Критерий существования непрерывного размещения двусимвольных слов в матрице размера L×(2k+1)

Д.М. Алекберли

Аннотация. Рассмотрен частный случай задачи составления учебного расписания, который сводится к нахождению условий размещения двусимвольных слов (далее 2-слов) в строках матрицы M (L×(2k+1)), $k\in N$ так, чтобы символы в строках стояли рядом, а в столбцах матрицы все символы были попарно различны. Найден критерий непрерывного размещения двусимвольных слов в матрице M , который позволяет значительно упростить процесс составления расписания, где требуется обеспечить отсутствие окон в работе преподавателей.

Ключевые слова: непрерывное расписание, оптимизация расписания, NP-полные задачи, задачи, решаемые за полиномиальное время, критерий существования непрерывного расписания.

Введение

Приведем постановку задачи составления учебного расписания [1] в редакции работы [2].

Условие. Заданы: множество $T=\{1,2,\dots,m\}$ – «рабочих часов», множество $B=\{1,2,\dots,l\}$ – «преподавателей», множество $C=\{1,2,\dots,n\}$ – «учебных дисциплин». Для каждого $\beta\in B$ задано подмножество $\delta(\beta)\subseteq T$, называемое «допустимыми часами для преподавателя β».

Для каждой дисциплины $c\in C$ задано подмножество $\delta(c)\subseteq T$, называемое «допустимыми часами для дисциплины c» и для каждой пары $(\beta,c)\in B\times C$ задано число $\tau(\beta,c)\in Z_0^+$, называемое «требуемой нагрузкой».

Вопрос. Существует ли учебное расписание, обслуживающее все дисциплины? Т.е., существует ли функция $f:B\times C\times T\to\{0,1\}$ (где $f(\beta,c,t)=1$ означает, что преподаватель «β» проводит дисциплину «c» в момент времени «t»), удовлетворяющая условиям:

1. $f(\beta,c,t)=1$ тогда и только тогда, когда $t\in\delta(\beta)\bigcap\delta(c)$;
2. для каждого $t\in T$ и $\beta\in B$ существует не более одного $c\in C$ такого, что $f(\beta,c,t)=1$;
3. для каждого $t\in T$ и $c\in C$ существует не более одного $\beta\in B$ такого, что $f(\beta,c,t)=1$;
4. для каждой пары $(\beta,c)\in B\times C$ существует ровно $\tau(\beta,c)$ значений t, для которых $f(\beta,c,t)=1$?

В такой постановке задача NP-полна. Она остается NP-полной, даже если $|T|=3$, $\delta(c)=T$ для $c\in C$ и все $\tau(\beta,c)\in\{0,1\}$. Задача допускает решение за полиномиальное время, если $|\delta(\beta)|\le 2$ для всех $\beta\in B$, или если $\delta(\beta)=\delta(c)=T$ для всех $\beta\in B$ и $c\in C$.

В статье рассматривается задача составления расписания в предположении, что $|T|=2k+1$, $k\in N$,

$$\sum_{c\in C}\tau(\beta,c)=2,\ \delta(c)=T, \qquad (1)$$

и вместо допустимых часов для каждого преподавателя задано условие непрерывности проведения занятий:

$f(\beta,c_1,t)=1 \Rightarrow$ либо $f(\beta,c_2,t-1)=1$,

либо $f(\beta,c_2,t+1)=1$, (2)

где c_1 и c_2 не обязательно различны.

Задачи оптимизации расписания рассматривались в ряде работ [1-3]. Задача существования непрерывного расписания при выполнении условий (1), (2) и $|T|=2n$, $n\in N$, рассматривалась в работах [4] и [5]. В работе [6] получены условия существования непрерывного расписания длительностью 5 и 7 часов. В работе [7] было доказано, что всякое непрерывное расписание, для которого $|T|=2k+1$, $k\in N$ может быть приведено к разреженному виду в любом столбце с нечетным номером (определение «разреженности» и формулировка соответствующей теоремы приводятся ниже). В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия существования непрерывного расписания при выполнении условий (1.1) и (1.2) для $|T|=2k+1$, $k\in N$.

