F-Calc: компьютерная система для вычисления функций от нечетких аргументов*

А. В. Радаев, А. В. Коробов, Б. И. Яцало

Институт Интеллектуальных Кибернетических Систем, Обнинский институт атомной энергетики – филиал Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ» г. Обнинск, Калужская обл., Россия

Аннотация. В статье представлена система F-Calc (Fuzzy Calculator), позволяющая вычислять функции от нечетких чисел с использованием приближенных вычислений, стандартной нечеткой арифметики с заданным количеством альфа-срезов, а также вычислений с использованием редуцированного и общего методов трансформации. Созданная система работает как с треугольными и трапециевидными нечеткими числами, так и с нечеткими числами более сложной формы, функция принадлежности которых является кусочно-линейной полунепрерывной сверху функцией. Приведен обзор аналогов разработанной системы. Представлены структура системы F-Calc, входные и выходные формы. Даны примеры вычисления функций от нечетких аргументов с использованием реализованных методов, иллюстрирующие особенности самих методов и возможности системы F-Calc в целом.

Ключевые слова: нечеткое множество, нечёткое число, стандартная нечеткая арифметика, редуцированный метод трансформации, общий метод трансформации, нечеткая система.

DOI 10.14357/20718594190409

Введение

Понятие нечеткого множества было сформулировано Л. Заде в 1965 году [1]. С тех пор нечеткие множества используются в различных областях человеческой деятельности. Одним из примеров развития теории нечётких множеств стала разработка теории нечетких чисел и операций над ними. Операции пресечения, объединения и дополнения, определенные для классических (четких) множеств, расширены и на нечеткие множества [1, 2]. Подобно этому, функции от действительных чисел расширены до понятия функций от нечетких аргументов, начиная от таких простых арифметических операций, как сложение, вычитание, умножение и деление [3], заканчивая функциями более общего вида, используемых, например, в механике и физике [4] и нечетком многокритериальном анализе решений [5].

Для вычисления функций от нечетких аргументов используются различные методы, имеющие свои преимущества, недостатки и область применения. Наиболее распространённым является подход, основанный на альфа-срезах. Данный метод имеет ряд недостатков, связанных с проблемой переоценки при вычислении выражений с зависимыми переменными. Для преодоления данной проблемы могут быть использованы различные подходы [4, 6]. В данной работе для решения проблемы переоценки и, соответственно, оценки истинного (т.е., полученного на основе принципа расширения) или близкого к истинному значению функции от нечетких чисел используются методы трансформации (редуцированный и общий) [4]. В системе *F-Calc* реализованы четыре метода вычисления функций от

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-07-01039.

✉ *Радаев Александр Викторович. E-mail: rad.yyhh@yandex.ru*

нечетких аргументов на основе упрощенных вычислений, стандартной нечёткой арифметики, а также редуцированного и общего методов трансформации.

Статья имеет следующую структуру. В первом разделе приведены определения основных понятий, используемых в работе. Во втором представлены способы вычисления функций от нечетких аргументов, в третьем приводится обзор существующих систем, позволяющих вычислять функции от нечетких аргументов. Четвертый раздел содержит описание структуры и функциональности разработанной системы *F-Calc*, в пятом – примеры вычисления функций от нечетких чисел с помощью разработанной системы.

1. Базовые понятия теории нечетких множеств и нечетких чисел

Нечеткое множество A [1] на (универсальном) множестве X (например, множестве действительных чисел $\mathbb{R}$) определяется как $A = \{(x, \mu_A(x)): x \in X\}$, где $\mu_A(x)$ представляет собой степень принадлежности (degree of membership) элемента x нечеткому множеству A. Функция $\mu_A(x)$, μ_A: $X \to [0, 1]$ называется функцией принадлежности (membership function) [1, 2]. Во многих работах используется также обозначение $\tilde{A}$ для того, чтобы различать нечеткое множество от четкого, однако, в настоящее время такие обозначения, как правило, не используются.

Носителем (support) нечеткого множества A, заданного на универсальном множестве X, называют четкое множество $supp(A) = \{x \in X: \mu_A(x) > 0\}$ [2–4]. Ядром нечеткого множества A называют четкое множество $Ker(A) = \{x \in X: \mu_A(x) = 1\}$. A является нормальным нечетким множеством, если $Ker(A) \neq \varnothing$.

Одним из ключевых в теории нечетких множеств является понятие α-среза: α-срез (α-cut) нечеткого множества A, $\alpha \in (0, 1]$, представляет собой четкое множество $A_\alpha = \{x \in X: \mu_A(x) \geq \alpha\}$ [2–4].

Существует несколько подходов к определению нечетких чисел, основанных на конкретизации формы функции принадлежности (кусочно-непрерывных или полунепрерывных сверху функций) [2–4, 7, 8], а также на использовании свойств α-срезов. Последний подход, являющийся наиболее общим, используется в данной работе.

Определение 1. Нечеткое число (fuzzy number) Z представляет собой нормальное ограниченное нечеткое множество в $\mathbb{R}$ у которого все α-срезы Z_α, $\alpha \in (0, 1]$ являются отрезками. Подчеркнем, что α-срез, состоящий из одной точки, по определению считается отрезком.

Из Определения 1 следует [9]: существуют действительные числа $c_1 \leq c_2$, такие, что

1. В случае $c_1 < c_2$ нечеткое число Z может быть представлено следующим образом:

$$Z = \{(x, \mu_Z(x)): \mu_Z(x) > 0, x \in (c_1, c_2), \mu_Z(x) = 0, x \notin [c_1, c_2]\}. \quad (1)$$

2. В случае $c_1 = c_2 = c$, Z является синглетоном (singleton) (используется также термин синглтон) и $\mu_Z(c) = 1$, $\mu_Z(x) = 0$ для $x \neq c$.

Всюду ниже $\mathbb{F}$ представляет собой множество нечетких чисел согласно Определению 1.

Замечание 1. Для указанных в (1) чисел c_1 и c_2 условие $\mu_Z(c_1) = \mu_Z(c_2) = 0$ не является необходимым, однако часто используется в приложениях. Добавим также, что функция принадлежности синглтона представляет собой частный случай полунепрерывной сверху функции [8, 10].

Обозначим через $[A_\alpha, B_\alpha]$ α-срез Z_α нечеткого числа Z, $\alpha \in (0, 1]$, и положим $[A_0, B_0] = [c_1, c_2]$, условно называемым α-срезом Z_0 для α=0 (здесь c_1, c_2 – граничные значения согласно (1)). Тогда нечеткое число Z может быть представлено множеством α-срезов:

$$Z = \{[A_\alpha, B_\alpha]\}, \alpha \in [0, 1]. \quad (2)$$

Нечеткое число $Z = \{[A_\alpha, B_\alpha]\}$ называют положительным, если $A_0 > 0$.

