

Сравнение полиинтервальных альтернатив: метод оценки коллективного риска*

Г. И. Шепелев

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия

Аннотация. В рамках метода оценки коллективного риска для полиинтервальных альтернатив (обобщенных интервальных и нечетких величин) предложены процедуры расчета индикаторов предпочтительности и риска. Процедуры основаны на дефаззификации интервальных оценок указанных индикаторов, относящихся к моноинтервалам на альфа-уровнях в случае нечетких полиинтервальных объектов, и на представлении обобщенных интервальных оценок в виде вероятностной смеси образующих такую оценку распределений. Исследуются некоторые различия подходов обобщенных интервальных оценок и нечетких оценок при сравнении альтернатив, а также связь указанных подходов. Установлено, что обобщенные равномерные распределения шансов в подходе обобщенных интервальных оценок получаются при дефаззификации равномерных распределений на альфа-уровнях нечетких объектов. Показано, что в зависимости от способа дефаззификации из равномерных распределений на альфа-уровнях нечетких объектов могут быть получены различные распределения шансов в формализме обобщенных интервальных оценок.

Ключевые слова: сравнение полиинтервальных альтернатив, метод оценки коллективного риска, обобщенные интервальные оценки, нечеткие полиинтервальные альтернативы, методы дефаззификации, процедуры сравнения полиинтервальных альтернатив.

DOI 10.14357/20718594190301

Введение

При решении ряда задач в условиях неопределенности их параметры часто выступают в виде интервальных оценок. Обычно считается, что такие оценки содержат все заранее неизвестные возможные точечные реализации параметров. Однако эксперту иногда затруднительно выразить свои знания об анализируемой величине посредством единственной моноинтервальной оценки. Интервал излишнего размаха снижает ценность его знаний, а зауженный интервал может привести к ошибкам предсказания.

При наличии выборочных данных необходимого объема это затруднение преодолевается ме-

тодами математической статистики путем расчета шансов того, что такая оценка содержит в себе неизвестное точечное значение оцениваемой величины. Если же параметры задачи прогнозируются на основании преимущественно экспертных суждений, целесообразен переход от моноинтервальных к полиинтервальным оценкам.

В рамках полиинтервального подхода можно выделить два основных направления: описание посредством аппарата нечетких множеств [1] и с помощью формализма обобщенных интервальных оценок (ОИО) [2, 3]. Часто требуется сравнить варианты решений задач (альтернативы) по их эффективности для достижения целей. Тогда некоторые результирующие показатели задач трактуются как показатели каче-

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-29-12864, 17-07-00512, 17-29-07021, 18-07-00280, 19-29-01047).

✉ Шепелев Геннадий Иванович. E-mail: gis@isa.ru

ства, отражающие степень достижения целей альтернативами. Назовем интервальными альтернативами (ИА) такие объекты сравнения с целью выбора эффективных, показатели качества которых имеют, из-за неопределенности, интервальное представление.

Поскольку при наличии ненулевого пересечения интервальных оценок их показателей качества любая ИА может оказаться эффективной в будущем, хотя и с разной степенью уверенности в истинности этого утверждения, задачи сравнения ИА по эффективности, по крайней мере, двухкритериальны. Наряду с критерием, связанным с показателем качества альтернатив и оценивающим их по предпочтительности, необходимо на равных началах учитывать индикатор, характеризующий риск принятия неверного решения о выборе «лучшего» объекта. Чтобы получить возможность рассчитывать меры предпочтительности и риска при сравнении ИА, необходимо привлечь математический аппарат исчисления необходимых числовых характеристик. Наиболее распространен для этого аппарат функций распределения, который, при определенных допущениях, может быть перенесен и на случай сравнения нечетких объектов.

При сравнении ИА по эффективности целесообразно различать риски различной природы. Среди них риск как возможность получения убытков или как возможность получения реального исхода, отличного от желаемого прогнозируемого результата, а также риск того, что ИА, оцениваемая в момент сравнения как эффективная в их предъявленном множестве, не окажется таковой в момент снятия неопределенности. Использование аппарата функций распределения позволяет рассчитывать для ИА меры предпочтительности и риска в обеих их вышеуказанных трактовках.

Для оценки риска в его первом понимании наиболее часто используется в настоящее время метод «среднее – риск» [4]. Здесь сопоставляемые альтернативы рассматриваются как отдельные не связанные друг с другом объекты. Для каждой ИА величина критерия предпочтительности (значение математического ожидания случайной величины, заданной на интервальной оценке показателя качества) вычисляется отдельно, а затем, безотносительно к этому индикатору, вновь для каждого объекта отдельно, вычисляется тот или иной индикатор риска и лишь после этого на базе обоих

этих индикаторов осуществляется сравнение. В качестве критерия риска могут выступать разные показатели, дисперсия, левая и правая полудисперсии, среднее полуотклонение [5]. Чаще всего в последнее время используется последний из перечисленных критериев риска. Для случая моноинтервальных оценок метод «среднее – риск» для критериев математическое ожидание и среднее полуотклонение исследован ранее в [6], а для полиинтервальных оценок в работе [7].

