

Проективно инвариантное распознавание составных овалов

П.П. Николаев

Аннотация. Описан метод проективно инвариантного распознавания овала (плоской выпуклой фигуры с непрерывной кривизной), основанный на детекции составляющих овал гладко сопряженных фрагментов, каждый из которых аналитически описывается собственным ансамблем коэффициентов, задающих его форму. В работе предложены оригинальные методы детекции точек сопряжения фрагментов и показана их роль в построении глобального либо локального инвариантного базиса фигуры, что и обеспечивает ее распознавание, не зависящее от перспективных трансформаций овала на сенсорной плоскости регистрирующей оптической системы при смене ракурса наблюдения (в приближении плоской центральной проекции).

Ключевые слова: овал, проективное преобразование, квадратичная форма, вурф, касательная, проективно инвариантное отображение, точка сопряжения.

Введение

Данная статья продолжает развитие темы, отраженной в цикле авторских работ по распознаванию формы объекта по плоской центральной его проекции инвариантно к группе дробно линейных (проективных) преобразований картинной плоскости в $3D$ пространстве [1-3]. Объектами исследования там были плоские гладкие фигуры с минимумом особенностей. В рамках этой работы нас будет интересовать аспект соотнесения формы гладкой выпуклой кривой, задающей (либо приближающей) границу *овала*, с теми способами ее обработки, что приводят в итоге к инвариантному его представлению, т.е. к возможности классифицировать разнообразные фигуры, относя их к проективно эквивалентным семействам, либо к формированию «эталонного образа» данного овала для последующих нужд в задачах распознавания. При такой постановке решение задачи распадается естественным образом на два этапа: 1) поиск и локализация опорных элементов (ОЭ – точек и прямых) изображения, с по-

мощью которых и формируют; 2) проективно инвариантное отображение фигуры. При этом в соответствии с тем, сколько ОЭ удастся для овала детектировать, возникает альтернатива решения на втором этапе: при числе опорных точек (ОТ) больше трех пригодны методы преобразования фигуры в эталонную форму (т.е. используется *глобальный* проективный базис), если же овал имеет две или три ОТ, инвариантное его описание возможно лишь с помощью отображения, процедура которого включает формирование *локального* базиса кривой (moving frame), о новых методах вычисления которого будет сообщено далее. А поскольку класс кривых нами намеренно ограничен *олами*, т.е. «всюду гладкими чисто выпуклыми кривыми», то *явные* ОТ (точки перегиба, излома, возврата и пр., детекция которых производится посредством манипуляций с касательными) не могут оказаться нам полезными, и в постановку задачи для первого ее этапа вводится поиск *неявных* ОТ. На эту роль избраны ОТ *сопряжения* – точки гладкой состыковки набора фрагментов кривой «с разными законами»

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 09-07-00473-а).

описания каждого. Это новая тема, близких аналогов которой автору пока не удалось разыскать в современной литературе и в старых математических работах, где рассматривались аналитические свойства овалов с точки зрения проективной геометрии [7-9, 13]. В последнее время в связи с актуальностью темы проективно инвариантного распознавания гладких фигур появился ряд фундаментальных работ аналитического и прикладного характера [6, 10, 11, 14-16]. Некоторые формальные аспекты этой обширной темы (быстродействие и устойчивость алгоритмов обработки центрально симметричных овалов) рассмотрены нами в отдельной публикации [4]. Из разработанных автором (на момент написания статьи) методов детекции ОТ *сопряжения* (ОТС) здесь описаны два из пяти, то же относится и к рассматриваемым ниже алгоритмам инвариантного представления овалов (обсуждены два метода из четырех, исследованных в численных экспериментах на моделях составных овалов разного типа, генерируемых аналитически).

1. Иерархия форм аналитического представления плоских кривых

В курсах аналитической геометрии наиболее подробно рассматриваются свойства кривых *второго* порядка. Данный класс объектов – самый простой в необозримом море алгебраических кривых более высоких порядков. Индекс порядка задает максимальную степень многочлена, описывающего кривую в самой общей форме. Это описание соответствует произвольным: позиции, ориентации и масштабу на прямоугольной координатной плоскости (т.е. это не вид, называемый *каноническим*, – в нем кривые подчинены предельно лаконичной формуле). Подобную наиболее общую форму именуют *квадратичной*. Самый общий вид кривых третьего порядка описывается формулой под названием *кубичная* (кубическая) *форма*. Чтобы не загромождать текст повторяющимися наборами коэффициентов при различных комбинациях двух переменных на плоскости, прибегнем для списка формул всех форм от первой $F1$ (класс *прямых*) до четвертой $F4$ (этот порядок для нашей задачи объявляется предельным, мотивировка чего станет ясной ниже)

к приему рекуррентной записи. Каждая форма, начиная с $F2$, включает отсылку к предшествующей, в итоге чего получаются компактные соотношения:

$$\begin{aligned} F1 &= C2 x + C1 y + 1 = 0; \\ F2 &= C5 x^2 + C4 y^2 + C3 xy + F1; \quad (1) \\ F3 &= C9 x^3 + C8 y^3 + C7 x^2 y + C6 xy^2 + F2; \\ F4 &= C14 x^4 + C13 y^4 + C12 x^3 y + C11 xy^3 + \\ &\quad + C10 x^2 y^2 + F3. \end{aligned}$$

Формула $F2$ описывает (из числа *действительных* линий) всевозможные эллипсы, параболы и гиперболы, каковые с *проективной* точки зрения не различаются между собой. Это свойство именуют проективной эквивалентностью класса кривых $F2$, что для нашей задачи распознавания можно охарактеризовать как свойство *вырожденности*, – например, никаким приемом анализа невозможно установить, в результате какого проективного преобразования один эллипс превращен в другой, какие особенности формы (эксцентриситет, положение центра и осей симметрии) тот и другой «имели изначально». Для негладких (полигональных) объектов также существует свой тип ограничений при использовании их в численном распознавании: «все треугольники и все выпуклые четырехугольники проективно эквивалентны». Последнее из перечисленных свойств будет переосмыслено далее при рассмотрении вопроса об эталонных отображениях овалов. Аналогичным образом и тезис о неразличимости кривых второго порядка будет трансформирован в рамках стоящей перед нами задачи до редакции конструктивной.