2. Вычисление функций от нечетких аргументов

Вычисление функций от нечётких аргументов базируется на *принципе расширения* Заде (extension principle, используется также термин *принцип обобщения*) [2-4, 7, 9]. Принцип расширения может быть представлен следующим образом.

Пусть дана функция действительных переменных: $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in U_i \subseteq \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $Z_i \in \mathbb{F}$ – нечеткие числа, $i = 1, \ldots, n$. Нечеткое множество $Z = f(Z_1, \ldots, Z_n)$ для независимых переменных $Z_1, \ldots, Z_n$ определяется, согласно принципу расширения, следующей функцией принадлежности $\mu_Z(z)$:

$$\mu_Z(z) = \bigvee_{z=f(x_1,\ldots,x_n)} \bigwedge_{i=1,\ldots,n} (\mu_{Z_i}(x_i)) \qquad (3)$$

Оценка функций от нечетких аргументов имеет ряд особенностей и ограничений [4, 11, 12]. При этом практическое применение принципа расширения на основе выражения (3) является затруднительным и неэффективным даже в случае простых арифметических операций.

Существует несколько подходов [12] к вычислению функций от нечетких аргументов:

- нечеткая арифметика, основанная непосредственно на реализации принципа расширения;
- нечеткая арифметика на основе разбиения нечёткого числа на α-срезы (стандартная нечёткая арифметика, СНА);
- L-R нечеткая арифметика;
- нечеткая арифметика на основе метода трансформации;
- несвободная (constrained) нечеткая арифметика;
- нечеткая арифметика с упорядоченными (ordered) нечёткими числами.

В данной работе рассматриваются стандартная нечёткая арифметика и метод трансформации (редуцированный и общий).

Вычисление функции $Z = f(Z_1, \ldots, Z_n)$ на основе СНА происходит в 3 этапа [4]:

1. Все исходные нечёткие числа Z_i, $i = 1, \ldots, n$, разбиваются на заданное (одинаковое) количество α-срезов в точках α_k, $[A^i_{\alpha_k}, B^i_{\alpha_k}]$, $k = 1, \ldots, M$.

2. На основе соответствующих алгоритмов с использованием α_k-срезов для каждого из нечетких чисел Z_i вычисляются α_k-срезы $[A_{\alpha_k}, B_{\alpha_k}]$ нечеткого числа $Z(M)$.

3. Полученные α-срезы $[A_{\alpha_k}, B_{\alpha_k}]$ для заданных уровней α_k, $k = 1, \ldots, M$, формируют нечеткое число $Z(M)$, представляющего собой некоторое приближение нечеткого числа $Z = f(Z_1, \ldots, Z_n)$, с кусочно-линейной функцией принадлежности $\mu_{Z(M)}(x)$.

В общем случае, с ростом числа α-срезов M и корректном применении алгоритмов оценки α_k-срезов $[A_{\alpha_k}, B_{\alpha_k}]$ нечеткого числа $Z(M)$, функция принадлежности $\mu_{Z(M)}(x)$ стремится к функции принадлежности $\mu_Z(x)$ нечеткого числа $Z = f(Z_1, \ldots, Z_n)$, вычисляемого на основе выбранного метода.

Замечание 2. В приложениях, как правило, используются базовые нечеткие величины: треугольные (TrFNs) и трапециевидные (TpFNs) нечеткие числа (FNs), а также синглетоны (действительные числа). Сумма и разность двух треугольных/трапециевидных нечетких чисел, а также их линейные комбинации $Z = c_1 Z_1 + \cdots + c_n Z_n$ (с действительными коэффициентами c_i, $i = 1, \ldots, n$) являются треугольным/трапециевидным числом. В тоже время произведение, возведение в степень и другие нелинейные функции от треугольных/трапециевидных нечетких чисел выводят выходную величину за класс базовых нечётких чисел. Для реализации линейных функций в классе базовых нечетких чисел используются стандартные процедуры для двух α-срезов: α = 0 (см. выше комментарий по поводу α = 0) и α = 1 [2-4]. Этот же подход часто используется и для приближенной оценки различных функций от нечетких аргументов.

В рамках СНА используемые в представлении функции переменные считаются независимыми. В связи с этим возникает так называемая проблема переоценки (overestimation) [4]. В качестве примера, демонстрирующего проблему переоценки, рассмотрим следующие выражения (используемые ниже переменные рассматриваются как положительные нечеткие числа):

$$Z_O = wa - wb, \quad Z_T = w(a - b) \qquad (4)$$

$$Z_O = \frac{a+b}{a}, \quad Z_T = 1 + \frac{b}{a} \qquad (5)$$

Анализ выражений (4) и (5) (здесь O и T обозначают, соответственно, переоценку/overestimation и трансформацию исходного выражения) приводит к следующему выводу: будучи эквивалентными в классе действительных чисел, полученные на основе СНА величины Z_O и Z_T в (4)/(5) (когда, например, для Z_O в (4) сначала вычисляются $A = wa$, $B = wb$, а затем $Z_O = A - B$) являются различными: $\mathrm{supp}(Z_T) \subset \mathrm{supp}(Z_O)$ (Рис. 1).

Последнее соотношение характеризует проблему переоценки, поскольку истинное значение величины Z_O в (4)/(5), полученное на основе принципа расширения, совпадает с соответствующим нечетким числом Z_T.

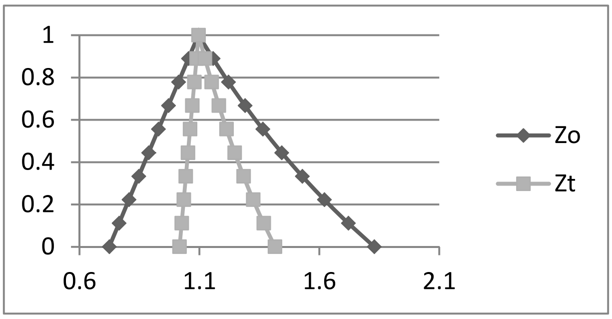

Рис. 1. Пример вычисления нечетких чисел Z_O и Z_T (5), a = (4.1, 5.7, 5.8), b = (0.1, 0.55, 1.7)

Для преодоления проблемы переоценки и вычисления истинного (близкого к истинному) результата функции от нечетких аргументов используется Метод Трансформации (МТ) [4] (несколько его вариантов), который в кратком виде может быть представлен следующим образом.

Пусть $f(x_1,\ldots, x_n)$ – действительная функция, f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, рассматривается нечёткое расширение данной функции $Z = f(Z_1,\ldots, Z_n)$. Целью метода трансформации является численная оценка нечеткого числа Z с использованием подходящего числа M α-срезов Z_α^i для каждого нечеткого числа $Z_i = \{[A_\alpha^i, B_\alpha^i]\}$.