Во втором подходе к сравнению ИА в условиях риска развит метод оценки коллективного риска. В методе учитывается зависимость предпочтительности ИА и сопутствующего риска от контекста, т.е. конкретной совокупности сравниваемых объектов [8]. За меру предпочтительности здесь выбираются шансы правдоподобности гипотезы о том, что анализируемая альтернатива окажется предпочтительнее других сравниваемых, а за меру риска шансы того, что в действительности хотя бы одна другая альтернатива окажется предпочтительной. Метод обладает тем достоинством, что позволяет оценить «коллективный» риск, величина которого может существенно превосходить величину риска при попарном сравнении. Недостатки метода являются следствием того факта, что в его рамках сравнивается лишь относительная эффективность ИА. При этом альтернатива, признанная эффективной при таком сравнении, сама по себе может оказаться неэффективной (убыточной). Ранее этот метод применялся нами при сравнении моноинтервальных оценок. Поскольку все рассмотренные подходы к сравнению ИА имеют как достоинства, так и недостатки, свои для каждого из подходов, а методы расчета индикаторов предпочтительности и риска в обоих подходах дополняют друг друга, разумным представляется построение процедуры, сочетающей при совместном использовании достоинства обоих подходов.

На первом этапе такой комплексной процедуры используется метод «среднее-риск», а на втором отбор эффективных ИА производится с учетом величины коллективного риска в уже суженной в результате первого этапа совокупности альтернатив. Для моноинтервальных альтернатив такая процедура предложена в работе [9].

Цель данной статьи распространить метод оценки коллективного риска на полиинтервальный случай. Это позволит, наряду с прочим,

использовать комплексную процедуру сравнения и для полиинтервальных альтернатив.

1. Метод оценки коллективного риска

В рамках метода оценки коллективного риска сравниваемые ИА рассматриваются как совокупность взаимосвязанных объектов. Метод учитывает, что риск выбора «лучшей» ИА зависит, наряду с прочим, от количества сравниваемых объектов: чем больше их в системе, тем больше, при прочих равных условиях, величина риска. ИА сравниваются «в целом». Это происходит благодаря коллективному эффекту, свойственному многим природным системам, в силу чего свойства системы могут значительно отличаться от свойств ее компонентов.

Пусть имеются K альтернатив I_i , $i = 1, 2, \dots, K$ и пусть безразмерная величина $C(I_i \succ (I_1, I_2, \dots, I_{i-1}, I_{i+1}, \dots, I_K))$ квантифицирует степень уверенности (шансы) в истинности тестируемой гипотезы о предпочтительности того, что ИА I_i предпочтительнее всех прочих сравниваемых ИА $(I_1, I_2, \dots, I_{i-1}, I_{i+1}, \dots, I_K)$ в их имеющемся множестве. Пусть $\equiv$ и $\wedge$ - символы эквивалентности и конъюнкции соответственно. Тогда термин предпочтительнее «всех прочих» означает, что

$$I_i \succ (I_1, I_2, \dots, I_{i-1}, I_{i+1}, \dots, I_K) \equiv (I_i \succ I_1) \wedge (I_i \succ I_2) \wedge (I_i \succ I_3) \wedge \dots \wedge (I_i \succ I_{i+1}) \wedge \dots \wedge (I_i \succ I_K).$$

Риск того, что I_i не окажется в действительности предпочтительной измеряется величиной $R_s(I_i \succ (I_1, I_2, \dots, I_{i-1}, I_{i+1}, \dots, I_K))$, дополняющей величину шансов $C(I_i \succ (I_1, I_2, \dots, I_{i-1}, I_{i+1}, \dots, I_K))$ до единицы. Эта величина измеряет шансы того, что хотя бы одна альтернатива окажется предпочтительнее I_i . Используя введенные величины, природу возникновения коллективного эффекта можно описать следующими соотношениями [10]:

$$C(I_1 \succ (I_2, I_3, \dots, I_K)) + C(I_2 \succ (I_1, I_3, \dots, I_K)) + C(I_3 \succ (I_1, I_2, I_4, \dots, I_K)) + \dots + C(I_K \succ (I_1, I_2, \dots, I_{K-1})) = 1,$$

$$R_s(I_1 \succ (I_2, I_3, \dots, I_K)) + R_s(I_2 \succ (I_1, I_3, \dots, I_K)) + R_s(I_3 \succ (I_1, I_2, I_4, \dots, I_K)) + \dots + R_s(I_K \succ (I_1, I_2, \dots, I_{K-1})) = K - 1.$$