1. Определения и обозначения

Определение 1. Набор попарно различных символов *a*, *b*, *c*,… назовем алфавитом *A*. Под *2-словом* $\omega=(a:b)$ будем понимать неупорядоченный набор из двух (необязательно различных) символов $a, b\in A$.

Пусть *W* – набор 2-слов, тогда:
количество вхождений 2-слова ω в набор *W* будем обозначать –

$$rep_W\omega, \quad (1.1)$$

количество вхождений символа *a* в слово ω –

$$rep_\omega a, \quad (1.2)$$

количество вхождений символа *a* в набор *W*–

$$rep_W a=\sum_{\omega\in W} rep_\omega a. \quad (1.3)$$

Определение 2. Размещение набора 2-слов – *W* в матрице *M* будем называть *непрерывным размещением*, если:

1) символы каждого 2-слова $\omega\in W$ занимают соседние позиции какой-либо строки,

2) внутри каждого столбца матрицы *M* символы алфавита *A* попарно различны.

Определение 3 [8]. Пусть *M* - непустое конечное множество, а $S=\{S_1, \ldots, S_r\}$ – семейство необязательно различных непустых подмножеств множества *M*. Тогда трансверсаль (или система различных представителей) семейства *S* есть множество *r* различных элементов множества *M*, по одному из каждого подмножества S_i. Ее обозначение – *trv*(*S*).

Введем следующие обозначения:

$$A(W)=\{a\in A \mid \exists\omega\in W, a\in\omega\}; \quad (1.4)$$

$$A_j(W)=\{a\in A(W) \mid rep_W a=j\}, \text{ где } j=1..n, \quad (1.5)$$

тогда

$$A(W)=\bigcup_1^n A_j(W); \quad (1.6)$$

M[*i*] – множество символов алфавита *A*, размещенных в *i*-ом столбце матрицы *M*;

M[*j*:*j*+1] – набор всех 2-слов, символы каждого из которых размещены в позициях *j* и *j*+1 какой-либо строки матрицы *M*;

запись: $a=M(i,j)$ означает, что символ *a* расположен в *i*-ой строке и *j*-ом столбце матрицы *M*.

Определение 4 (*k*-разреженность). Будем говорить, что непрерывное размещение набора 2-слов *W* в матрице *M* (*m*×*n*) имеет *k-разреженность,* если в столбце с номером *k* ($1\le k\le n$) все символы имеют кратность *n*, т.е. $M[k]=A_n(W)$.

Определение 5 (*s*-разбиение). Назовем «*s-разбиением*» набора 2-слов *W* ($rep_W a\le 2k+1, \forall a\in A(W), k\in N$) на *k* – поднаборов W_i, если эти поднаборы удовлетворяют условиям:

A) $rep_{W_i} a\le 3$, $i=1..k$, $\forall a\in A(W_i)$;

B) для каждого W_i (*i*=1..*k*) существует трансверсаль;

C) если для какого-либо поднабора W_i символ $a\in A(W)$ удовлетворяет условию: $rep_{W_i} a=3$, то $rep_{W_i} a - rep_{W_j} a=1$, $i\ne j$, $1\le i,j\le k$.

*Замечание 1***.** Условие C Определения 5 можно перефразировать следующим образом: если для символа $a\in A(W)$ в каком-либо поднаборе W_i *s*-разбиения набора 2-слов *W* $rep_{W_i} a=3$, то $rep_{W_j} a=2$ для $j\ne i$, $1\le i,j\le k$.

Отсюда следует важный вывод:

Если символ $a\in A(W)$ в *s*-разбиении набора 2-слов *W* удовлетворяет условию C, тогда на всем наборе *W* выполнится условие:

$$rep_W a=2k+1.$$

Определение 6. Если набор 2-слов W непрерывно размещен в матрице M ($L\times(2k+1)$), то поднаборы 2-слов, определенные равенствами:

$W_i = M[2i-1:2i] + M[2i:2i+1]$, $i=1..k$,

будем называть *элементарными поднаборами*, а всю совокупность этих поднаборов назовем *элементарным разбиением набора W*.

Целью данной статьи является доказательство критерия существования непрерывного размещения набора 2-слов W, удовлетворяющего условию

$$rep_W a \le 2k+1,\ \forall a \in A(W),$$

в матрице M ($L\times(2k+1)$).