Рассмотрение темы опознания составных контуров шло исходно от овалов, имеющих ОТС, сообразно следующей логике. Известна теорема, что по *любым* пяти точкам, принадлежащим кривой второго порядка, ее можно полностью восстановить. Это утверждение в соответствии с формулой (1) для $F2$ влечет трактовку образов геометрических в терминах алгебры координат: «согласно теореме имеется возможность решать системы из пяти уравнений для разных пятерок точек, принадлежащих фрагменту овала, чтобы найти одни и те же ансамбли из пяти неизвестных коэффициентов

$C1 - C5$, подтверждая тем самым, что объект подобной проверки действительно является фрагментом кривой второго порядка». Тезис разворачивается далее так: «если в ОТ сопряжены фрагменты кривых второго и третьего порядков, то для фрагмента, предположительно описываемого $F3$, реальна проверка данной гипотезы методом многократных решений систем 9 уравнений для различных наборов из 9 точек фрагмента с получением одного и того же ансамбля коэффициентов $C1 - C9$ ». Эта декларация является следствием менее известной теоремы о том, что произвольные девять точек кубической кривой полностью ее определяют. Подобное рассуждение распространяется на фрагменты кривых четвертого порядка, но это уже предел, поскольку, хотя решение систем 14-ти уравнений по проверке $F4$ и не является для компьютера сложной задачей (за доли секунды вычисляются сотни ансамблей $C1 - C14$), но ограничение в порядке фрагмента следует из непомерно возрастающих (с ростом индекса порядка) требований к точности представления координат у точек фрагмента (эксперименты с аналитически задаваемыми фрагментами $F5$ показали, что тестируемый ансамбль $C1 - C20$ удается «вытащить из шума пространственного квантования» при точностях представления координат, не меньших 20 десятичных знаков *плавающей запятой*, что заведомо выше реальных возможностей оцифровки кривой).

Суть данного метода детекции ОТС *дифференциально проективная*, поскольку он опирается на проективно инвариантные свойства (1) плоских кривых и использует дискретную версию *непрерывного* тестирования кривой. В связи с последним обстоятельством станем именовать далее подобную процедуру как метод *подвижного тестирующего ансамбля точек* (ПТАТ). В серии машинных экспериментов программная реализация метода осуществлялась посредством выбора на анализируемой дуге любой произвольной ее точки, в окрестности которой формировалась компактная группа точек (*ансамбль*, а численность группы задавал определяемый индекс порядка, т.е. проверка на принадлежность интервала свойствам квадратичной кривой предполагала включение пяти точек, кубической – девяти и, наконец, фраг-

мент кривой четвертого порядка тестировался согласно (1) ансамблем из 14 точек). Вслед за этим в обе стороны от «стартовой» точки производились смещения ансамбля (на величину фиксированного шага), причем для каждого нового положения ансамбля точек производилось вычисление соответствующего ему ансамбля коэффициентов для той или иной формы ($C(5)$, $C(9)$ либо $C(14)$).

Процесс распространялся в обе стороны до тех пор, пока с какой либо из них не нарушалось условие равенства *хотя бы одного* из коэффициентов $C(j)$ в ансамбле (с индексом i порядка число j членов ансамбля, равное числу коэффициентов соответствующей формы, связано посредством формулы: $j = i(i + 3)/2$). Тогда, аналогичным образом, сдвиги ансамбля точек по другую сторону от «стартовой» прекращались по достижении шага, при котором хотя бы один из коэффициентов $C(j)$ менял свое значение (на величину, принятую за пороговую). Точно такого же результата можно было достичь и при таком видоизменении процедуры поиска: группа точек ансамбля, за исключением пары крайних, оставалась в окрестности *точки старта*, а «самая правая» и «самая левая» попеременно смещались вправо и влево, расширяя зону охвата тестируемой дуги ансамблем. Процесс завершался, как только на обоих концах дуги происходило изменение хотя бы одного из коэффициентов $C(j)$.

Следует особо отметить важное *эвристическое* свойство метода ПТАТ: если тестировалась дуга, в пределах которой имелась точка гладкого сопряжения двух *трансцендентных* фрагментов (иными словами, в описании того и другого ни одна из форм (1) не могла фигурировать по определению, поскольку каждый задавался своей собственной «трансцендентной формулой»), то, хотя вычисляемые «имитационные» коэффициенты и менялись вдоль дуги (по первому варианту реализации процедуры ПТАТ), но они всегда менялись монотонно с невысоким значением скорости изменения, в то время как в районе точки сопряжения происходили перепады значений $C(j)$, в десятки раз более интенсивные (Рис.1).

Точно такая же картина наблюдалась и при тестировании дуги ансамблем «неподходящего

порядка» (например, фрагмент кубической кривой тестировался с помощью ансамбля из пяти точек вместо 9-точечного): все или несколько коэффициентов из полного набора $C(j)$ плавно изменялись, в ОТ сопряжения выявляя характернейшие перепады по амплитуде (в десятки и сотни раз превышающие средние значения. На всех рисунках эти положительные и отрицательные пики специально обрезаны, чтобы был виден медленно меняющийся либо платообразный характер величин у ансамбля $C(j)$ в пределах тестируемого фрагмента). Следовательно, опираясь уже не на «теоремного

характера закон» поведения коэффициентов $C(j)$ в пределах дуги с постоянным индексом порядка, а на статистически достоверную закономерность хода их производных вдоль тестируемой дуги, можно было существенным образом расширить область применимости метода ПТАТ: анализировать фрагменты трансцендентных кривых (Рис. 1 а, тонкие линии), а для алгебраических тестировать их ансамблями «меньших, чем необходимо» порядков (Рис. 1 б, левая часть гистограммы).