Здесь возникает следующий важный вопрос: отличается ли упорядочение ИА по предпочтительности при сравнении «в целом» от результатов попарного сравнения. Ответ на этот вопрос отрицательный: порядок, определяемый при попарном сравнении, совпадает с результа-

тами сравнения «в целом». Однако представление об истинной величине риска дает лишь сравнение «в целом». Для небольшого числа (двух, трех) сравниваемых моно ИА аналитические соотношения для подсчета величины критерия предпочтительности получены в работах [11, 12] в предположении о равномерности распределений шансов, заданных на сравниваемых интервалах. Для большего числа ИА эти соотношения могут быть получены численно методом статистических испытаний. Для полиинтервальных оценок практически реализуем только наиболее важный случай попарного сравнения. Именно он рассматривается далее для двух основных направлений полиинтервального подхода – описание посредством аппарата нечетких множеств и с помощью формализма ОИО.

Как и для моноинтервального случая, выражения для шансов предпочтительности $C(I_1 \succ I_2)$ интервальной альтернативы I_1 при сравнении с I_2 зависят от взаимного расположения сравниваемых ИА, т.е. от их конфигураций. Если для монослучая имеются, с точностью до перестановки, всего четыре конфигурации сравниваемых попарно ИА – конфигурация правого сдвига, вложенные интервалы, совпадающие и непересекающиеся интервалы, причем основной интерес представляют только две первых конфигурации с ненулевым пересечением оценок, то в случае полиинтервальных альтернатив число конфигураций пар пересекающихся оценок существенно богаче.

Именно с точностью до перестановки полиинтервальных объектов в их сравниваемой паре для треугольных функций принадлежности теории нечеткости и для треугольных полиинтервальных оценок формализма ОИО имеются пять различных конфигураций пересекающихся ИА. Каждый объект из двух сравниваемых задается тремя угловыми точками выше указанного треугольника: $L_i < T_i < R_i$, $i = 1, 2$. Удобно производить классификацию конфигураций по числу пересечений левых l_i и правых r_i боковых сторон треугольников. Примем, что проверяется гипотеза о том, что первый полиинтервальный объект I_1 предпочтительнее второго I_2 .

При $T_2 < T_1$ (конфигурации 1 и 2). Конфигурация 1: l_1 один раз пересекает только r_2 . При этом $L_2 < L_1 < R_2 < R_1$.

Конфигурация 2: l_1 и r_1 по одному разу пересекают r_2 . При этом $L_2 < L_1 < R_1 < R_2$.

При $T_2 > T_1$ (конфигурации 3 и 4). Конфигурация 3: l_1 и r_1 по одному разу пересекают l_2 . При этом $L_2 < L_1 < R_1 < R_2$.

Конфигурация 4: l_1 пересекает l_2 , а r_1 по одному разу l_2 и r_2 . При этом $L_2 < L_1 < R_2 < R_1$.

При $T_2 = T_1$ (конфигурация 5). Пересечений боковых сторон нет. При этом $L_1 < L_2 < R_2 < R_1$.

Анализируя вышеуказанные конфигурации, можно заключить, что при $T_1 > T_2$ удобнее искать шансы $C(I_2 \succ I_1)$, а при $T_1 < T_2$ шансы $C(I_1 \succ I_2)$.

В этой работе мы ограничимся при сравнении нечетких полиинтервальных объектов и ИА, чьи показатели качества представлены ОИО, конфигурацией 1. Прочие конфигурации будут рассмотрены позже.

2. Оценка коллективного риска: нечеткие альтернативы

Пусть показатель качества ИА представлен как нечеткий полиинтервальный объект с носителем $[L, R]$ и с треугольной функцией принадлежности. Будем пользоваться для описания полиинтервальных нечетких объектов их декомпозицией на совокупности α -уровней и пусть функции принадлежности нормальны, так что $\alpha \in [0, 1]$.

Мы рассматриваем здесь конфигурацию, для которой $T_2 < T_1$, $L_2 < L_1 < R_2 < R_1$, а правая ветвь $r_2(\alpha)$ графика функции принадлежности объекта I_2 один раз пересекает левую ветвь $l_1(\alpha)$ объекта I_1 . Здесь

$$l_1(\alpha) = (1 - \alpha)L_1 + \alpha T_1, \quad r_2(\alpha) = (1 - \alpha)R_2 + \alpha T_2.$$

Анализируя эту конфигурацию, можно заключить, что удобнее искать шансы $C(I_2 \succ I_1)$. Область предпочтительности $I_2 \succ I_1$ ограничена здесь полосой $\alpha = 0$, $\alpha = \alpha_1$, где α_1 – точка пересечения $r_2(\alpha)$ и $l_1(\alpha)$:

$$\alpha_1 = (R_2 - L_1) / (R_2 - T_2 + T_1 - L_1).$$

Существенной отличительной чертой сравнения нечетких полиинтервальных объектов является тот факт, что вложенные в графики функций принадлежности моноинтервалы обоих нечетких объектов сравниваются при одинаковых значениях α и что на всех (обычных, не нечетких) интервалах $I(\alpha)$, отвечающих α -уровням, заданы равномерные распределения шансов [11]. Пусть $i_1(\alpha)$ и $i_2(\alpha)$ суть отвечающие некоторому допустимому α моноинтервалы объектов I_1 и I_2 соответственно. Из геометрии конфигурации следует, что для