Приведем ряд вспомогательных утверждений, доказанных ранее в [7].

2. Вспомогательные утверждения

Теорема 1. Если набор 2-слов W, удовлетворяющий условию

$$rep_W a \le 3,\ \forall a \in A(W), \tag{2.1}$$

имеет трансверсаль - $trv(W)$, то для этого набора существует такая трансверсаль – $trv^*(W)$, для которой выполняется условие:

$$A_2(W) \cup A_3(W) \subset trv^*(W). \tag{2.2}$$

Такую трансверсаль назовем *полной*.

Следствие 1.1. Для существования непрерывного размещения в матрице M ($L\times3$) набора 2-слов W, удовлетворяющего условию (2.1), необходимо и достаточно, чтобы для набора W существовала трансверсаль.

Следствие 1.2. Если для набора 2-слов W, удовлетворяющего условию (2.1), существует непрерывное размещение в матрице M ($L\times3$), тогда существуют 1-разреженный и 3-разреженный виды непрерывного размещения.

Следствие 1.3. Если два набора 2-слов W_1 и W_2 над алфавитом A удовлетворяют условиям:

$$rep_{W_i} a \le 3,\ \forall a \in A(W_i),\ i = 1,2; \tag{2.3}$$

$$\text{существует } trv(W_i),\ i = 1,2, \tag{2.4}$$

$$rep_W a = rep_{W_1} a + rep_{W_2} a \le 5, \tag{2.5}$$

здесь $W = W_1 + W_2$, где сумма понимается как сумма мультимножеств, т.е.

$$rep_W \omega = rep_{W_1} \omega + rep_{W_2} \omega,\ \ \forall \omega \in W_1 + W_2,$$

тогда набор W допускает непрерывное размещение в матрице с пятью столбцами.

Доказательство следующей теоремы, которое представлено в работе [7] в сокращенном виде, в силу его важности приведем полностью.

Теорема 2.

Всякое непрерывное размещение набора 2-слов W в матрице M с пятью столбцами допускает 3-разреженность.

Доказательство.

Пусть набор W непрерывно размещен в матрице M. Тогда из условия бесповторности размещения символов в столбцах имеем

$$rep_W a \le 5,\ \forall a \in A(W).$$

Покажем, что всякий символ третьего столбца, чья кратность не превосходит четырех, может быть перемещен в своей строке таким образом, чтобы он отсутствовал в M[3]. При этом M[3] не пополнится новыми элементами и не нарушится непрерывное размещение набора W.

Пусть символ $a_1 \in M[3] \setminus A_5(W)$, тогда соответствующее этому символу слово $\omega_0 = (a_1 : a_2)$ будет располагаться либо в M[2:3], либо в M[3:4]. Не умаляя общности, можем считать, что $\omega_0 \in M[2:3]$, т.к. второй случай сводится к первому простым изменением нумерации столбцов на противоположную.

Так как $rep_W a_1 \le 4$ и $a_1 \in M[3]$, то a_1 будет отсутствовать, по крайней мере, в одном из четырех столбцов: либо в M[1], либо в M[2], либо в M[4], либо в M[5]. Рассмотрим эти случаи, предполагая, что

$$rep_\omega a_1 \le 1,\ \forall \omega \in W. \tag{2.6}$$

1. $a_1 \notin M[1]$.

Перемещаем символ a_1 из $M(i,3)$ в $M(i,1)$ и теорема доказана.

2. $a_1 \in M[1]$, $a_1 \notin M[2]$ и $a_2 \notin M[1]$.

Перемещаем слово ω_0 влево так, чтобы $a_2 = M(i,1)$, $a_1 = M(i,2)$. Теорема доказана.

3. $a_1 \in M[1]$, $a_1 \notin M[2]$ и $a_2 \in M[1]$.