1. Если функция $f(x_1,\ldots, x_n)$ монотонна для каждого x_i, $i = 1,\ldots, n$, в сегменте $U_i = [A_0^i, B_0^i]$, то есть (для дифференцируемых функций), $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ не меняет знак в U_i (для фиксированных значений всех других переменных в соответствующих сегментах), реализуется редуцированный метод трансформации (Reduced Transformation Method, RTM): для каждого α-среза определяются значения $Y = f(X_1,\ldots, X_n)$ для всех комбинаций $\{X_1,\ldots, X_n\}$, где X_i одна из граничных точек $Z_\alpha^i : X_i \in \{A_\alpha^i, B_\alpha^i\}$, с последующей оценкой минимального и максимального значений Y для формирования α-среза $Z_\alpha = [A_\alpha, B_\alpha]$ нечеткого числа $Z = f(Z_1,\ldots, Z_n)$.

2. Если функция $f(x_1,\ldots, x_n)$ немонотонна для каждого x_i в сегменте U_i, используется общий метод трансформации (General Transformation Method, GTM): для каждого α-среза, значения $Y = f(X_1,\ldots, X_n)$ определяются для всех комбинаций $\{X_1,\ldots, X_n\}$, где X_i одна из N_α точек в отрезке $[A_\alpha^i, B_\alpha^i]$. Для этого отрезок $[A_\alpha^i, B_\alpha^i]$ разбивается на $(N_\alpha - 1)$ интервалов точками $C_1,\ldots, C_{N_\alpha-2}$, в соответствии *со специальным алгоритмом*, то есть $X_i \in \{A_\alpha^i, C_1,\ldots, C_{N_\alpha-2}, B_\alpha^i\}$. Затем найденные минимальные и максимальное значения Y используются для формирования α-среза $Z_\alpha = [A_\alpha, B_\alpha]$. Стоит отметить, что RTM также может быть использован в этом случае (как приближение) и при соответствующем разбиении на α-срезы результат применения RTM может (практически) совпадать с результатом реализации GTM. Однако в обоих случаях реализован специальный алгоритм организации циклов обработки α-срезов для значений α от 1 до 0.

3. В общем случае, функция $f(x_1,\ldots, x_n)$ может быть монотонна для некоторых переменных x_i в сегменте U_i и немонотонной для других переменных в их сегментах $i = 1,\ldots, n$. Для таких сценариев, чтобы уменьшить количество/время вычислений, вместо GTM, может быть использован расширенный метод трансформации (Extended Transformation Method, ETM): для «монотонных переменных» x_i реализуется RTM, для остальных переменных – GTM.

3. Существующие системы вычисления функций от нечетких аргументов

Большинство аналогов системы *F-Calc*, предназначенных для вычисления функций от нечетких аргументов, позволяют выполнять базовые арифметические операции (сложение, вычитание, умножение и деление). Кроме того, вычисления, в основном, являются приближенными, либо используется стандартная нечеткая арифметика. Лишь в одной системе (*Fuzzy Webtools Website*), согласно проведенному анализу, говорится о возможности применения редуцированного метода трансформации. Ниже представлен краткий обзор существующих систем для вычисления функций от нечетких чисел.

Fuzzy Webtools Website *(https://ffem.mech.kuleuven.be/fuzzy/html/calculator.html)*. В рамках данного проекта разработан веб-сайт, позволяющий задавать нечеткие числа, вычислять функции от введенных чисел (арифметические, тригонометрические, возведение в степень, натуральный логарифм) и отображать результаты. Вычисления производятся с помощью стандартной нечеткой арифметики с 10 α-срезами по умолчанию. В системе можно задавать треугольные, трапециевидные, логарифмические и гауссовы функции принадлежности. Из недостатков стоит отметить отсутствие задания кусочно-линейных нечетких чисел в качестве исходных. Кроме того, отсутствует возможность сохранения результатов в файл для последующего использования. Несмотря на наличие в описание системы информации об редуцированном методе трансформации незарегистрированный пользователь не может его выбрать.

Calculator.LR.FNs *(https://cran.r-project.org/package=Calculator.LR.FNs)* – пакет для языка программирования R. Позволяет работать с LR нечеткими числами. Доступны лишь арифметические операции, вычисления являются приближенными. Пакет позволяет отображать нечеткие числа, но не имеет встроенных средств для сохранения чисел в файл.

Fuzzy Calculator от Нико дю Буа *(http://www.nicodubois.com/FzCalc/Fcalc.htm)* представляет собой нечеткий онлайн-калькулятор. В системе можно задать значение функций принадлежности лишь двух треугольных нечетких чисел. Вычисления производятся приближённым методом, таким образом, результатом, например, умножения двух треугольных нечетких чисел будет также треугольное число. Реализованы арифметические операции, а также квадратный корень, возведение в степень, натуральный логарифм, максимум, минимум и модуль числа. Возможность отображения и сохранения нечетких чисел отсутствуют.

Fuzzy Calculator – Useful Tool for Programming (рабочее название *zCalc*) представляет собой консольную утилиту для работы с упорядоченными нечеткими числами (ordered fuzzy numbers). В программе доступны лишь алгебраические операции над трапециевидными числами, результаты можно сохранить в текстовый либо графический файл [13].

LU-fuzzy calculator. Данная система [14] предназначена для работы над LU нечеткими числами. LU нечеткое число u задается парой $u = (u^-, u^+)$ функций u^-, u^+: $[0, 1] \to \mathbb{R}$, определяющих конечные точки α-срезов и удовлетворяющие ряду условий [8]. Вычисления производятся с помощью стандартной нечеткой арифметики и алгоритмов для реализации LU нечетких чисел в вычислениях. Доступны арифметические операции и некоторые функции (синус, косинус, возведение в степень и т.д.). В данном калькуляторе отсутствует возможность задания нечеткого числа с кусочно-линейной функцией принадлежности. Вместо методов трансформации используются специальные алгоритмы для оценки выражений с зависимыми переменными.

Fuzzy Arithmetic Calculator от Brixton Health *(http://www.brixtonhealth.com/fuzzy.html)* – веб-калькулятор, позволяющий выполнять арифметические операции над треугольными нечёткими числами с помощью приближенных вычислений.

FuzzyforExcel **–** программное обеспечение, представляет собой надстройку над Microsoft Excel и позволяет проводить арифметические операции над нечеткими числами с кусочно-линейной функцией принадлежности. Вычисления производятся с помощью стандартной нечеткой арифметики [15].

FuzzySolutions – программный пакет, позволяющий производить арифметические операции над LR-нечеткими числами с помощью стандартной нечеткой арифметики [16].

Fuzzy Calculator (надстройка над MATLAB) позволяет выполнять арифметические операции над треугольными нечеткими числами с помощью приближенных вычислений [17].