моноинтервалов $i_1(\alpha)$ и $i_2(\alpha)$ объектов I_1 и I_2 в области предпочтительности $I_2 \succ I_1$ имеются только моноконфигурации правого сдвига, при которых $i_1(\alpha)$ сдвинуты вправо от $i_2(\alpha)$. Это означает, что на каждом α -уровне шансы $C(i_2(\alpha) \succ i_1(\alpha))$ равны

$$C(i_2(\alpha) \succ i_1(\alpha)) = \frac{[(1 - \alpha)(R_2 - L_1) + \alpha(T_2 - T_1)]^2}{Z(\alpha)}, \quad (1)$$

где $Z(\alpha) = [2(1 - \alpha)^2 \Delta_1 \Delta_2]$, $\Delta_1 = R_1 - L_1$, $\Delta_2 = R_2 - L_2$.

Можно видеть, что в соответствии с изменением α возможная величина шансов лежит в некотором интервале значений. Это относится и к другим характеристикам нечетких объектов [13]. Поскольку общение с экспертами-практиками желательно проводить на привычном для них языке, целесообразен переход от таких интервальных величин к характеризующим их одно-числовым оценкам. Для такого перехода прибегают к процедуре дефаззификации. Можно воспользоваться несколькими методами дефаззификации. В одном из них все $i(\alpha)$ рассматриваются при получении одно-числовых характеристик [7] как равноправные, а во втором, методе центра тяжести, вклад $i(\alpha)$ в интегральную характеристику увеличивается с ростом α . Выбор способа дефаззификации определяется лицом, принимающим решение.

Применяя первый метод дефаззификации, т.е. интегрируя соотношение (1) для $C(i_2(\alpha) \succ i_1(\alpha))$ по α в пределах от 0 до α_1 , получаем следующее выражение для индикатора риска $R_{sf}(I_1 \succ I_2) = C_F(I_2 \succ I_1)$:

$$R_{sf}(I_1 \succ I_2) = \frac{1}{2\Delta_1\Delta_2} [(R_2 - L_1)^2 + 2(R_2 - L_1)(T_1 - T_2) + 2(T_1 - T_2)(R_2 - L_1 + T_1 - T_2) \ln \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_2 - L_1 + R_2}]$$

Аналогичный метод был использован в работе [14] при подсчете индикатора риска неэффективности инвестиционного проекта для другой конфигурации пары сравниваемых нечетких объектов.

Выражения для шансов предпочтительности и риска при дефаззификации методом центра тяжести получаются при интегрировании $C(i_2(\alpha) \succ i_1(\alpha))$ в пределах от 0 до α_1 с весом 2α . Интегрирование дает: $R_{sf1} = R_{sf} + Def_R$, где «дефект» Def_R величины индикатора риска R_{sf1} , рассчитываемого путем дефаззификации мето-

дом центра тяжести, по сравнению с величиной индикатора R_{sF} , составляет:

$$Def_R = \frac{(T_1 - T_2)}{\Delta_1 \Delta_2} \{2(R_2 - L_1) + \\ + [R_2 - L_1 + 2(T_1 - T_2)] \ln \frac{T_1 - T_2}{R_2 - L_1 + T_1 - T_2}\}$$

Так как $Def_R < 0$, то $R_{sF1} < R_{sF}$ и, стало быть, оценки предпочтительности, получаемые при дефазификации методом центра тяжести, больше, чем при применении первого метода дефазификации, метода простого осреднения.

Результаты применения процедур дефазификации с целью получения одно-числовых оценок интервальных характеристик нечетких объектов, аналогичных числовым характеристикам функций распределения теории вероятностей (математическое ожидание, дисперсия, среднее полуотклонение) приведены для треугольных функций принадлежности в работе [7]. Аналогичный подход может быть использован и в случае функций принадлежности других форм.

3. Оценка коллективного риска: обобщенные интервальные оценки

В подходе обобщенных интервальных оценок (ОИО) вводятся два вида объектов: полиинтервальная оценка (ПИО), т.е. трапеция, содержащая все моноинтервалы, включаемые в их систему, и собственно ОИО. ПИО задается двумя граничными интервалами-основаниями – верхним $I_u = [L_u, R_u]$ и нижним $I_d = [L_d, R_d]$, «базовым». Трапеция такова, что $L_d < L_u < R_u < R_d$. Все промежуточные между I_u и I_d интервалы входят в результирующую систему интервалов, ограничиваемую I_u и I_d . Боковые стороны ПИО прямолинейны.