В наборе M[1:2] построим последовательность слов по правилу:

$$(a_2 : a_3) \to (a_3 : a_4) \to \ldots \to (a_{p-1} : a_p),$$

здесь первые символы слов стоят в первом столбце, а вторые символы - во втором (Рис. 1). Построение последовательности завершится только тогда, когда окажется, что $a_p \notin M[1]$. Заметим, что, во-первых, в силу условия (2.6) $a_2 \neq a_1$; во-вторых, все слова последовательности выбираются из набора M[1:2] и символы a_i (i=3,…,p) имеются в M[2]; в-третьих, символ a_2 имеется в M[2], но он стоит в слове $\omega_0 = (a_2 : a_1)$ из набора M[2:3]. А так как в столбцах бесповторное размещение символов, то $a_i \neq a_2$, i=3,…,p.

Теперь в каждом слове этой последовательности изменим порядок записи символов на противоположный, т.е. символ, стоящий в позиции $M(i,2)$ помещаем в позицию $M(i,1)$ и наоборот. В результате $a_2 \notin M[1]$ и $a_1 \notin M[2]$ (Рис. 2). Поместим слово ω_0 в M[1:2] так, чтобы $a_2 = M(i,1)$, а $a_1 = M(i,2)$ (Рис. 3). Теорема доказана.

	a_2	a_1		
a_2	a_3			
a_3	a_4			
a_4	a_5			
…	…			
a_{p-1}	a_p			

Рис. 1

	a_2	a_1		
a_3	a_2			
a_4	a_3			
a_5	a_4			
…	…			
a_p	a_{p-1}			

Рис. 2

a_2	a_1			
a_3	a_2			
a_4	a_3			
a_5	a_4			
…	…			
a_p	a_{p-1}			

Рис. 3

4. $a_1 \in M[1]$, $a_1 \in M[2]$, но $a_1 \notin M[4]$.

В этом случае строим последовательность слов: $\alpha_1 \to \beta_1 \to \alpha_2 \to \beta_2 \to \ldots$ ($\alpha_i \in M[1:2]$, $\beta_i \in M[4:5]$) по следующему правилу: находим в M[1] символ a_1. Ему соответствует слово $\alpha_1 = (a_1 : a_3)$. Символ a_3 ищем в M[5], ему соответствует слово $\beta_1 = (a_4 : a_3)$. Символ a_4 ищем в M[1], ему соответствует слово $\alpha_2 = (a_4 : a_5)$. Символ a_5 ищем в M[5] и т.д. (Рис. 4). Эта последовательность строится, пока она продолжима. Если ее последним словом окажется $\alpha = (b : c)$, то это означает, что $c \notin M[5]$. Если последнее слово будет $\beta = (f : g)$, это значит, что $f \notin M[1]$ и $f \neq a_1$, т.к. $f \in M[4]$. Слова последовательности из M[1:2] запишем в M[4:5], а из M[4:5] в M[1:2] с сохранением порядка следования символов в словах (Рис. 5). В результате, $a_1 \notin M[1]$. Теперь слово $\omega_0 = (a_2 : a_1)$ разместим в M[1:2] (Рис. 6) так, чтобы $a_1 = M(i,1)$, , $a_2 = M(i,2)$ и теорема доказана.

5. $a_1 \in M[1]$, $a_1 \in M[2]$, но $a_1 \notin M[5]$.

Строим последовательность слов

$$\alpha_1 \to \beta_1 \to \alpha_2 \to \beta_2 \to \ldots \ (\alpha_i \in M[1:2], \ \beta_i \in M[3:4] + M[4:5]) \qquad (2.7)$$

по правилу: находим a_1 в M[1], ему соответствует слово $\alpha_1 = (a_1 : a_3)$. Из (3.6) следует, что $a_3 \neq a_1$. Находим a_3 в M[4], ему соответствует слово $\beta_1 = (a_3 : a_4)$. Если $\beta_1 \in M[4:5]$, то $a_4 \neq a_1$, т.к. $a_1 \notin M[5]$. Находим a_4 в M[1], ему соответствует слово $\alpha_2 = (a_4 : a_5)$. Ищем a_5 в M[4] и т.д. Последовательность (2.7) завершается в двух случаях:

а) очередное $\beta_s = (b : c)$ (в том числе и при s=1) оказалось (Рис. 7) из M[3:4]:

$$\alpha_1 \to \beta_1 \to \alpha_2 \to \beta_2 \to \alpha_3 \to \ldots \to \alpha_s \to \beta_s,$$

$\beta_s \in M[3:4]$, $\beta_i \in M[4:5]$, i=1,…,s-1.