4. Система *F-Calc*

Система *F-Calc* является настольным (desktop) приложением, разработанным на языке программирования Java (Java Runtime Environment (JRE) v.1.8) и может применяться для решения широкого круга задач с использованием нечетких чисел общего вида. В приложении реализованы следующие методы вычисления функций от нечетких аргументов:

- применение стандартной нечеткой арифметики (СНА);
- приближенные вычисления на основе СНА с двумя α–срезами (α = 0 и α = 1);
- использование редуцированного и общего методов трансформации (RTM, GTM);
- приближенные вычисления с использованием двух α–срезов (α = 0 и α = 1) на основе RTM.

При работе с программой пользователь задает нечеткие числа и вычисляемое выражение/формулу, выбирает метод вычисления, указывает количество α-срезов и после этого система производит вычисление функции от заданных (входных) нечетких чисел.

Разработанная система состоит из нескольких библиотек (модулей): для работы с нечеткими числами – fuzzy-lib (содержит классы, задающие нечеткое число и позволяющие вычислять от него функции различными методами); отвечающая за визуальное представление и редактирование нечетких чисел (на основе XChart); содержащей ряд вспомогательных классов – utils-lib и предназначенной для взаимодействия двух указанных ранее библиотек с графическим интерфейсом пользователя (GUI) на основе Swing, а также хранение введенных данных, и их чтение/сохранение в файл.

Данные сохраняются в формате XML-файла, с помощью Java Architecture for XML Binding (JAXB). На Рис. 2 представлена UML-диаграмма компонентов разработанной системы *F-Calc* и ее взаимодействие с системой *F-Ranking* [18].

На Рис. 3 представлено главное окно системы, состоящее из главного меню и четырех панелей. Верхняя панель предназначена для выбора метода вычисления, задания вычисляемого выражения и количества α–срезов. На левой и правой панелях представлены введенные числа и результаты вычислений соответственно. Центральная панель содержит область для отображения вычисленного выражения, доступные для работы операции/функции, кнопку переноса вычисленного числа во введенные числа (стрелка влево) и кнопку отображения результатов вычислений и введенных нечетких чисел (Graph).

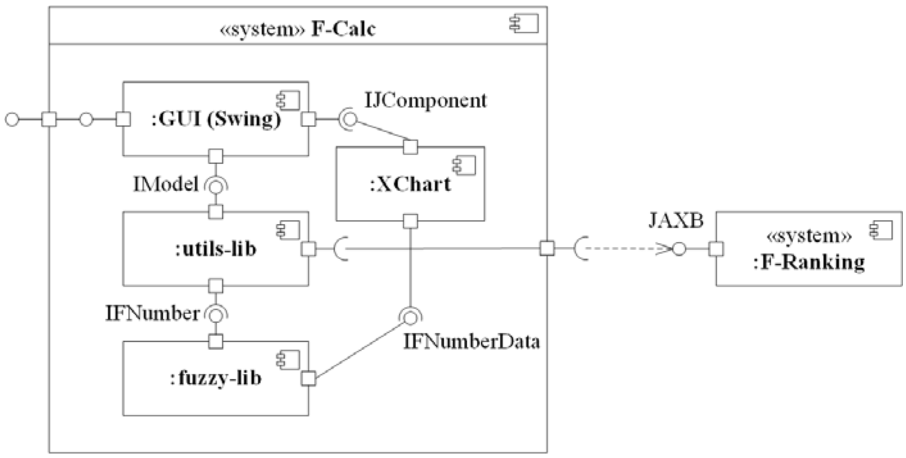

Рис. 2. UML-диаграмма компонентов разработанной системы *F-Calc* и ее взаимодействие с системой *F-Ranking*

Рис. 3. Главное окно приложения

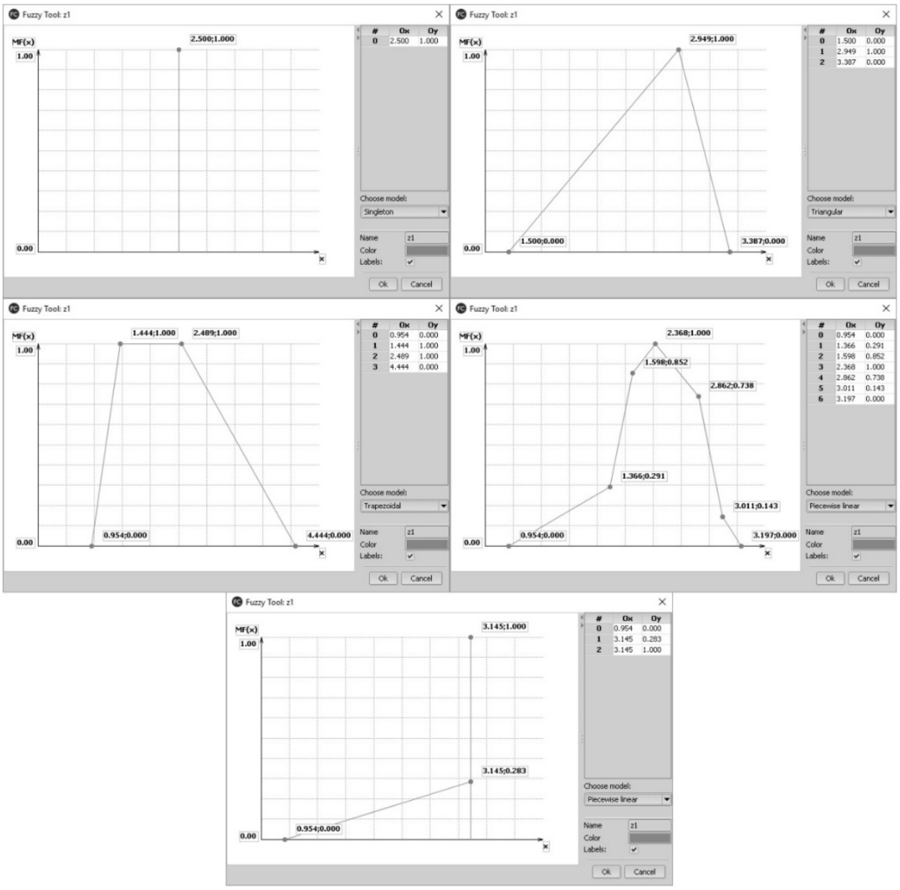

Рис. 4. Нечеткие числа, реализованные в системе *F-Calc*

Помимо арифметических операций в программе доступны следующие функции: натуральный и десятичный логарифм, экспонента, квадратный корень, возведение в степень, модуль, синус и косинус.

В программе реализованы следующие типы нечетких чисел (по функции принадлежности): синглетон, треугольные, трапециевидные и кусочно-линейные нечеткие числа, включая кусочно-линейные непрерывные сверху нечеткие числа (внизу Рис. 4).

По выбору в программе доступны русский и английский языки (переключение: File > Language). Настройка параметров программы (количество знаков после точки/зяпятой и т.д.) производится в меню File > Settings.