На оси ординат двумерной плоскости, на которой помещается ПИО, вводится случайная величина β с плотностью распределения $f_1(\beta)$. Она служит меткой интервалов, входящих в их систему, и характеризует шансы их реализации. Шансы воплощения возможных точечных реализаций x на каждом из интервалов с меткой β , помещаемых на ось абсцисс двумерной плоскости с ПИО, описываются условной функцией распределения с плотностью $f_2(x|\beta)$. Таким образом, ОИО – это ПИО с заданной на последней плотностью совместной функции распределения $f(\beta, x) = f_1(\beta)f_2(x|\beta)$.

Пусть ОИО нормирована так, что $0 < \beta < 1$, метка $\beta = 0$ отвечает интервалу I_d , метка $\beta = 1$ – интервалу I_u . Пусть ПИО имеет треугольную форму и задается тремя угловыми точками, такими, что $L < T < R$. Распределения шансов $f_1(\beta)$ и $f_2(x|\beta)$ могут быть, вообще говоря, любыми. Предположим для простоты, что распределения шансов на координатных осях ПИО равномерные. Тогда, интегрируя по всем β с учетом задания совместной функции распределения на ПИО треугольной формы, получим на $[L, R]$ – интервале I_d – плотность маргинальной функции распределения шансов $f(x)$, или плотность обобщенного равномерного распределения (ОРР). ОРР на $[L, R]$ представляет собой вероятностную смесь распределений $f_2(x|\beta)$ со смешивающей функцией $f_1(\beta)$. Свойства ОРР для трапецидальных и, как частный случай, треугольных ПИО изучены нами ранее [15]. Используя эти результаты, имеем для плотности $f(x)$ ОРР на ПИО треугольной формы: при $L < x < T$ $f(x) = f_l(x)$; при $T < x < R$ $f(x) = f_r(x)$, где $f_l(x)$ и $f_r(x)$ – левая и правая ветви плотности распределения ОРР:

$$f_l(x) = \ln[(T - L)/(T - x)]/(R - L), \quad (2A)$$

$$f_r(x) = \ln[(R - T)/(x - T)]/(R - L). \quad (2B)$$

Обратимся к соотношениям для шансов предпочтительности и риска в формализме ОИО. Выше было отмечено, что в случае ОИО возможна трансформация полиинтервальных оценок в моноинтервальные путем перехода к вероятностным смесям. Именно, система распределений шансов, заданных на интервалах ОИО, может быть заменена распределением, заданным на интервале наибольшей протяженности (базовом интервале) ОИО. Это распределение и является вероятностной смесью распределений шансов системы. При такой замене определенные выше в Разделе 1 конфигурации полиинтервальных объектов переходят в конфигурации моноинтервальных объектов с сохранением отношений $< >$ для угловых точек T_i . Именно, конфигурации 1 и 4 переходят в конфигурацию правого сдвига для пары моноинтервальных объектов (оценка I_1 сдвинута вправо), конфигурации 2 и 3 переходят в конфигурацию вложенных интервалов (оценка I_1 вложена в I_2), конфигурация 5 переходит в конфигурацию вложенных интервалов (оценка I_2 вложена в I_1).

Ранее при рассмотрении нечетких объектов мы ограничились конфигурацией 1, а потому

здесь рассмотрим конфигурацию правого сдвига для пары моноинтервалов с ОРР на них. Ранее, используя простые геометрические соображения, в [11, 16] были получены соотношения для шансов предпочтительности и соответствующих рисков для равномерных и треугольных распределений шансов на моноинтервальных оценках. Теперь понадобятся такие соотношения для произвольных распределений шансов. В рассматриваемой конфигурации мы имеем дело, как было указано выше, с ситуацией правого сдвига для моноинтервальных оценок. Пусть i_j текущие точечные реализации значений показателя качества I_j , $i_j \in I_j$, $j = 1, 2$. В случае конфигурации правого сдвига из полной системы событий проще выделить события, благоприятствующие истинности гипотезы $I_2 \succ I_1$. Это события, при которых точечные реализации лежат в области $(i_1 \in [L_1, R_2]) \cap (i_2 \in [L_1, R_2])$, тогда

$$C(I_2 \succ I_1) = \int_{L_1}^{R_2} f_1(x_1) \int_{x_1}^{R_2} f_2(x_2) dx_1 dx_2. \quad (3)$$

Такой подход к сравнению моноинтервальных оценок предложен в работе [17].