Теперь попытаемся пересмотреть тезис о вырождении (в проективном смысле) кривых

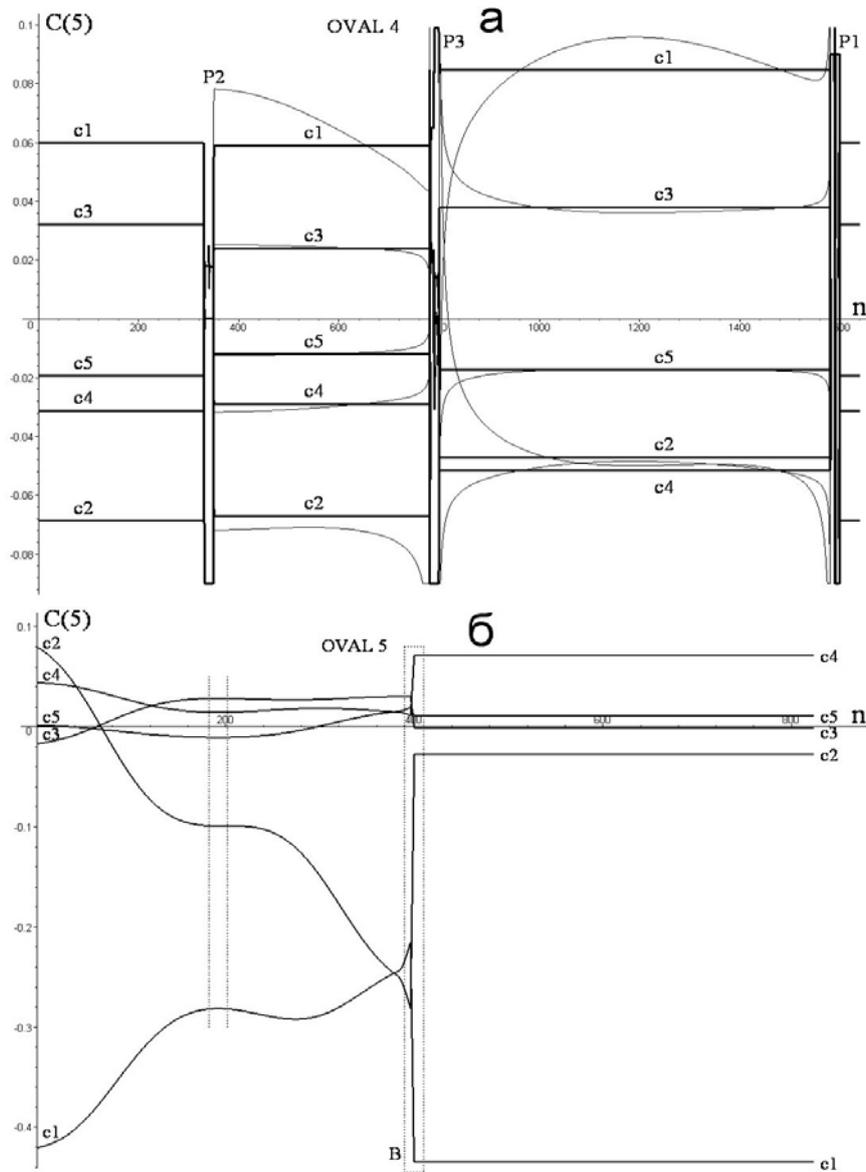


Рис. 1. Результаты процедуры ПТАТ с помощью ансамбля $C(5)$: для овалов 4-го (а) и 5-го (б)

второго порядка. Вспомним, что заявленная тема – овалы *составные*. И, если составить овал хотя бы из двух кусков эллипса (можно из фрагментов эллипса и параболы, эллипса и гиперболы, лишь бы ОТС не принадлежала еще и к типу *точек излома*), то у каждого фрагмента будет свой ансамбль из пяти коэффициентов, а овал, как единая аналитическая структура, не будет более принадлежать к классу вырождающихся кривых, при этом с ней оказывается возможным проводить требуемые (для распознавания составных овалов) виды численной обработки: проективно инвариантно отображать, искать и находить образы элементов симметрий (оси и центры), вычислять коэффициенты преобразования одного овала в другой – ему эквивалентный. Перейдем теперь к описанию численных экспериментов с моделями составных овалов, предварив его рядом выкладок теоретического характера.

Начнем с идеи отображения фигуры на эталонный 4-вершинник. Если бы объектом распознавания был не овал, а четырехугольник, то единственное, что при таком выборе можно было бы распознать – это отличить выпуклую фигуру от вогнутой. Ситуация меняется, если представить, что 4-вершинник – это четверка ОТ, принадлежащих овалу и благодаря его форме успешно на нем обнаруживаемых в любом проективном ракурсе. При наличии такого дополнительного условия можно привести овал к эталонному виду, рассчитав преобразование, которое переводит четверку ОТ (а вместе с ней и все куски дуг между ОТ) в некую правильную конфигурацию (единичный квадрат, например). В итоге *все* овалы из семейства проективной эквивалентности приобретут абсолютно одинаковую форму (совпадут с той точностью, с какой оцифрованы и насколько точно определены на контуре позиции четырех ОТ). Для полного понимания читателем происшедшей с фигурой метаморфозы подчеркнем, что не только форма всех эквивалентных овалов окажется идентичной, но и сама организация отображения на фиксированное поле координат эталона не потребует для констатации искомого факта эквивалентности никаких дополнительных операций по совмещению отображений, – все представители проективно

эквивалентного семейства «согласно теории» должны проецироваться на единый для них всех «идеальный портрет семейства». И сделать такое преобразование фигуры всегда возможно по той причине, что четверка точек – это восемь чисел, задающих на поле координаты ОТ, а число независимых коэффициентов проективного преобразования плоскости также равно восьми (для перехода к штрихованной системе координат плоскости эталона от координат x, y преобразуемого овала):

$$\begin{aligned} x' &= (c_{11}x + c_{12}y + c_{13}) / z; \\ y' &= (c_{21}x + c_{22}y + c_{23}) / z; \end{aligned} \quad (2)$$

где $z = c_{31}x + c_{32}y + 1$.

Следовательно, разрешима система восьми уравнений для неизвестного набора коэффициентов в (2), каковые могли бы отобразить фигуру на эталон. Итак, проблема распознавания овалов переформулирована через механизм инвариантного отображения в виде задачи отыскания у фигуры четверки ОТС. Эталонный образ не иллюстрируется тут по причинам «очевидности».

Численные эксперименты проводились с овалами, число ОТС у которых варьировалось от двух до четырех, порядок фрагментов менялся от второго до четвертого (в самых разных комбинациях сочетания индекса порядка в ОТС, в том числе, и для сопряжения с фрагментами трансцендентных кривых). Модельное исследование методов детекции ОТС для овалов с участками неалгебраических кривых осуществлялось на базе квадратичных кривых, поскольку формула их задания содержала радикал, и было удобно менять показатель степени с малыми отклонениями от его «канонической» величины 0.5. На Рис. 2 и Рис. 3а показан вид четырех асимметричных овалов, составленных из фрагментов квадратичных кривых. Стало быть, поиск таких ОТС по методу тестирования с помощью квадратичных форм F_2 гарантировал их обнаружение, что и было продемонстрировано для этих овалов при самых разных наборах коэффициентов проективного преобразования. Литерами A, B, C, D на Рис. 2 показаны позиции ОТС, на Рис. 3а они фигурируют как P_1, P_2 и P_3 , на Рис. 3б ОТС помечены как A и B .