Кроме того, имеется возможность сохранить введенные нечеткие числа для их повторного использования в *F-Calc* либо для последующей работы в системе ранжирования нечётких чисел *F-Ranking* [18]. Для отображения введенных и вычисленных нечетких чисел используется свободная библиотека XChart (Рис. 5). С ее помощью можно экспортировать отображаемые нечеткие числа в растровые графические форматы (PNG, JPG, BMP, GIF). Также в системе используется свободная библиотека VectorGraphics2D, позволяющая экспортировать в векторные форматы (EPS, SVG, PDF).

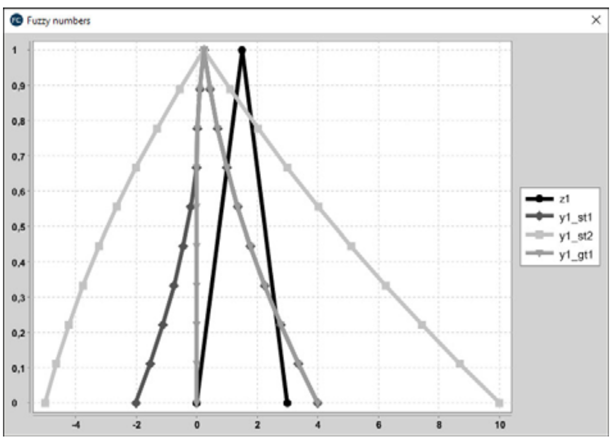

Рис. 5. Окно графического представления нечетких чисел

5. Примеры использования системы *F-Calc*

Приведем примеры, иллюстрирующие работу системы *F-Calc,* и некоторые особенности вычисления функций от нечетких аргументов с использованием методов, реализованных в системе.

Пример 1. Рассмотрим множество S_1 треугольных нечетких чисел (Рис. 6):

$$Z_1 = (1, 3, 4), Z_2 = (2, 3.2, 3.5). \quad (6)$$

С помощью системы *F-Calc* вычислим значение функции $F(Z_1, Z_2)$ с использованием стандартной нечеткой арифметики и редуцированного метода трансформации с десятью α–срезами (Рис. 7):

$$F(Z_1, Z_2) = Z_1 - Z_1 Z_2 \ . \quad (7)$$

В результате были получены нечеткие числа F_{sfa} и F_{rtm} с помощью СНА и RTM (стандартной нечеткой арифметики и редуцированного метода трансформации) соответственно. Можно видеть, что результирующие числа отличаются. В данном случае при использовании СНА имеет место переоценка (overestimation), поскольку переменная Z_1 встречается в выражении (7) два раза [4]. Стоит отметить, что если представить (7) в виде $G(Z_1, Z_2) = Z_1 \times (1 - Z_2)$ и использовать СНА, полученный результат G_{sfa} совпадет с определенным выше нечетким числом F_{rtm}.

Пример 2. Рассмотрим множество S_2 треугольных нечетких чисел (Рис. 8):

$$Z_1 = (0.1, 0.15, 1.1), Z_2 = (0.1, 0.3, 0.8). \quad (8)$$

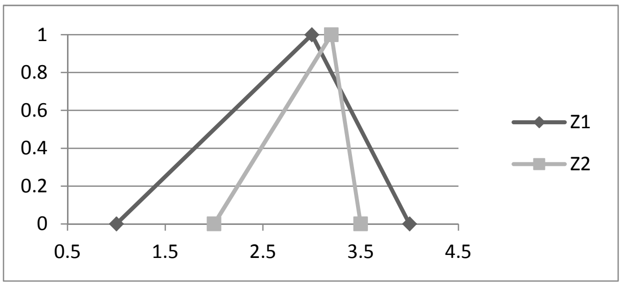

Рис. 6. Нечеткие числа Z_1, Z_2 из множества S_1 (6)

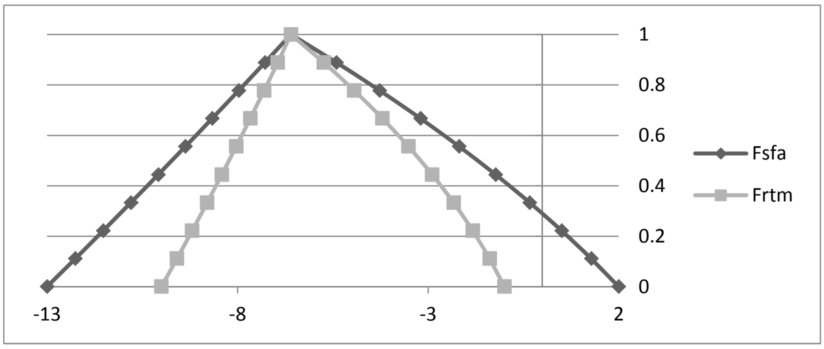

Рис. 7. Результат вычисления функции $F(Z_1, Z_2)$ с использованием СНА (F_{sfa}) и RTM (F_{rtm})

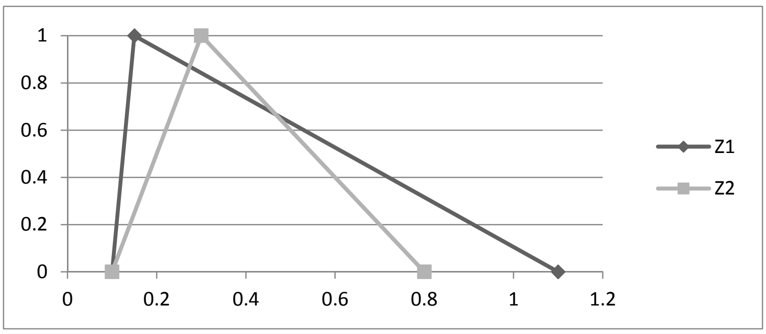

Рис. 8. Нечеткие числа Z_1, Z_2 из множества S_2 (8)

С помощью системы *F-Calc* вычислим значение функции $F(Z_1, Z_2)$ с использованием RTM и GTM с десятью α-срезами, а также для сравнения с помощью CHA (Рис. 9):

$$F(Z_1,Z_2) = Z_1^3 + 8Z_2^3 - 6Z_1Z_2 + 5 \qquad (9)$$

В результате были получены кусочно-линейные нечеткие числа F_{rtm} и F_{gtm} с помощью редуцированного и общего методов трансформации соответственно. Так как функция $F(Z_1, Z_2)$ (9) немонотонна в сегментах $supp(Z_1)$, $supp(Z_2)$ и имеет локальный минимум в точке (1, 0.5), результат, вычисленный общим методом трансформации, является более близким к истинному (полученному на основе принципа расширения) значению функции (9). Для сравнения функция была вычислена с помощью стандартной нечеткой арифметики (F_{sfa}), в данном случае, как и в Примере 1, имеет место явление переоценки.