Поскольку на моноинтервале $[L_1, R_2]$ у плотностей $f_i(x)$ могут быть, вообще говоря, обе ветви (2) в зависимости от относительных положений L_1 и T_2 , R_2 и T_1 , то соотношение (3) должно быть уточнено дополнительно. Именно, на интервале $[L_1, R_2]$ возможны следующие конфигурации:

- A) $L_2 < L_1 < T_2 < R_2 < T_1 < R_1$;
- B) $L_2 < L_1 < T_2 < T_1 < R_2 < R_1$;
- C) $L_2 < T_2 < L_1 < R_2 < T_1 < R_1$;
- D) $L_2 < T_2 < L_1 < T_1 < R_2 < R_1$.

Можно видеть, что для случая A) в интеграл (3) надо включить $f_{1l}(x_1)$ и обе ветви $f_2(x_2)$, для случая C) только $f_{1l}(x_1)$ и $f_{2r}(x_2)$, для случаев B) и D) в (3) войдут обе ветви $f_1(x_1)$ и $f_2(x_2)$. Из всех возможных вышеуказанных вариантов рассмотрим здесь случай C).

Вспоминая выражения (2) для плотности ОРР для треугольной ПИО, когда при $L < x < T$ $f(x) = f_l(x)$; при $T < x < R$ $f(x) = f_r(x)$, имеем:

$$C(I_2 \succ I_1) = \int_{L_1}^{R_2} f_{1l}(x_1) \int_{x_1}^{R_2} f_{2r}(x_2) dx_1 dx_2.$$

Интегрируя, получаем:

$$C(I_2 \succ I_1) = \left[\frac{(T_1 - R_2)^2}{2} \ln \frac{T_1 - L_1}{T_1 - R_2} + \frac{(R_2 - L_1)^2}{4} - \frac{(R_2 - L_1)(T_1 - R_2)}{2} + \int_{L_1}^{R_2} dx (T_2 - x) \ln \frac{x - T_2}{R_2 - T_2} \ln \frac{T_1 - x}{T_1 - L_1} \right] / (\Delta_1 \Delta_2).$$

Напомним, что $C(I_2 \succ I_1) = R_s(I_1 \succ I_2)$.

Фигурирующий в этой формуле неопределенный интеграл не может быть выражен в конечном виде через элементарные функции. При задании конкретных параметров ОИО значения для шансов предпочтительности и соответствующих рисков могут быть получены при взятии этого интеграла численными методами.

Заключение

Остановимся на некоторых аспектах связи теории нечеткости и подхода ОИО при сравнении ИА. Отличия подходов состоят в том, что в случае нечеткости сравнения моноинтервалов производятся для одинаковых α -уровней [11], а в случае ОИО, из-за смешивания распределений-компонентов на базовом интервале, для произвольных допустимых («смешанных») значений α . Это приводит к разным значениям индикатора риска для нечетких объектов в сравнении с ОИО. Различия становятся особенно заметными при разных методах дефаззификации для нечетких альтернатив. Так, для рассматриваемой нами конфигурации при $L_1 = 3$; $T_1 = 5$; $R_1 = 7$; $L_2 = 1$; $T_2 = 2$; $R_2 = 4$ $R_{sF} = 0.004$, $R_{sF1} = 0.0005$, а $R_{sGE} = 0.0011$. Таким образом, $R_{sF1} < R_{sGE} < R_{sF}$ и использование дефаззификации методом центра тяжести и ОИО подхода приводит к более оптимистическим оценкам для предпочтительностей, чем для метода простого осреднения для нечетких ИА. Этот вывод согласуется с приведенными выше результатами для нечетких объектов.

Отметим еще один существенный факт. Можно показать, что выражения (2) для плотности распределения шансов ОРР $f_l(x)$ и $f_r(x)$ в подходе ОИО получаются при дефаззификации распределений на α -уровнях нечетких объектов. Действительно, плотность $f_l(\alpha)$ распределений на α -уровнях равна $f_l(\alpha) = 1/[(1 - \alpha)\Delta]$. При дефаззификации первым способом для усредненных таким образом плотностей

распределения шансов $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (при $L < x < T$ и $T < x < R$ соответственно) имеем:

$$f_1(x) = \int_0^{(x-L)/(T-L)} d\alpha / [(1-\alpha)\Delta],$$

$$f_2(x) = \int_0^{(R-x)/(R-T)} d\alpha / [(1-\alpha)\Delta].$$

Теперь можно видеть, что $f_1(x) = f_l(x)$, $f_2(x) = f_r(x)$. Используя различные способы дефаззификации, из распределений шансов в нечетких объектах можно получать различные ОИО. Так, интегрируя вышеприведенные соотношения для $f_{1(2)}(x)$ с весом 2α , получим плотности распределения шансов $f_{1G(2G)}(x)$, отвечающие дефаззификации методом центра тяжести:

$$f_{1G}(x) = \frac{2}{\Delta} \left(\ln \frac{T-L}{T-x} - \frac{x-L}{T-L} \right),$$

$$f_{2G}(x) = \frac{2}{\Delta} \left(\ln \frac{R-T}{x-T} - \frac{R-x}{R-T} \right).$$

Следовательно, надо иметь в виду, что при сопоставлении результатов сравнения нечетких и ОИО полиинтервальных альтернатив следует учитывать не только факт принадлежности объектов к одной конфигурации, но и использованный способ дефаззификации. Отметим, что на связь нечетких и теоретико-вероятностных представлений указано в работе [18].