Следует отметить существенную разницу в распределении плотностей точек, задающих

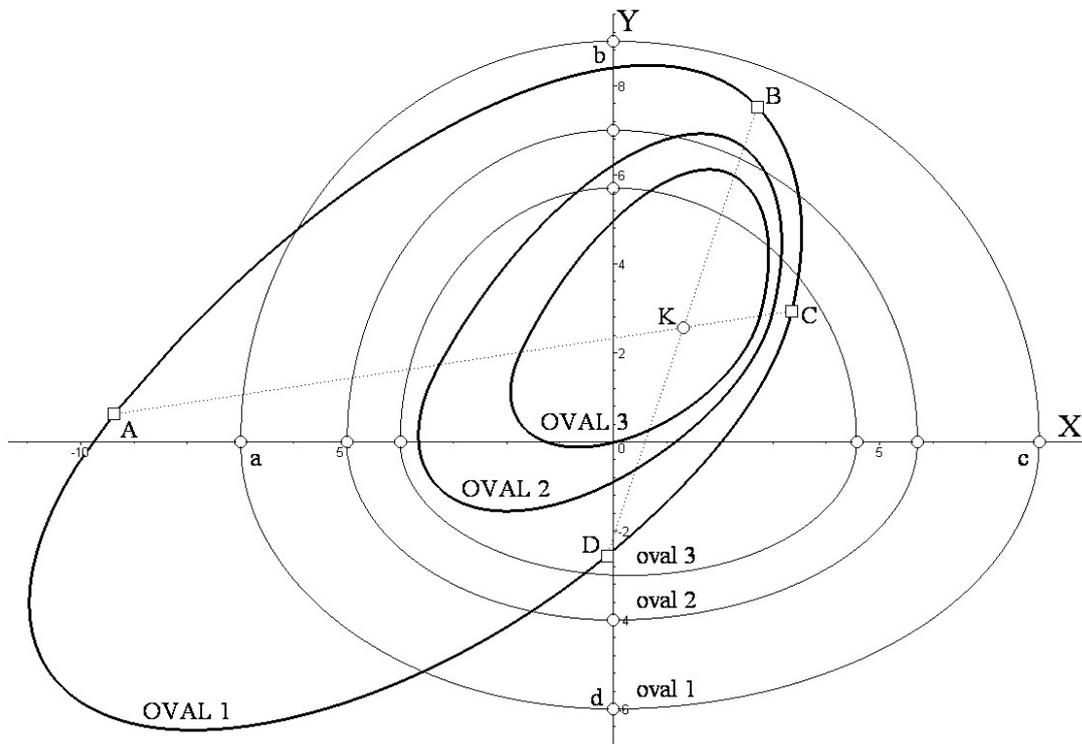


Рис. 2. Вид трех составных овалов: исходный и после проективного преобразования

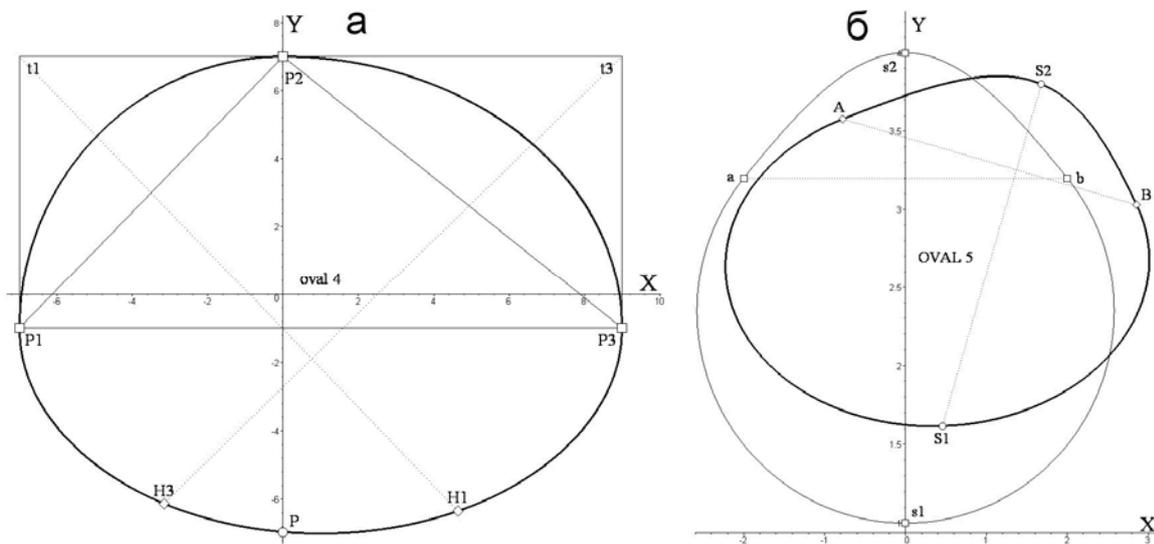


Рис. 3. Вид составных овалов: квадратичного (а) и с фрагментами 2-го и 3-го порядков (б)

кривую, до и после применения преобразования (2). Когда овал генерируется в модельном эксперименте как ломаная с равной угловой плотностью вершин (точек излома), то после проективной трансформации эта регулярность утрачивается. И наоборот. Если речь идет о

распознающей системе в рабочем режиме, то овал, подвергаемый процедуре анализа и эталонного описания, может быть оцифрован *равноплотно*. В итоге отображения на эталон (в системе x', y') он теряет свойство равномерности дискретного представления. В силу означенных

причин операция отождествления двух отображений (для констатации факта проективной эквивалентности исходных контуров) имеет специфику, не связанную исключительно с точностью оцифровки кривой, а определяемую *степенью* перспективной трансформации (2) овалов, подвергаемых опознанию. Иными словами, и при идеальной точности оцифровки осуществляется не *совпадение ломаных*, а происходит проецирование их вершин (и вершины двух эквивалентных овалов не обязаны совпадать) на гладкую кривую эталонного образа (априори неизвестной формы). Эта особенность относится ко всем далее описываемым методам проективно инвариантного представления овалов.

В качестве примера составного овала с парой ОТС и фрагментами разного порядка рассмотрим осесимметричную кривую грушеобразной формы, гладко скомбинированную из фрагмента эллипса и чисто выпуклой части кривой третьего порядка (под названием *локон Аньези*, Рис. 3б). В ОТС была рассчитана гладкость квадратичной кривой $F2$. При этом получалось, что каждая из двух ОТС аналитически точно принадлежит одновременно и эллипсу, и «локону». Эти условия вводились преднамеренно, чтобы показать, что со стороны теории для практической реализации этого вида алгоритмов распознавания нет ограничений точности, с которой могут вычисляться координаты ОТС. Для обсуждаемого случая *симметричных* составных овалов (граничат фрагменты 2-го и 3-го порядков, а в силу реализуемой осевой симметрии нет необходимости рассчитывать обе ОТС совместно) удастся реализовать еще большую гладкость – можно сгенерировать овал, у которого каждая концевая пятерка точек *локона* принадлежит одновременно и эллиптическому фрагменту. На этом овале (назовем его «овал 5») также были опробованы предложенные аналитические и эвристические схемы детекции ОТС (второй метод их детекции описан в следующем разделе), показавшие ту же степень применимости, что и у составных овалов с фрагментами исключительно квадратичных дуг (Рис. 1 а, б). Тестирование овала 5 ансамблем $S(9)$ трансформирует левую часть гистограммы рис. 1б (фрагмент $F3$) в набор девяти постоянных функций (не показано).