В этом случае все слова α_i (i=1,…,s-1) запишем в M[4:5] так, чтобы их символы из M[1] попали в M[5], а из M[2], соответственно, в M[4]. Все слова β_i (i=1,…,s-1) поместим в M[1:2] так, чтобы символы слов из M[5] попали в M[1], а из

M[4] – в M[2]. Слово β_s из M[3:4] поместим в M[2:3] так, чтобы (Рис. 8) символ из M[4] оказался в M[2], а символ из M[3] остался на месте.

После этой перестановки символ a_1 будет отсутствовать в M[1], поэтому мы перенесем слово ω_0 (Рис. 9) из M[2:3] в M[1:2] так, чтобы $a_1 = M(i,1)$. Теорема и в этом случае доказана.

	a_2	a_1		
a_1	a_3			
			a_4	a_3
a_4	a_5			
			a_6	a_5
a_6	a_7			
…	…		a_8	a_7
			…	…

Рис. 4

	a_2	a_1		
a_4	a_3			
a_6	a_5			
a_8	a_7			
…	…		a_1	a_3
			a_4	a_5
			a_6	a_7
			…	…

Рис. 5

a_1	a_2			
a_4	a_3			
a_6	a_5			
a_8	a_7			
…	…		a_1	a_3
			a_4	a_5
			a_6	a_7
			…	…

Рис. 6

	a_2	a_1		
a_1	a_3			
			a_3	a_4
a_4	a_5			
			a_5	a_6
a_6	a_7		…	…
…	…			
		c	b	

Рис. 7

	a_2	a_1		
a_4	a_3			
a_6	a_5			
…	…		a_3	a_1
			a_5	a_4
			a_7	a_6
			…	…
	b	c		

Рис. 8

a_1	a_2			
a_4	a_3			
a_6	a_5			
…	…		a_3	a_1
			a_5	a_4
			a_7	a_6
			…	…
	b	c		

Рис. 9

b) Последовательность (2.7), в которой все $\beta_i \in M[4:5]$, окажется непродолжима, т.е. либо в M[1], либо в M[4] не найдется соответствующего символа, что неизбежно произойдет в силу конечности набора слов W и бесповторности символов в столбцах. В этом случае слова α_i перенесем в M[4:5], а β_i - в M[1:2] с изменением порядка следования символов в словах на противоположный, как это сделано в случае «а». Теорема доказана.

6. До сих пор мы предполагали, что символ a_1 может встречаться в любом слове не более одного раза (условие (2.6)). Теперь рассмотрим случай, когда

$$a_1 \in M[3]\,;\ rep_{\omega} a_1 \le 2\,,\qquad \forall \omega \in W\,,\ rep_W a_1 \le 4 \tag{2.8}$$

и хотя бы одно слово из W имеет вид $(a_1 : a_1)$. Ясно, что таких слов может быть в W не более двух.

Если в W имеется два слова: $u_1 = (a_1 : a_1)$ и $u_2 = (a_1 : a_1)$, то как-бы они ни были записаны в матрице M, их всегда можно расположить так, что $u_1 \in M[1:2]$, $u_2 \in M[4:5]$ и a_1 будет удален из M[3].

Пусть в W имеется одно слово $u = (a_1 : a_1)$.

a) Если это слово расположено в M[2:3], то для него в полной мере применимы шаги, предпринятые в пунктах 1, 4 и 5, т.е. символ a_1 будет удален из M[3].

b) Пусть $u = (a_1 : a_1) \in M[1:2]$, $\omega_0 = (a_2 : a_1) \in M[2:3]$, $a_1 \notin M[4]$.