Пример 3. Рассмотрим множество нечетких чисел S_3 (Z_1, Z_2 – трапециевидные, Z_3 – треугольное) (Рис. 10):

$$Z_1 = (0, 2.9, 3.1, 4.2),\ Z_2 = (0, 0.1, 4.5, 4.6),\ Z_3 = (0, 4.7, 4.8). \qquad (10)$$

С помощью системы *F-Calc*, с использованием приближенных вычислений были вычислены суммы чисел из множества S_3 (10) в результате было получено множество S_4 трапециевидных нечетких чисел (Рис. 11):

$$Z_1 + Z_3 = (0, 7.6, 7.8, 9),\ Z_2 + Z_3 = (0, 4.8, 9.2, 9.4). \qquad (11)$$

Затем с помощью системы *F-Ranking* [18], позволяющей ранжировать нечеткие числа и имеющей с системой *F-Calc* общий формат файлов, было произведено ранжирование нечетких чисел из множеств S_3 (10) и S_4 (11) по методу центра тяжести (Centroid Index (CI)) [19]. В результате были получены следующие значения: $CI(Z_1) = 2.414 > CI(Z_2) = 2.3$, $CI(Z_2 + Z_3) = 5.711 > CI(Z_1 + Z_3) = 5.59$. Из этого следует, что для метода ранжирования CI: $A \succeq B \nRightarrow A + C \succeq B + C$ [20, 21].

Пример 4. Рассмотрим множество треугольных нечетких чисел S_5 (Рис. 12):

$$Z_1 = (0.01, 0.1, 4.8),\ Z_2 = (2.2, 2.3, 2.4),\ Z_3 = (0.001, 0.01, 0.98). \qquad (12)$$

С помощью системы *F-Calc* и стандартной нечеткой арифметики с десятью α-срезами

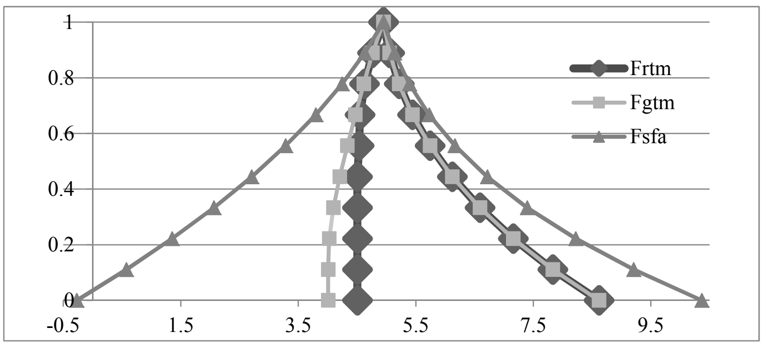

Рис. 9. Результат вычисления функции $F(Z_1, Z_2)$ с использованием RTM (F_{rtm}), GTM (F_{gtm}) и CHA (F_{sfa}) (правая граница F_{rtm} совпадает с правой границей числа F_{gtm})

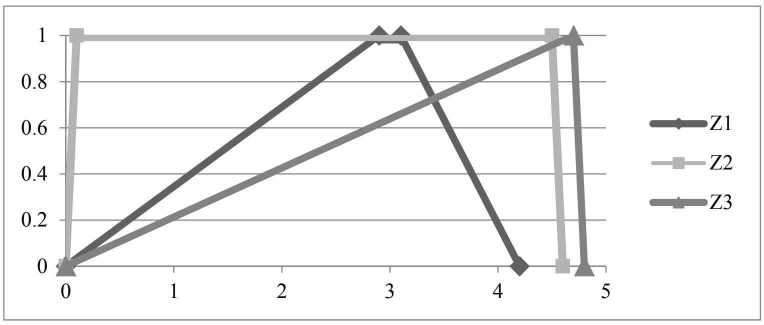

Рис. 10. Нечеткие числа Z_1, Z_2, Z_3 из множества S_3 (10)

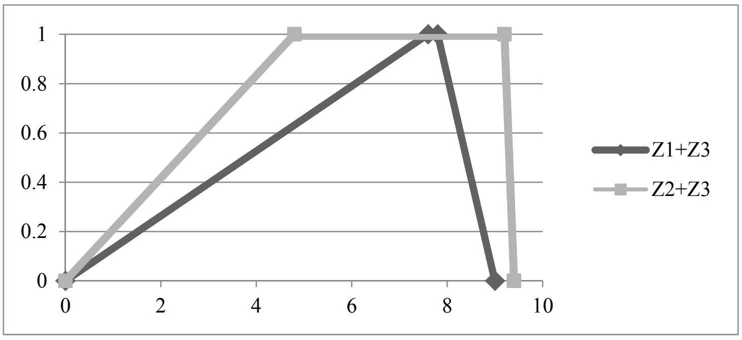

Рис. 11. Нечеткие числа $Z_1 + Z_3$, $Z_2 + Z_3$ из множества S_4 (11)

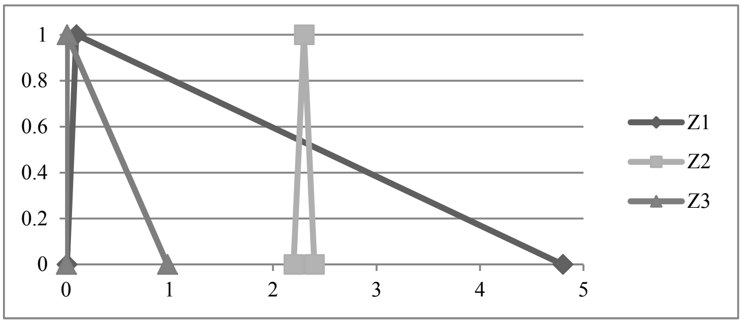

Рис. 12. Нечеткие числа Z_1, Z_2, Z_3 из множества S_5 (12)

вычислим произведения нечетких чисел из множества S_5 (12). В результате получим множество S_6 кусочно-линейных нечетких чисел (Рис. 13):

$$Z_1 \times Z_3,\ Z_2 \times Z_3. \tag{13}$$

Как и в предыдущем примере, с помощью системы *F-Rankng* нечеткие числа из множеств S_5 (12) и S_6 (13) были проранжированы по Centroid Index (CI). В результате были получены следующие результаты: $CI(Z_2) = 2.3 > CI(Z_1) = 1.637$, $CI(\mathrm{Z}_1 \times \mathrm{Z}_3) = 1.413 > CI(\mathrm{Z}_2 \times \mathrm{Z}_3) = 0.787$. Из этого следует, что для метода ранжирования CI и положительных нечетких чисел A, B и C: $A \succeq B \not\Rightarrow A \times C \succeq B \times C$.

Возможность совместного использования систем *F-Calc* и *F-Ranking* [18] позволяет решать широкий круг задач в области нечеткого моделирования и нечеткого анализа решений. В частности, нарушение аксиомы ранжирования, приведенное в Примере 4 для метода ранжирования CI, может быть продемонстрировано и для других востребованных методов ранжирования нечетких чисел, таких как метод Юаня (Метод попарного сравнения Юаня (Yuan's Pairwise Comparison Ranking Method)) и метода Ягера-2 (Метод интеграла средних значений α-срезов (Defuzzification Based Ranking Method Yager-2)) [20, 22].