2. Отображение овала на плоскость вурфов и метод вычисления плоскостного вурфа

Переходим к описанию этапа исследования, где в качестве неперемного атрибута в разрабатываемых методах обработки овалов фигурирует инвариант преобразования (2) – *вурф*. Из двух наиболее часто встречаемых в курсах проективной геометрии схем его вычисления выберем ту, что соответствует равенству единице *гармонической* четверки точек. Вурф w – это число, инвариантно к преобразованию (2), характеризующее произвольные четыре точки $P1, \dots, P4$, лежащие на одной прямой, через их координаты (от $x1, y1$ до $x4, y4$) в любой линейной координатной системе, причем значение w удовлетворяет компактному варианту формулы через длины трех отрезков a, b и c , на которые эта четверка разбивает прямую (пронумеруем точки в порядке их расположения на прямой справа налево либо наоборот; и пусть для определенности a – это расстояние между первой и второй, b – между второй и третьей, c – между третьей и четвертой точками):

$$w(P1, P2, P3, P4) = w(a, b, c) = a c / (b (a + b + c)). \quad (3)$$

Четверка точек называется *гармонической*, если она проективно эквивалентна случаю, когда три смежные точки разделены равными интервалами, а четвертая бесконечно удалена (для такого, не принадлежащего конечной области элемента, вводится особый термин: «четвертая точка – *несобственная*»), т.е. $w(a, a, \infty) = 1$. Подчеркнем особо: мы имеем дело с объектами, для которых единственная сохраняющаяся характеристика – это вурф, а такие привычные свойства фигур, как «расстояние», «угол», «центр масс», «параллельность» непригодны для описания объектов, подвергшихся преобразованию (2). Рассмотренное выше эталонное отображение овалов соответствует всему изложенному здесь в части *инвариантности*, однако относится к ситуациям, не «самым бедным» по представительству ОГ у фигуры из числа для нее возможных. Экскурс «в мир вурфов» вызван необходимостью перехода к приемам обработки овалов, для которых никакие допол-

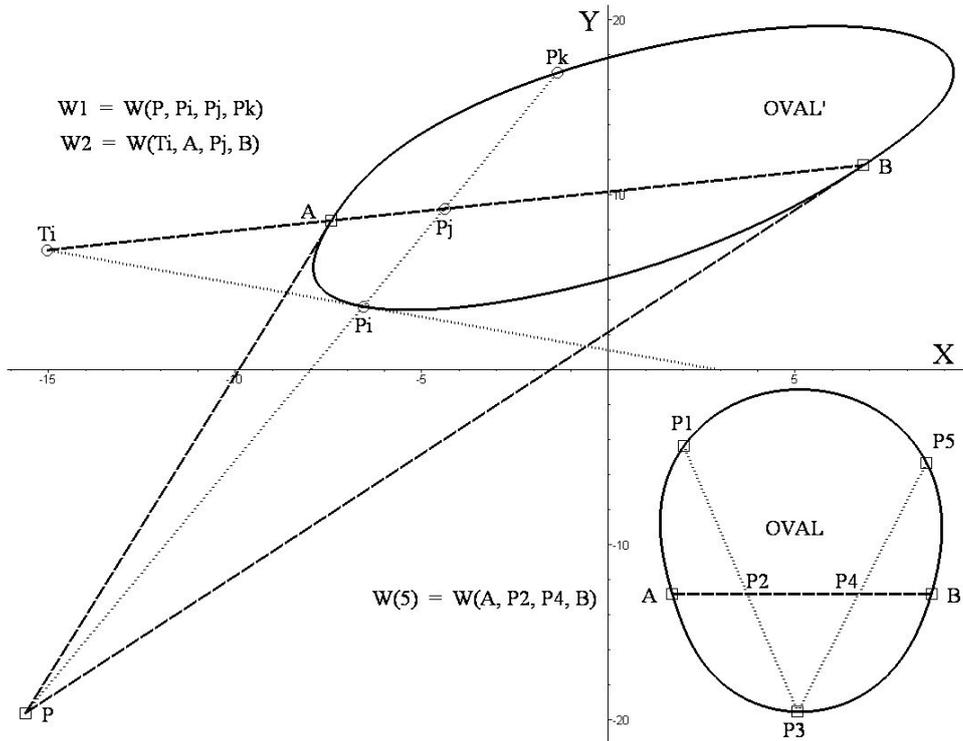


Рис. 4. Схемы вычисления вурф-функций wf1, wf2 и ансамбля W(5) (ПВ, справа внизу)

нительные построения не могут увеличить число ОТ до «эталонного квартета».

Введем определения двух видов вурф-функций – *поперечной* wf1 и *продольной* wf2. Для этого потребуется ряд уточнений. Рабочей схемой становится конфигурация с двумя ОТС на контуре овала (тип ОЭ здесь не важен, это могут быть ОТ сопряжения и точки пересечения контура овала прямой образа оси симметрии; важно, что ОТС A и B уже локализованы). Конфигурация дополняется третьей точкой P вне овала – это *полюс* для *поляры*, образованной наличной парой ОТС (точка пересечения касательных к овалу в ОТ A и B из полюса P). Остается ввести понятие «текущей точки» P_i . На одной из половин овала, разделенного полярой (пусть для определенности это половина, ближайшая к ОТ P), станем последовательно перебирать пронумерованные по i точки, представляющие ломаной дугу овала между A и B. В результате созданы условия для вычисления двух независимых вурф-функций. Функция wf1 вычисляется как связанная с номером i текущей точки последовательность значений вурфов, где каждый i-ый вурф соответствует четверке

точек луча, проходящего через P и P_i : P, P_i , P_j , P_k , здесь P_j и P_k – точки пересечения лучом, «сканирующим овал из P», поляры и дальней границы овала соответственно. Функция wf2 для ее вычисления требует построения касательной в P_i , пересекающей поляру в точке T_i (Рис. 4), в результате чего появляется возможность определить второе независимое значение «текущего» вурфа теперь уже для поляры по такой четверке точек: T_i , A, P_j , B (схема вычислений согласно определению (3)).