Рассмотрим непродолжимую последовательность слов:

$$\beta_1 \to \alpha_1 \to \beta_2 \to \alpha_2 \to \dots,\ \alpha_i \in M[1:2]\,,\qquad \beta_i \in M[4:5] \tag{2.9}$$

Она строится следующим образом. Находим символ a_1 в M[5], ему соответствует слово $\beta_1 = (a_3 : a_1)$. Находим символ a_3 в M[1], ему соответствует слово $\alpha_1 = (a_3 : a_4)$. Символ a_4 находим в M[5], ему соответствует слово $\beta_2 = (a_5 : a_4)$. Символ a_5 находим в M[1] (Рис. 10) и т.д. Теперь слова из (2.9) поменяем местами, т.е. β_i поместим в M[1:2], а α_i - в M[4:5] так (Рис. 11), чтобы символы стоявшие в M[4] были помещены в M[1] и наоборот. После этой перестановки слово $(a_1 : a_1) \in M[1:2]$ поместим в M[4:5], а слово $\omega_0 = (a_2 : a_1)$ из M[2:3] поместим в M[1:2] так, чтобы $a_1 = M(i,1)$, а $a_2 = M(i,2)$ (Рис. 12). Теорема доказана и в этом случае.

c) Пусть $u = (a_1 : a_1) \in M[1:2]$, $\omega_1 = (a_2 : a_1) \in M[2:3]$ и $a_1 \notin M[5]$. Тогда построим последовательность слов (Рис. 13):

$$\beta_1 \to \alpha_1 \to \beta_2 \to \alpha_2 \to \beta_3 \to \dots$$

$$(\alpha_i \in M[1:2]\,,\ \beta_i \in M[3:4] + M[4:5]) \tag{2.10}$$

	a_2	a_1		
a_1	a_1			
			a_3	a_1
a_3	a_4			
			a_5	a_4
a_5	a_6		...	...
...	...			

Рис. 10

	a_2	a_1		
a_1	a_1			
a_3	a_1			
a_5	a_4			
...	...		a_3	a_4
			a_5	a_6
			...	...

Рис. 11

a_1	a_2			
			a_1	a_1
a_3	a_1			
a_5	a_4			
...	...		a_3	a_4
			a_5	a_6
			...	...

Рис. 12

По правилу: находим символ a_1 в M[4], ему соответствует слово $\beta_1 = (a_1 : a_3)$ символ a_3 находим в M[1], ему соответствует слово $(a_3 : a_4)$. Символ a_4 находим в M[4], ему соответствует слово $(a_4 : a_5)$ и т.д. Построение последовательности завершается в двух случаях:

1. Как только встретилось слово $\beta_s = (b : c)$ из M[3:4]. В этом случае последовательность имеет вид

$$\beta_1 \to \alpha_1 \to \beta_2 \to \alpha_2 \to \dots \to \alpha_{s-1} \to \beta_s$$

$$\alpha_i \in M[1:2]\,,\ \beta_i \in M[4:5]\,,\ i=1..s\text{-}1,$$

$$\beta_s \in M[3:4]\,.$$

	a_2	a_1		
a_1	a_1			
			a_1	a_3
a_3	a_4			
			a_4	a_5
a_5	a_6		…	…
…	…			
		c	b	

Рис. 13

	a_2	a_1		
a_1	a_1			
a_3	a_1			
a_5	a_4			
…	…		a_4	a_3
			a_6	a_5
			…	…
	b	c		

Рис. 14

a_1	a_2			
			a_1	a_1
a_3	a_1			
a_5	a_4			
…	…		a_4	a_3
			a_6	a_5
			…	…
	b	c		

Рис. 15

Слово β_s из M[3:4] поместим в M[2:3] так, чтобы символ из M[4] оказался в M[2], а символ из M[3] остался на месте. Все слова α_i (i=1..s-1) запишем в M[4:5] так, чтобы их символы из M[1] попали в M[5], а из M[2], соответственно, в M[4]. Все β_i (i=1..s-1) запишем в M[1:2] так, чтобы символы из M[5] попали в M[1] (Рис. 14).

2. Если в последовательности все $\beta_i \in M[4:5]$ и последовательность непродолжима, т.е. очередной символ будет отсутствовать в соответствующем столбце. В этом случае слова α_i перенесем в M[4:5], а β_i - в M[1:2] с изменением порядка следования символов в словах на противоположный, как показано на Рис. 14 без учета слова $(b:c)$.

В результате, символ a_1 будет отсутствовать как в M[5], так и в M[4], поэтому слово $(a_1:a_1)=u$ из $M[1:2]$ перенесем в M[4:5].