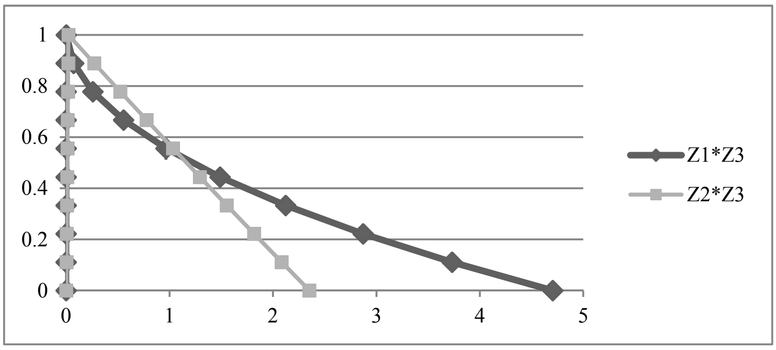

Рис. 13. Нечеткие числа $Z_1 \times Z_3$, $Z_2 \times Z_3$ из множества S_6 (13)

Заключение

В статье представлено описание оригинальной системы *F-Calc* для вычисления функций от нечетких чисел. Для полноты описания используемых в рамках системы методов и алгоритмов приведены основные определения, связанные с нечеткими числами, а также методы реализации функций от нечетких аргументов, включая принцип расширения Заде, методы стандартной нечеткой арифметики и методы трансформации. Описана структура и основные модули системы *F-Calc*, а также ее связь с оригинальной системой ранжирования нечетких чисел *F-Ranking*.

Возможности системы *F-Calc* представлены в широком спектре, начиная от простых арифметических операций заканчивая более сложными, например, вычислением немонотонных функций от нескольких аргументов (Примеры 1–2). Кроме того, наличие кусочно-линейных функций принадлежности и возможности выбора числа α-срезов позволяет выполнять вычисление с различными нечеткими числами с необходимым уровнем точности. В системе доступны на выбор нескольких методов вычисления функций от нечетких аргументов, что позволяет сравнивать полученные результаты и подбирать наиболее подходящий метод в зависимости от специфики решаемой задачи (вычисляемой функции и исходных нечетких чисел). Наличие в системе методов трансформации, как редуцированного, так и общего, выгодно отличает ее от других подобных систем. Таким образом, система *F-Calc* может найти применение в рамках университетских курсов (включающих теорию нечетких множеств, нечеткого анализа решений и искусственного интеллекта), а также при решении широкого круга прикладных и теоретических задачах в условиях неопределенности. Разработанные библиотеки оценки функций от нечетких аргументов используются также в рамках моделей нечеткого многокритериального анализа решений, входящих в нечеткое расширение системы многокритериального анализа решений *DecernsMCDA* [23].

Стоит отметить, что возможность взаимодействия с помощью файлов с системой *F-Ranking* (Примеры 3–4) еще больше расширяет свойства обеих систем. Кроме того, системы спроектированы с возможностью расширения функционала. И, наконец, система *F-Calc* является компактной и не требует установки.

Литература

1. Zadeh L.A. Fuzzy sets // Information and Control. 1965. vol. 8. no. 3. pp. 338–353.
2. Lee K.H. First Course on Fuzzy Theory and Applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg Publ. 2006. vol. 27. 341 p.
3. Dubois D., Prade H. Operations on fuzzy numbers // International Journal of systems science. 1978.vol. 9.no. 6. pp. 613-626.
4. Hanss M. Applied Fuzzy Arithmetic An Introduction with Engineering Applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.200. 261 p.
5. Kahraman C., Onar S.C., Oztaysi B. Fuzzy multicriteria decision-making: a literature review // International journal of computational intelligence systems. 2015. vol. 8. no. 4. pp. 637-666.
6. Corveleyn S., Vandewalle S. Computation of the output of a function with fuzzy inputs based on a low-rank tensor approximation // Fuzzy Sets and Systems. 2017. vol. 310. pp. 74-89.
7. Dubois D., Prade H. Fuzzy numbers: an overview // Analysis of Fuzzy Information. vol.1. Mathematics and Logics. Boca Raton FL: CRC Press. 1987. pp.3-39.
8. Stefanini L. Sorini L. Guerra M.L. Fuzzy Numbers and Fuzzy Arithmetic // Handbook of Granular Computing, John Wiley & Sons. Ltd. 2008. ch. 12. pp. 249–283.
9. Wang X., Ruan D., Kerre E. E. Mathematics of Fuzziness – Basic Issues. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2009.vol. 245. 219 p.
10. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. 3-е издание. М.: Наука, 1974, 480 с.
11. Yager R. R. On the lack of inverses in fuzzy arithmetic //Fuzzy Sets and Systems. 1980. vol. 4. no. 1. pp. 73-82.
12. Piegat A., Landowski M. Is Fuzzy Number the Right Result of Arithmetic Operations on Fuzzy Numbers? // Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017. Springer. Cham.2017. pp. 181-194.
13. Koleśnik R., Prokopowicz P., Kosiński W. Fuzzy calculator – useful tool for programming with fuzzy algebra // International Conference on Artificial Intelligence and Soft Computing. Springer. Berlin. Heidelberg. 2004. pp. 320–325.
14. Stefanini L., Sorini L. An LU-fuzzy calculator for the basic fuzzy calculus // Faculty of Economics, University of Urbino Carlo Bo. 2007. pp. 1-31.
15. Sveshnikov S., Bocharnikov V. Fuzzy for Excel, User Manual. SSRN Electronic Journal. 2010. [Электронный ресурс]. URL: https://ssrn.com/abstract=1623382 (дата обращения 24.03.2019).
16. Галлямов Е. Р., Ухоботов В. И. Компьютерная реализация операций с нечеткими числами // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2014. Т. 3. № 3. С. 97–108.
17. Wang Y., Lin X., Design and Simulation of a Novel Fuzzy Calculator Based on the Theory of Fuzzy Arithmetic // Journal of Advanced Mathematics and Applications. 2015.vol. 4. no. 2. pp. 167-176.
18. Радаев А.В., Коробов А.В., Яцало Б.И. F-Ranking: компьютерная система для ранжирования нечетких чисел // Программные продукты и системы. 2018. Т. 31. № 3. С. 605–613.