В случае, если фигурирующая в задании обеих вурф-функций *поляра* идентична образу *оси симметрии* овала, то функция wf1, как можно показать, оказывается *постоянной* (т.е. представляет собой плато единичных значений $w1_i$), в итоге чего будет утрачено важнейшее качество отображений на плоскость, оси которой имеют координатами значения двух различных функций вурфов, – быть однопараметрической кривой вида $wf1(wf2)$, не зависящей от неинвариантного угла сканирования точек P_i . Для этого случая была разработана более сложная схема для wf3 «с текущим полюсом», которую по причинам ограничений на объем

текста мы здесь не рассматриваем. Аналогичным образом пришлось видоизменить процедуры вычисления вурф-функций для овалов, составленных из 4-х фрагментов *квадратичных* дуг с особой конфигурацией ОТС (овалы 1 и 2; в силу их вырожденности стандартные процедуры $wf1$ и $wf2$ также дают постоянные значения для продольной и поперечной функций). Итак, возможность одновременного вычисления *двух* независимых вурфов, проективно связанных с одной и той же текущей точкой, отменяет необходимость введения в схему (инвариантного отображения) алгоритмического блока, выполняющего роль «определителя корреспонденции ординат» для пары сопоставляемых $wf1$, о чем

мы писали в недавней работе [4] применительно к ситуациям, когда система имеет возможность вычислить только одну вурф-функцию. Описанные выше усложнения обработки квадратичных составных овалов не имеют касательства к ситуации с овалом 3 (Рис. 2) и овалом 4 (Рис. 3а, Рис. 5), поскольку у них лишь по одну из сторон от поляры $A-B$ есть два фрагмента, что обеспечивает выбор по отношению к ней нескольких (трех) невырождающихся отображений $wf1$ по трем разным полюсам (более подробный комментарий дан конце раздела).

Для *овала 5* с двумя найденными ОТС A и B на Рис. 5б показано, как выглядят функции $wf1$, $wf2$ и (помещено в пунктирной рамочке вверху)

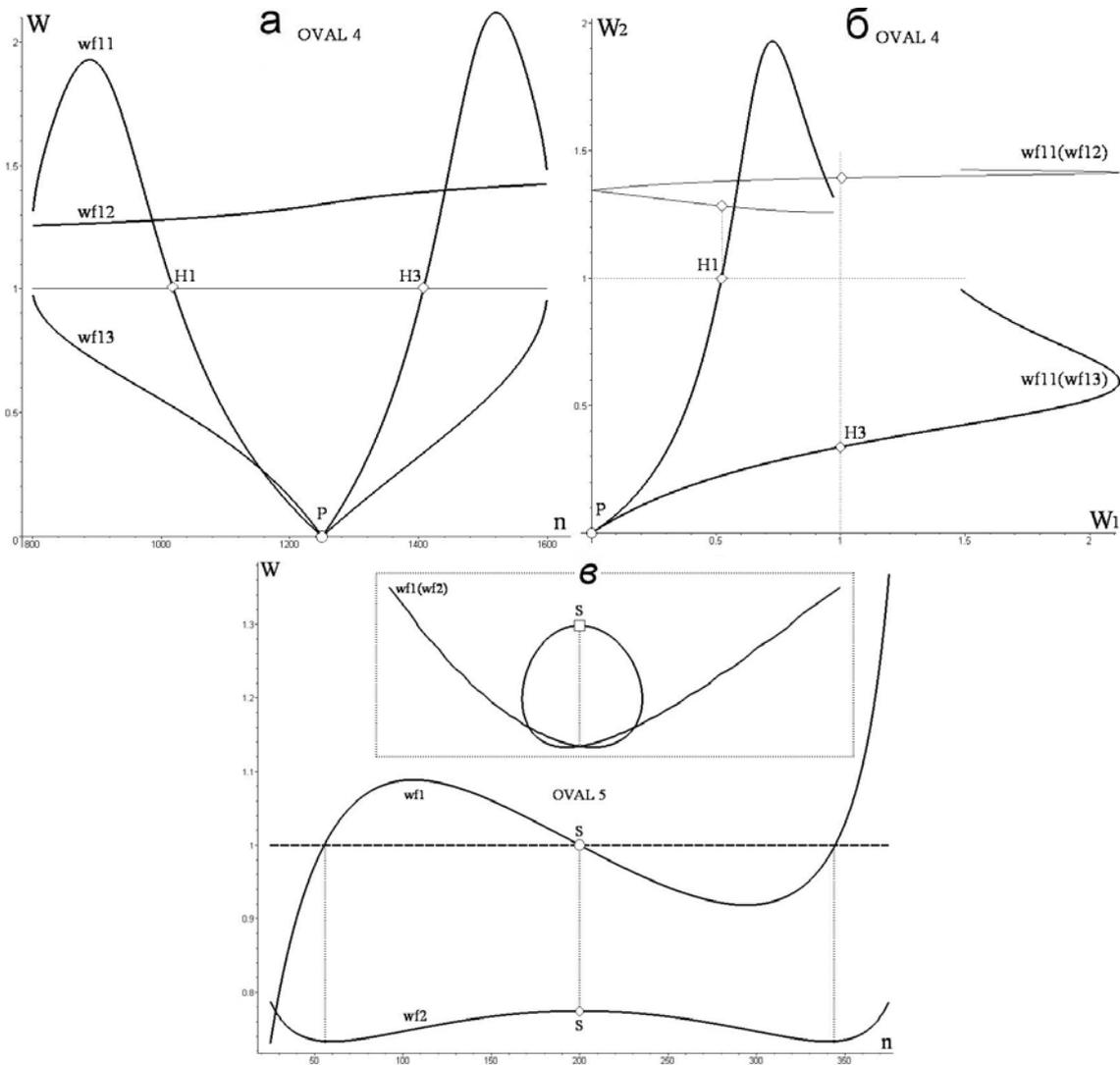


Рис. 5. Вид вурф-функций: для составных овалов 4 (а, б) и 5 (в)

не зависящее от углов сканирования (т.е. монотонно, но неизвестным образом меняющегося по оси n распределения *текущих* i -х точек) отображение $wf1(wf2)$. Следует также отметить, что для овала 4, составленного из трех квадратных фрагментов, можно было вычислить трижды (из полюса для поляры $P1$ - $P3$ и полюсов $t1$, $t3$ в точках пересечения касательных к ОТС $P1$, $P2$ и $P3$ – для нее же) *независимые* поперечные вурф-функции (на Рис. 5 а и б они обозначены как $wf11$, $wf12$ и $wf13$), что обеспечивало более одного вурф-отображения для этого овала ($wf11(wf12)$ и $wf11(wf13)$ на Рис.5 б). Такая же схема обработки применима и к овалу 3 с его тремя фрагментами эллипсов.

Рубрику использования вурфов в дифференциально проективном анализе составных овалов завершим рассмотрением вычислительного приема, предложенного в работе [1] для инвариантного описания выпуклых пятиточечников, в рамках стоящей перед нами задачи преобразуемой в операцию оценки проективной *кривизны* (в дискретной и симметризованной версии) для анализируемой дуги овала. Эта операция, ориентированная на формирование по его контуру цепи «текущих оценок» параметра проективной кривизны, тем точнее аппроксимирует значения дифференциального оператора, названного в работе [12] *плоскостным вурфом*, чем более плотна цепь представляющих овал точек.