Развиваемые здесь подходы могут найти применение в прикладных задачах, например, в задачах оценки перспективности нефтегазовых объектов на ранней стадии их изученности [19], а также в других задачах принятия решений в условиях неопределенности.

Литература

- Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука. 1981. – 208 с.
- Chugunov N, Shepelev G., Sternin M. The generalized interval estimations in decision making under uncertainty // International Journal of Technology, Policy and Management. 2008. V. 8 (3). P. 298–321.
- Sternin M., Shepelev G. Generalized interval expert estimates in decision making // Doklady Mathematics. 2010. 81 (3). P. 485–486.
- Fishburn P.C. Mean-risk analysis with risk associated with below-target returns // American Economic Review. 1977. 67(1) P. 116–126.
- Ogryczak W, Ruszczyński A. From stochastic dominance to mean-risk models: semideviations as risk measures // European journal of operational research. 1999. 116. P. 33–50.
- Подinovский В.В. Числовые меры риска как критерии выбора при вероятностной неопределенности // Искусственный интеллект и принятие решений. 2015. №2. С. 60–74.
- Шепелев Г.И. Сравнение полиинтервальных альтернатив: метод «среднее-риск» // Искусственный интеллект и принятие решений. 2019. №1. С. 16–26.
- Shepelev G. Decision-making in groups of interval alternatives // International journal «Information theories and applications». 2016. 23(4). P. 303–320.
- Жиянов В.И., Шепелев Г.И. Комплексный метод сравнения интервальных альтернатив в условиях риска // Вестник ЦЭМИ РАН. 2018. №3 [Electronic resource].
- Стернин М.Ю., Шепелев Г.И. Оценка риска в совокупности интервальных альтернатив // Искусственный интеллект и принятие решений. 2015. №3. С. 83–91.
- Дилигенский Н.В., Дымова Л.Г., Севастьянов П.В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология. М.: Машиностроение. 2004. – 397 с.
- Shepelev G., Sternin M. Methods for comparison of alternatives described by interval estimations // International Journal of Business Continuity and Risk Management. 2011. 2(1). P. 55–69.
- Dubois D., Prade H. 1988. Theorie des possibilites. Paris: Masson. – 288 p.
- Недосекин А.О. Нечетко-множественный анализ риска финансовых инвестиций. С-Пб: Сизм. 2002. – 181 с.
- Стернин М.Ю., Шепелев Г.И., Шепелев Н.Г. Свойства обобщенного равномерного распределения вероятностей // Труды Второй международной конференции «Системный анализ и информационные технологии». (САИТ-2007) в 2-х томах. М.: ЛКИ. 2007. С. 239–242.
- Shepelev G., Sternin M. The adequacy of point criteria during the evaluation and comparison of interval alternatives problems // Scientific and technical information processing. 2014. 41(6). P. 78–88.
- Шахнов И.Ф. Экспресс-анализ упорядоченности интервальных величин // Автоматика и телемеханика. 2004. №10. С. 67–84.
- Орлов А.И. Нечисловая статистика. М.: МЗ-Пресс. 2004. – 513 с.
- Пороскун В.И., Стернин М.Ю., Шепелев Г.И. СППР для стоимостной оценки нефтегазовых объектов на ранней стадии их изученности // Научно-техническая информация. Сер. 2. 1998. №3. С. 27–38.

Comparing of Polyinterval Alternatives: Collective Risk Estimating

G. I. Shepelev

Federal Research Center "Computer Science and Control" of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The procedures for calculating preference and risk indicators that were previously applied to mono interval objects are proposed within the collective risk estimating method in the case of pairwise comparison for polyinterval objects, generalized interval and fuzzy objects. The procedures are based on the defuzzification of interval estimates of preference and risk indicators related to mono intervals at alpha-levels in the case of fuzzy polyinterval objects and on the presentation of generalized interval estimates as a probabilistic mixture of the distributions forming such an estimate. Some differences and relationships in approach of generalized interval estimations and fuzzy approach for comparing alternatives are studied. It is established that generalized uniform distributions of chances in the approach of generalized interval estimates are obtained if we use the defuzzification methods for uniform distributions on alpha levels of fuzzy objects discussed in the paper. It is shown how the defuzzification procedures lead to one-numeric estimates for the interval characteristics of fuzzy objects, similar to the numerical characteristics of distribution functions of the probability theory, mathematical expectation, variance, mean semideviation. Depending on the defuzzification method, different chances distributions in the formalism of generalized interval estimates can be obtained from uniform distributions on alpha-levels of fuzzy objects. However, the whole variety of chance distribution arising in the last formalism is not exhausted by the distributions obtained in this way.