Теперь $a_1 \in M[2]$ и $a_1 \in M[3]$, но $a_1 \notin M[1]$, поэтому слово $\omega_1=(a_2:a_1)\in M[3:4]$ запишем в M[1:2] так, чтобы $a_1 = M(i,1)$ (Рис. 15).

d) Если $u=(a_1:a_1)\in M[4:5]$, то либо $a_1 \notin M[1]$, либо $a_1 \notin M[2]$, что уже исследовалось в пунктах 1,2,3. Теорема доказана.

Следствие 2.1.

Всякое непрерывное размещение набора 2-слов в пятистолбцовой матрице допускает k-разреженность, k = 1, 3, 5.

Следствие 2.2.

Если набор 2-слов W допускает непрерывное размещение в матрице с пятью столбцами, то для него существует s-разбиение на два поднабора.

Теорема 3.

Всякое непрерывное размещение набора 2-слов W в матрице с 2p+1 ($p \in N$) столбцом допускает разреженность в любом столбце с нечетным номером.

3. Основное утверждение

Теорема 4. Для того чтобы набор 2-слов W, удовлетворяющий условию

$$rep_W a \le 2k+1,\ a \in A(W),\ k \in N, \quad (3.1)$$

допускал непрерывное размещение в матрице M с 2k+1 столбцом, необходимо и достаточно, чтобы для набора W существовало s-разбиение на k поднаборов.

Доказательство.

Необходимость. Пусть набор W непрерывно размещен в матрице M. Покажем, что в этом случае всегда можно получить такое элементарное разбиение набора W, которое будет s-разбиением набора W. Для доказательства воспользуемся методом индукции. Для k = 1 утверждение очевидно, для k = 2 доказательство получено в Следствии 2.2. Предположим, что утверждение верно при k = p-1. Покажем, что тогда оно верно и при k = p. Переставим в матрице M строки таким образом, чтобы поднабор слов W_1 = M[1:2] + M[2:3] расположился в первых строках матрицы. Затем, поднабор $W_2 = M[3:4] + M[4:5]$ и т.д. Ясно, что перестановка строк не нарушает непрерывности размещения набора W. Так как размещение слов непрерывное, то каждый элементарный поднабор W_i, i=1..p, (Следствие 1.1) удовлетворяет условиям А и В определения s-разбиения. Преобразуем элементарные поднаборы таким образом, чтобы удовлетворялось и условие С. Рассмотрим поднабор $\Omega = W_1 + ... + W_{p-1}$, он непрерывно размещен в верхней части матрицы M и в столбцах с номерами: 1..2p-1. По нашему предположению, его элементарное разбиение $\{W_i\}$ (i=1..p-1) можно преобразовать так, чтобы оно являлось s-разбиением. Обозначим такое разбиение: $\{\Omega_i\}$, i=1..p-1. Тогда, учитывая условие (3.1) и Замечание 1, можем сделать следующие выводы:

1. если для какого-либо символа $a \in A(W)$ на некотором Ω_i ($1 \le i \le p-1$) выполняется условие: $rep_{\Omega_i} a = 3$, то $rep_{\Omega} a = 2p - 1$ и, следовательно, из условия (3.1) $rep_{W_p} a = rep_W a - rep_{\Omega} a \le 2$;

2. если для какого-либо символа $b \in A(W)$ на W_p выполняется условие: $rep_{W_p} b = 3$, то $rep_{\Omega} b \le (2p+1) - 3 = 2p - 2$, т.е. $rep_{\Omega_i} b \le 2$, i=1..p-1.