Вычислительная схема оценки чрезвычайно проста: в пятиточечном ансамбле для третьей (центрального положения) точки вычисляется значение вурфа, образованного на прямой, соединяющей 2-ую и 4-ую точки и пересекаемой лучами из центральной в концевые точки (первую и пятую точки на Рис. 4 справа внизу, там ансамбль $W(5)$ образован точками $P1$, A , $P3$, B и $P5$, что позволяет вычислить позиции коллинеарной четверки точек A , $P2$, $P4$, B , задающей некий текущий вурф). В специальной серии машинных экспериментов удалось показать целесообразность применения этой процедуры (дадим ей наименование «схема вычисления *плоскостного вурфа*», ПВ) для поиска ОТС составных овалов (Рис. 6 а), для детекции образа оси у осесимметричных овалов (Рис. 6 б, т. $S1$), а также и для инвариантного отображения со-

ставных овалов. Посредством этого рода локальной оценки проективных свойств кривой (в качестве предварительного этапа обработки овала) удастся свести к минимуму ошибочные гипотезы идентификации ОТС при согласовании данных, полученных альтернативными независимыми методами. Численными экспериментами с более широким набором свойств аналитически генерируемых кривых нами показано, что метод ПВ можно использовать в целом ряде подзадач распознавания овалов с неявными элементами симметрии (таких как поиск образа оси симметрии кривой и образа центра у центрально-симметричных овалов и у контуров с неявной поворотной симметрией), а также и для проективно инвариантного отображения овалов, не имеющих *никаких* ОТ из числа ранее описанных.

Завершая изложение темы распознавания составных овалов, обрисуем перспективность полученных результатов в контексте реконструкции трехмерных объектов. Объект (например, легковой автомобиль) может среди контрастных своих границ содержать замкнутые и гладкие фрагменты (компланарные либо почти плоские), по которым в динамике можно вычислять $3D$ форму объекта при условии, что разрешима проблема *корреспонденции* этих границ (т.е. для разных тактов монокулярной регистрации движения имеется однозначная связь между точками границ, физически тождественными). Задача корреспонденции сложнее задачи распознавания, но следует уяснить, что и описанное нами отображение плоской кривой на эталон, и создание для нее инвариантного образа $wf1(wf2)$ обеспечивают точное соответствие любой точки кривой (контура овала) и ее проективно эквивалентного эталона, а также и однозначную связь ее точек с соответствующими позициями вурф-отображения. Успех в решении задачи корреспонденции для объектов *ригидных* означает, в том числе, и вычислимость коэффициентов преобразования (2), связывающего любые проекции $3D$ объекта в смежные такты регистрации монокулярной оптической системой (если ее вычислительный блок реализует описанные выше алгоритмы обработки границ, выделенных имидж-процессором на матрицах сенсора).

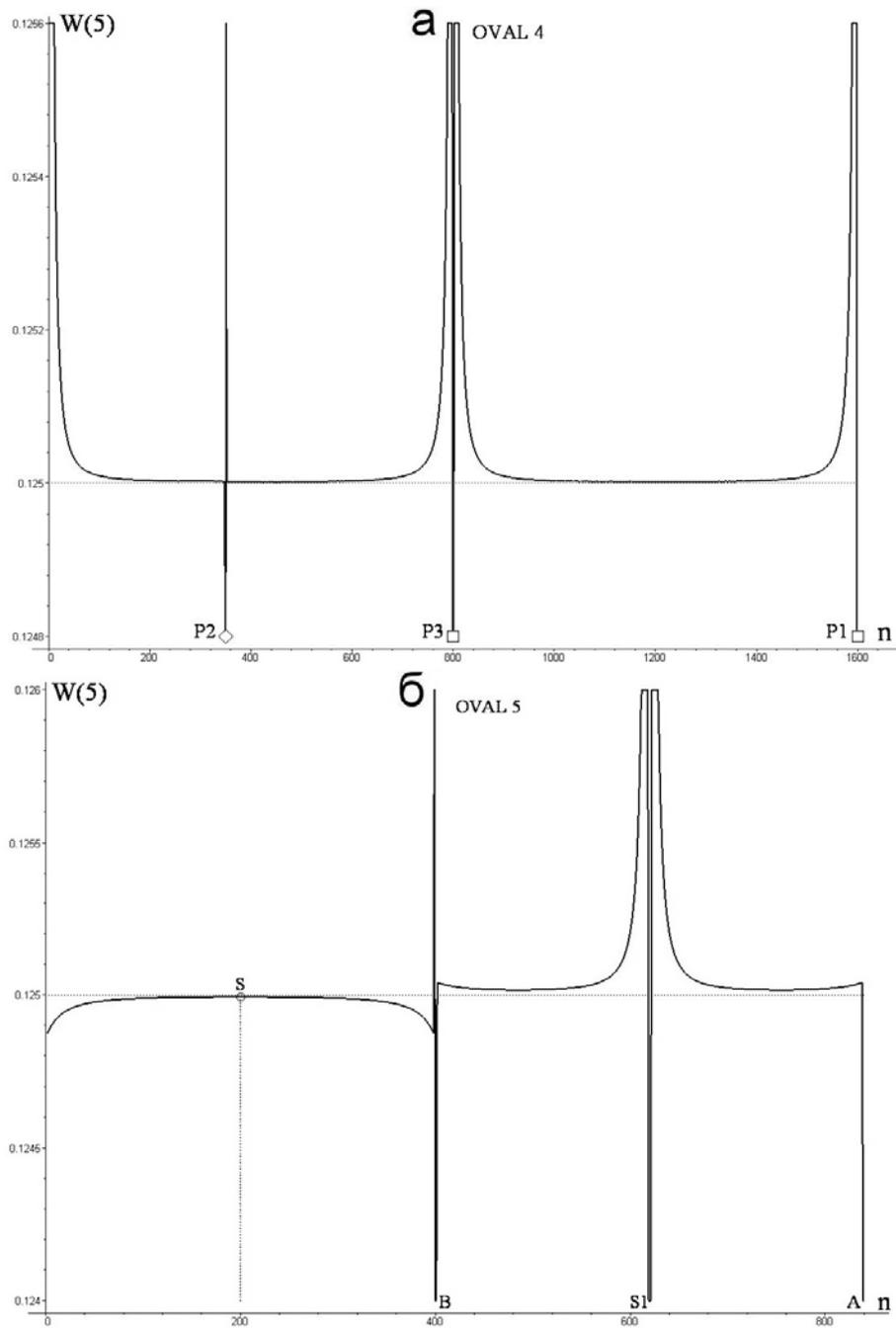


Рис. 6. Результаты работы схемы ПВ: на контурах овалов 4 (а) и 5 (б)

Заключение

Автору ясны принципиальные различия между процедурами распознавания овалов, для которых объект обработки синтезирован «по им самим назначенным правилам», и обработкой кривых неизвестной аналитической природы. Но

во введении к статье была четко оговорена модельная цель исследования: рассмотреть, что из методов обработки овала можно применить в случае, когда его контур подчинен заявленным видам сопряжения в ОТ. Не исключено, что среднестатистический процент опознаваемых кривых промышленного дизайна «по разряду

идеально составных» окажется невелик. Однако, новые проблемы, можно надеяться, не повлекут необходимости начинать разработку автоматических систем «с нуля».