Keywords: comparing of polyinterval alternatives, generalized interval estimations, fuzzy polyinterval alternatives, defuzzification methods, one-numeric estimates of interval characteristics of fuzzy objects, method of collective risk estimating, procedures of polyinterval alternatives comparing.

DOI 10.14357/20718594190301

References

1. Orlovsky S. Problemy prinyatiya resheny pri nechetkoi iskhodnoi informatsii. 1981. [Decision making problems with fuzzy source information]. Moscow: Nauka. 208 p.
2. Chugunov N., Shepelev G., Sternin M. 2008. The generalized interval estimations in decision making under uncertainty // International Journal of Technology, Policy and Management. 8(3): 298–321.
3. Sternin M., Shepelev G. 2010. Generalized interval expert estimates in decision making // Doklady Mathematics. 81(3): 485–486.
4. Fishburn P.C. 1977. Mean-risk analysis with risk associated with below-target returns // American Economic Review. 67(1): 116–126.
5. Ogryczak W., Ruszczyński A. 1999. From stochastic dominance to mean-risk models: semideviations as risk measures // European journal of operational research. 116: 33–50.
6. Podinovsky V. 2015. Chislavye mery riska kak kriterii vybora pri veroyatnostnoi neopredelennosti [Numerical risk measures as selection criteria for probabilistic uncertainty] // Iskustvenny intellekt i prinyatie resheny [Artificial intelligence and decision-making] 2: 60–74.
7. Shepelev G. 2019. Sravnenie poli intervalnykh alternative: metod "srednee – risk" [Comparing poly-interval alternatives: "mean-risk" method] // Iskustvenny intellekt i prinyatie resheny [Artificial intelligence and decision-making] 1. P: 16–26.
8. Shepelev G. 2016. Decision-making in groups of interval alternatives // International journal «Information theories and applications». 23(4): 303–320.
9. Shepelev G., Zhiyanov V. 2018. Kompleksnyi metod sravneniya alternativ v usloviyakh riska [Comprehensive method for comparing interval alternatives under risk] // Vestnik TSEMI [Herald of CEMI]. 3 [Electronic resource]. URL: <http://cemi.jes.su/s111111110000061-0-1> (circulation date: 15.01.2019). DOI: 10.33276/S0000061-0-1.
10. Sternin M., Shepelev G. 2015. Otsenka riska v so-vokupnosti intervalnykh alternativ [Risk estimating in interval alternatives set] // Iskustvenny intellekt i prinyatie resheny [Artificial intelligence and decision-making] 3: 83–91.
11. Diligensky N., Dymova N., Sevastyanov P. 2004. Nechetkoe modelirovanie i mnogokriterialnaya optimizatsiya proizvodstvennykh system v usloviyakh neopredelennosti: tekhnologiya, ekonomika, ekologiya [Fuzzy modeling and multi-criteria optimization of production systems under uncertainty: technology, economy, ecology]. Moscow: Engineering-1 Pubs. 397 p.
12. Shepelyov G., Sternin M. 2011. Methods for comparison of alternatives described by interval estimations // International Journal of Business Continuity and Risk Management. 2(1): 55–69.
13. Dubois D., Prade H. 1988. Theorie des possibilites. Paris: Masson. - 288 p.

14. Nedosekin A.O. 2002. Nechetko-mnozhestvennyi analiz riska finansovykh investitsii [Fuzzy-set analysis of finance investments]. S-Ptsb: Sezam. – 181 p.
15. Sternin M., Shepelev G., Shepelev N. 2007. Svoistva obobshchennogo ravnomernogo raspredeleniya veroyatnostei [Properties of the generalized uniform probability distribution] // Trudy 2-oi Mezhdunarodnoi konferentsii "Sistemny analiz i informatsionnye tekhnologii" [2-nd International Conference "System Analysis and Information Technologies" (SAIT-2007)]. Moscow. 1: 239-242.
16. Shepelyov G., Sternin M. 2014. The adequacy of point criteria during the evaluation and comparison of interval alternatives problems //Scientific and technical information processing. 41(6): 78–88.
17. Shakhnov I.F. 2004. Ekspress-analiz uporyadochennosti intervalnykh velichin [Express analysis of ordering interval values] // Avtomatika i telemekhanika [Automation and remote control] 10: 67–84.
18. Orlov A.I. 2004. Nechislovaya statistika [Non-numeric statistics]. Moscow: MZ-Press. – 513 p.
19. Poroskun V.I., Sternin G.I., Shepelev G.I. 1998. SPPR dlya stoimostnoi otsenki neftegasovykh objektov na rannei stadii ikh izuchennosti [DSS for evaluating oil and gas objects on early stages of study] // [Scientific and technical information processing] 3: 27-38.