выбор на нечетком множестве как задача поиска компромисса//Искусственный интеллект и принятие решений, 2018, № 3, С. 91-99.
13. Noghin V.D. Approximation of Convex Fuzzy Sets. In Proc. of Intern. Conf. Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA), 2017, pp. 127-129. Интернет-ресурс: https://ieeexplore.ieee.org/document/7973994/
14. Noghin V.D. Pareto Set Reduction: an Axiomatic Approach. Springer Inc., 2018.
15. Noghin V.D. Pareto Set Reduction Based on Some Metrics//Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2017, vol. 57(4), pp. 645-652.

Multicriteria choice based on fuzzy information

V. D. Noghin

Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russia

Abstract. The paper proposes a new method for solving the problem of multicriteria optimization of a numerical vector function on a fuzzy set. The membership function of a fuzzy feasible set is joined to the original set of criteria that allows the original problem of multi-criteria optimization to be treated as the task of finding a suitable compromise (Pareto-optimal) solution for an extended set of criteria. It is assumed that to search for the "best" compromise solution there is only fuzzy information about the preferences of decision maker in the form of information quanta. At the first stage of the proposed method, the search for a compromise is made on the basis of an axiomatic approach, with the help of which the Pareto set is reduced. The result of the reduction is a fuzzy set with the membership function, which is determined on the basis of the used fuzzy information. At the second stage, the obtained membership function is added to the extended set of criteria, after which the scalarization procedure realizing the idea of goal programming is used to solve the formed multicriteria problem.

Keywords: fuzzy set, multicriteria optimization, multicriteria choice, reduction of the Pareto set, quanta of fuzzy information, scalarization, goal programming.

DOI 10.14357/20718594190205

References

1. Zadeh L.A., Bellman R.E. Decision-Making in a Fuzzy Environment//Management Science, 1970, vol. 17, pp. 141-164.
2. Negoita C.V., Minou S., Stan E. On Considering Imprecision in Dynamic Linear Programming //ECEESR, 1976, № 3, pp. 83-95.
3. Negoita C.V., Ralesku D.A. Application on fuzzy sets to systems analysis. Basel. Birkhauser Verlag, 1975.
4. Negoita C.V., Sularia M. On Fuzzy Mathematical Programming and Tolerances in Planning//ECEESR, 1976, № 1, pp. 3-14.
5. Zimmermann H.-J. Fuzzy Programming with Several Objectives Functions//Fuzzy sets and systems, 1978, vol. 1, pp. 46-55.
6. Hamacher H., Leberling H., Zimmermann H.-J. Sensitivity Analysis in Fuzzy Linear Programming//Fuzzy sets and systems, 1978, vol. 1, pp. 269-281.
7. Tang J., Wang D., Fung R.Y.K. Understanding of Fuzzy Optimization: Theories and Methods // Journal of Systems Science and Complexity, 2004, vol. 17, No 1.
8. Fuzzy Multi-Criteria Decision Making: Theory and Applications with Recent Developments (Kahraman, C., ed.), Springer. 2008.
9. Luhandjula M.K. Fuzzy Optimization: Milestones and Perspectives//Fuzzy Sets and Systems, 2015, vol. 74, pp. 4–11.
10. Orlovsky S.A., On Programming with Fuzzy Constraint Sets//Kybernetes, 1977, vol. 1, pp. 197-201.
11. Orlovskij S.A. Problemy Prinyatiya Reshenij pri Nechetkoj Iskhodnoj Informacii. M. Nauka. 1981.
12. Noghin V.D. Mnogokriterial'nyj Vybor na Nechetkom Mnozhestve kak Zadacha Poiska Kompromissa//Iskusstvennyj intellekt i prinyatie reshenij, 2018, № 3, pp. 91-99.
13. Noghin V.D. Approximation of Convex Fuzzy Sets. In Proc. of Intern. Conf. Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA), 2017, pp. 127-129. Интернет-ресурс: https://ieeexplore.ieee.org/document/7973994/
14. Noghin V.D. Pareto Set Reduction: an Axiomatic Approach. Springer Inc., 2018.
15. Noghin V.D. Pareto Set Reduction Based on Some Metrics//Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2017, vol. 57(4), pp. 645-652.