Созданный теоретический задел позволяет целенаправленно модифицировать те из рассмотренных выше схем, что, хотя и базировались на идеализированной возможности точной детекции ОТС, но допускают такую форму оптимизации, когда добавление блоков обработки ряда гистограмм (коэффициентов форм $S(5)$, $S(9)$ и $S(14)$, плотности точек на вурф-отображениях) позволит вычислять с ограниченной точностью позиции «опорных интервалов» контура. Это отдельная большая работа, успех которой зависит, как минимум, от наличия репрезентативной базы данных (в виде сотен оцифрованных контуров) для той или иной ниши объектов распознавания. Остальное даст корректировка схем при их реализации.

Следует отметить, что полученные новые результаты теоретического характера выходят за рамки темы, фигурирующей в названии статьи. Привязка к свойствам овала иметь характер *составного* отнюдь не обязательна ни для вурф-отображения $wf1(wf2)$, ни для метода ПВ в его качестве быть детектором ОТ других типов, а не только ОТС. Например, кривые третьего порядка имеют характер петли (части кривой за точкой самопересечения снаружи петли продолжают в несобственную область), в силу чего *замкнутый фрагмент* кривой имеет одну ОТ излома, метод ПВ добавляет к ней вторую ОТ: точку экстремума проективной кривизны, тем самым создавая условия для проективно инвариантного отображения овала $wf1(wf2)$ по двум найденным ОТ. То же относится и к распознаванию овалов с неявными элементами симметрии: образ оси симметрии пересекает контур овала в *двух* его точках, которые, как было нами показано в специальной серии машинных экспериментов, могут быть найдены с помощью метода ПВ. В результате локализации этой пары неявных ОТ также появляется возможность формировать отображение $wf1(wf2)$. Эти результаты будут рассмотрены в отдельной работе.

Описанные здесь эвристические методы детекции ОТС можно охарактеризовать как схе-

мы численной обработки кривых с высокой чувствительностью (на гистограммах оценки инвариантов их формы) к распределению локальных экстремумов аффинной и проективной кривизны. И, поскольку *аффинная* кривизна не является в рассматриваемом нами случае инвариантным свойством проективно преобразуемой плоской кривой, то точки ее экстремумов можно выбраковывать, применив повторно тот или иной процесс детекции ОТС (с измененными параметрами преобразования (2) либо вурф-отображения), в итоге исключая несопадающие позиции экстремумов, каковые никак не могут относиться к инварианту «проективная кривизна».

Для эвристической версии метода ПТАТ исходный овал можно подвергнуть несколько раз проективным преобразованиям с разными коэффициентами (2), после чего сопоставить варианты поведения коэффициентов форм (1). Несомненно, потребуется дополнительное исследование иных областей применимости метода ПВ, составляющего в ряде подзадач конкуренцию схеме ПТАТ, но при том в вычислительном плане существенно более простого. Наконец, привлечение термина *проективная кривизна* использовано автором для «образной ясности», т.е. не вполне строго [5], но корректность в данном случае помешала бы краткости текста и его внятности в части идей.

Литература

1. Николаев П.П. Алгоритмы корреспонденции в задачах распознавания и стереосинтеза. II. Инварианты криволинейных фигур // Сенсорные системы. 1990. Т. 4. №4. С. 431-442.
2. Николаев П.П. Модели константного зрительного восприятия. I. Проективно-инвариантное представление гладких объектов // Сенсорные системы. 1995. Т. 9. №2. С. 109-131.
3. Николаев П.П. Модели константного зрительного восприятия. II. Полевые алгоритмы репрезентации гладких объектов // Сенсорные системы. 1995. Т. 9. № 4. С. 110-132.
4. Николаев П.П., Николаев Д.П. Проективно инвариантное распознавание плоских контуров на примере кривых с симметриями // Труды ИСА РАН. 2009. Т. 45. С.209-221.
5. Овсиенко И.Ю., Табачников С.Л. Проективная дифференциальная геометрия. Старое и новое: от производной Шварца до когомологий групп диффеоморфизмов. М.: МЦНМО. 2008. 280 С.

6. Calabi E., Olver P.J., Shakiban C., Tannenbaum A. and Haker S. Differential and numerically invariant signature curves applied to object recognition / *Int. J. Computer Vision*. 26. 1998. 107-135.
7. Cartan E. La Methode du Repere Mobile, la Theorie des Groupes Continus, et les Espaces Generalises, Exposes de Geometrie. No. 5. Hermann. Paris. 1935.
8. Cartan E. Lecons sur la Theorie des Espaces a Connexion Projective, Cahiers Scientifiques. Vol. 17. Gauthier-Villars. Paris. 1937.
9. Cremona L. Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane // *Opere matematiche di LUIGI CREMONA*. T. 1. Pubblicati sotto gli auspici della R. Accademia dei Lincei. Milano: U. Hoepli, 1914. P. 317-465.
10. Faugeras O. Cartan's moving frame method and its application to the geometry and evolution of curves in the euclidean, affine and projective planes. In: *Applications of Invariance in Computer Vision*, J.L. Mundy, A. Zisserman, D. Forsyth (eds.) / Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science. Vol. 825. 1994. pp. 11-46.
11. Fels M. and Olver P.J. Moving coframes. I. A practical algorithm / *Acta Appl. Math.* 51: 1998. 161-213.
12. Kohn G. Uber die Erweiterung eines Grundbegriffs der Geometrie der Lage / *Mathematische Annalen*. 1895. Vol. 46. P. 285.
13. Lie S. Die Grundlagen fur die Theorie der unendlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen, Leipzig. Ber. 43 (1891), 316-393; also *Gesammelte Abhandlungen*. Vol. 6. B.G. Teubner. Leipzig. 1927. pp. 300-364.
14. Olver P.J. *Applications of Lie Groups to Differential Equations* / Springer. New York. 1993.
15. Olver P.J. *Equivalence, Invariants, and Symmetry* / Cambridge University Press. Cambridge. 1995.
16. Olver P.J. Moving frames and singularities of prolonged group actions/*Selecta Math.* 6.2000. 1-77.

Николаев Петр Петрович. Главный научный сотрудник Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН. Окончил Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова в 1966 году. Доктор физико-математических наук. Автор 78 печатных работ. Область научных интересов: искусственный интеллект, сенсорная физиология, психофизика зрительного восприятия, математическое моделирование процессов зрения. E-mail: nikol@iitp.ru.