Следовательно, набор W_p вместе с любым набором Ω_i (i=1..p-1) удовлетворяет условиям Следствия 1.3. Совокупность поднаборов Ω_1, $\Omega_2,\ldots,\Omega_{p-1}$, W_p образует разбиение набора W, которое, вообще говоря, не является s-разбиением для W, т.к. может нарушаться условие С. То есть, возможно, найдется пара поднаборов (условно назовем их G_1 и G_2) и символ $x \in A(W)$, для которых будет выполняться условие: $rep_{G_1} x = 3$, но $rep_{G_2} x \le 1$. Пусть такая пара поднаборов существует. Тогда разместим их непрерывно во вспомогательной матрице с пятью столбцами (это возможно по Следствию 1.3), приведем это непрерывное размещение к 3-разреженному виду (Теорема 2) и разобьем на два элементарных поднабора G^*_1 и G^*_2, они по Следствию 2.2 будут удовлетворять условиям А, В и С. Повторяя этот процесс конечное число раз, мы получим из разбиения: Ω_1, $\Omega_2,\ldots,\Omega_{p-1}$, W_p набора W его s-разбиение. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для набора W, удовлетворяющего условию (3.1), существует s-разбиение на k поднаборов: $W_1,\ldots,W_k$. Покажем, что в этом случае набор W может быть непрерывно размещен в матрице с 2k+1 столбцом. Воспользуемся методом индукции. Для k=1 утверждение очевидно, для k=2 утверждение доказано в Следствии 1.3. Предположим, что утверждение верно при k=p-1. Покажем, что оно верно и при k=p. Действительно, пусть s-разбиение набора W имеет вид: $W_1,\ldots,W_p$. В матрице M с 2p+1 столбцом, в ее первых 2p-1 столбцах, разместим непрерывно (p-1) поднабор: $W_1,\ldots,W_{p-1}$ (по нашему предположению это возможно). Совокупность этих (p-1) наборов обозначим Ω. Затем, воспользовавшись Теоремой 3, приведем это непрерывное размещение к (2p-1) - разреженному виду, т.е. к такому виду, когда в столбце с номером (2p-1) будут находиться только символы, для которых: $rep_{\Omega} a = 2p - 1$. Ясно, что тогда в W_p для этих символов будет: $rep_{W_p} a = 2$, т.к. это s-разбиение. Теперь набор W_p размещаем непрерывно (Следствие 1.1) в столбцах с номерами: (2p-1), 2p и (2p+1) матрицы M. Приводим это непрерывное размещение к 1-разреженному виду (Следствие 1.2), т.е. к виду, когда в (2p-1) столбце матрицы M все символы набора W_p будут трехкратные. Из сказанного выше ясно, что символы набора Ω и символы набора W_p, стоящие в (2p-1) столбце, различные. Поэтому мы получаем непрерывное размещение всего набора W. Достаточность доказана.

Заключение

В представленной статье получен критерий существования непрерывного расписания для матриц с произвольным нечетным числом столбцов. Этот критерий позволяет не только упорядочить процесс составления расписаний, но и значительно упростить его.

Литература

1. Even S., Itai A., Shamir A. On the complexity of timetable and multicommodity flow problems. SIAM Journal on Computing, 1976, vol.5, pp.691-703.
2. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982, с.311.
3. Танаев В.С., Сотсков Ю.Н., Струсевич В.А. Теория расписаний. Многостадийные системы. М.: Наука, 1989, с.111-121, с.158-179, с.277-282.
4. Магомедов А.М. Уплотнение расписания с директивным сроком, кратным количеству занятий каждого преподавателя. Матем. заметки, 2009, том 85, Вып. 1, с.65-72.
5. Магомедов А.М. Дефрагментация таблиц перестановок с сохранением наборов элементов в линиях, XIV Международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики», тезисы докладов. М.: Издат-во Механико-математического ф-та МГУ, 2005, с.92.
6. Алекберли Д.М. Строковое размещение набора 2-слов в матрице M ($L \times m$), m=5,7. Материалы V Региональной научно-технической конференции «Информационные и телекоммуникационные системы: информационные технологии в научных и образовательных процессах». Махачкала: Издат-во ДНЦ РАН, 2009, с. 145-148.
7. Алекберли Д.М. k-разреженность непрерывного размещения 2-слов в матрице с любым нечетным числом столбцов. Вестник ДГИНХ (сборник трудов), Вып. 14, 2009, (в печати).
8. М. Свами, К. Тхуласираман Графы, сети и алгоритмы. М.: Мир, 1984, с. 165-166.

Алекберли Джалал Маратович. Главный специалист-эксперт Управления информационно-аналитического обеспечения при Министерстве экономики Республики Дагестан. Окончил Дагестанский государственный университет в 2006 году. Аспирант. Автор 7 печатных работ. Область научных интересов: дискретная математика, теория графов, теория расписаний. E-mail: djalal@mail.ru .