19. Allahviranloo T., Saneifard R. Defuzzification method for ranking fuzzy numbers based on center of gravity // Iranian J. of Fuzzy Systems. 2012. vol. 9. no. 6. pp. 57–67.
20. Wang X., Kerre E.E. Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I) // Fuzzy Sets and Systems. 2001. vol. 11. no. 3. pp. 375–385.
21. Wang X., Kerre E.E. Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (II) // Fuzzy Sets and Systems. 2001. vol. 118. no. 3. pp. 387–405.
22. Yatsalo B., Martínez L. Fuzzy rank acceptability analysis: A confidence measure of ranking fuzzy numbers, IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2018. vol. 26. no. 6. pp. 3579-3593.
23. Yatsalo B., Didenko V., Gritsyuk S., Sullivan T. Decerns: a Framework for Multicriteria Decision Analysis // International Journal of Computational Intelligence Systems. 2015. vol. 8. no. 3. pp. 467-489.

F-Calc: Computer System for Calculating Functions of Fuzzy Arguments

A. V.Radaev, A. V.Korobov, B. I.Yatsalo

Institute of Intelligent Cybernetic Systems, Obninsk Institute for Nuclear Power Engineering – branch of National Research Nuclear University MEPhI (OINPE NRNU MEPhI), Obninsk, Kaluga region, Russian Federation

Abstract. Calculating functions of fuzzy arguments plays an important role in a large number of applications of fuzzy sets theory. Within Fuzzy Multi-criteria Decision Analysis (Fuzzy MCDA), the problem of calculating functions of fuzzy numbers is a key one. The Zadeh's extension principle can be used for assessing functions of fuzzy arguments, however, it is ineffective even in case of the simplest arithmetic operations. In most applications, instead of direct use of the extension principle, approaches for approximate assessing functions with triangular or trapezoid fuzzy numbers are implemented. This paper presents the *F-Calc* (*Fuzzy Calculator*) system, which allows calculating functions of fuzzy arguments with the use of several methods. It can implement approximate calculations (for example, the result of the product of two fuzzy triangular numbers is a triangular fuzzy number), calculations based on standard fuzzy arithmetic with a specified number of alpha-cuts, as well as calculations with the use of Reduced and General Transformation Methods. The input values can be crisp, triangular, trapezoidal, and piecewise linear fuzzy numbers with any degree of complexity, as well as fuzzy numbers with upper semi-continuous membership functions. An overview of existing systems, which implement computing functions of fuzzy numbers, is given. The structure of the *F-Calc* system, input and output forms are presented. Examples of computing functions of fuzzy numbers with the use of different implemented methods are given. These examples stress the features of the computational methods under consideration as well as the possibilities of *F-Calc* system as a whole.

Keywords: fuzzy set, fuzzy number, standard fuzzy arithmetic, reduced transformation method, general transformation method, fuzzy system.

DOI 10.14357/20718594190409

References

1. Zadeh L.A. Fuzzy sets. // Information and Control, 1965, vol. 8, no. 3, pp. 338–353.
2. Lee K.H. First Course on Fuzzy Theory and Applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg Publ., 2006, vol. 27, 341 p.
3. Dubois D., Prade H. Operations on fuzzy numbers // International Journal of systems science, 1978, vol. 9, no. 6, pp. 613-626.
4. Hanss M. Applied Fuzzy Arithmetic An Introduction with Engineering Applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005, 261 p.
5. Kahraman C., Onar S. C., Oztaysi B. Fuzzy multicriteria decision-making: a literature review // International journal of computational intelligence systems, 2015, vol. 8, no. 4, pp. 637-666.
6. Corveleyn S., Vandewalle S. Computation of the output of a function with fuzzy inputs based on a low-rank tensor approximation // Fuzzy Sets and Systems, 2017, vol. 310, pp. 74-89
7. Dubois D., Prade H. Fuzzy numbers: an overview // Analysis of Fuzzy Information, vol.1. Mathematics and Logics. Boca Raton FL: CRC Press, 1987, pp.3-39.
8. Stefanini L. Sorini L. Guerra M.L. Fuzzy Numbers and Fuzzy Arithmetic // Handbook of Granular Computing, John Wiley & Sons, Ltd, 2008, ch. 12, pp. 249–283
9. Wang X., Ruan D., Kerre E. E. Mathematics of Fuzziness – Basic Issues. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009, vol. 245, 219 p.
10. Natanson, I. P. Teoriya funktsiy veshchestvennoy peremennoy [Theory of Functions of a Real Variable]. 3th ed. Moscow, Nauka Publ., 1974, 480 p.
11. Yager R. R. On the lack of inverses in fuzzy arithmetic

//Fuzzy Sets and Systems, 1980, vol. 4, no. 1, pp. 73-82.
12. Piegat A., Landowski M. Is Fuzzy Number the Right Result of Arithmetic Operations on Fuzzy Numbers? // Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017. – Springer, Cham, 2017. – pp. 181-194.
13. Koleśnik R., Prokopowicz P., Kosiński W. Fuzzy calculator – useful tool for programming with fuzzy algebra // International Conference on Artificial Intelligence and Soft Computing. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2004. – pp. 320–325.
14. Stefanini L., Sorini L. An LU-fuzzy calculator for the basic fuzzy calculus // Faculty of Economics, University of Urbino Carlo Bo., 2007, pp. 1-31.
15. Sveshnikov S., Bocharnikov V. Fuzzy for Excel, User Manual. SSRN Electronic Journal. 2010. Available at: https://ssrn.com/abstract=1623382 (accessed: 24.03.2019)
16. Gallyamov E. R., Ukhobotov V. I. Computer implementation of operation with fuzzy numbers. Bulletin of South Ural State University. Series Computation Mathematics and Software Engineering, 2014, vol. 3, no. 3, pp. 97–108.
17. Wang Y., Lin X., Design and Simulation of a Novel Fuzzy Calculator Based on the Theory of Fuzzy Arithmetic // Journal of Advanced Mathematics and Applications, 2015, vol. 4, no. 2, pp. 167-176.
18. Radaev A.V., Korobov A.V., Yatsalo B. I. F-Ranking: a computer system for ranking fuzzy numbers. Software & Systems. 2018, vol. 31, no. 3, pp. 605–613.
19. Allahviranloo T., Saneifard R. Defuzzification method for ranking fuzzy numbers based on center of gravity // Iranian J. of Fuzzy Systems. 2012, vol. 9, no. 6, pp. 57–67.
20. Wang X., Kerre E.E. Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I) // Fuzzy Sets and Systems. 2001, vol. 118, no. 3, pp. 375–385.
21. Wang X., Kerre E.E. Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (II) // Fuzzy Sets and Systems. 2001, vol. 118, no. 3, pp. 387–405.
22. Yatsalo B., Martínez L. Fuzzy rank acceptability analysis: A confidence measure of ranking fuzzy numbers, IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2018, vol. 26, no. 6, pp. 3579-3593.
23. Yatsalo B., Didenko V., Gritsyuk S., Sullivan T. Decerns: a Framework for Multicriteria Decision Analysis // International Journal of Computational Intelligence Systems, 2015, vol. 8, no. 3, pp. 467-489.