Оптимальная идентификация дискретных систем на основе метода статистической линеаризации

В.М. Чубич

Аннотация. Рассмотрены теоретические и прикладные аспекты оптимального оценивания параметров моделей стохастических нелинейных дискретных систем на основе метода статистической линеаризации. Приведены оригинальные результаты для случая вхождения неизвестных параметров в уравнения состояния и наблюдения, начальные условия и ковариационные матрицы помех динамики и ошибок измерений. Рассмотрен пример оптимального оценивания параметров одной модельной структуры.

Ключевые слова: оценивание параметров, информационная матрица, статистическая линеаризация, критерии оптимальности.

Введение

Проблема идентификации относится к одной из основных проблем теории и практики автоматического управления и является обязательным элементом решения крупномасштабных прикладных задач. Качественное решение данной проблемы способствует эффективному использованию современных математических методов и сложных наукоемких технологий при проектировании различных систем управления подвижными (в том числе, авиационно-космическими) и технологическими объектами, построении прогнозирующих моделей (например, в экономике и бизнес-процессах), конструировании следящих и измерительных систем.

По способу проведения эксперимента, существующие методы идентификации можно разделить на пассивные и активные. При пассивной идентификации для построения математической модели используются реально действующие в системе сигналы и тем самым нормальный режим эксплуатации не нарушается. Методы пассивной идентификации достаточно полно описаны, например, в [1-4]. Активная идентификация, напротив, предполагает нарушение технологического режима и подачу на вход изучаемой системы специальным образом синтезированного сигнала. Его находят в результате решения экстремальной задачи для некоторого предварительно выбранного функционала от информационной (или дисперсионной) матрицы вектора оцениваемых параметров. Таким образом, трудности, связанные с необходимостью нарушения технологического режима, должны окупаться повышением эффективности и корректности проводимых исследований, что обусловлено самой идеологией активной идентификации, базирующейся на сочетании приемов параметрического оценивания с теорией планирования эксперимента, изложенной в [5-8].

Более определенно, **процедура оптимального оценивания параметров** моделей дина-

[1] Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по образованию в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт №14.740.11.0587 от 05.10.2010 г.)

мических систем (процедура активной параметрической идентификации) предполагает выполнение следующих этапов:

1. вычисление оценок параметров по измерительным данным, соответствующим некоторому пробному сигналу;

2. синтез на основе полученных оценок оптимального по некоторому выбранному критерию сигнала (планирование эксперимента);

3. пересчет оценок неизвестных параметров по измерительным данным, соответствующим синтезированному сигналу.

Разработка информационных технологий идентификации сложных динамических систем стохастической природы является одним из перспективных активно развивающихся научных направлений. При этом особое внимание исследователей сосредоточено на разработке методов, наиболее полно учитывающих специфику реальных объектов исследования [9-12].

Целесообразность применения концепции активной параметрической идентификации при построении математических моделей стохастических динамических систем показана в [13-16]. Тем не менее, данная область исследований остается еще недостаточно изученной, а возможности применения в ней методов оптимального планирования экспериментов выявлены далеко не полностью. В настоящей статье приведены результаты дальнейших исследований автора в рамках указанной проблемы применительно к стохастическим нелинейным дискретным системам.

1. Постановка задача

Рассмотрим следующую модель управляемой, наблюдаемой, идентифицируемой динамической системы в пространстве состояний:

$$x(k+1) = f\left[x(k),u(k),k\right] + \Gamma(k)\,w(k)\,, \qquad (1)$$

$$y(k+1) = h\left[x(k+1),k+1\right] + v(k+1)\,, \quad k = 0,1,...,N-1\,, \qquad (2)$$

где $x(k)$ – n - вектор состояния; $u(k)$ – детерминированный r - вектор управления (входа); $w(k)$ – p - вектор возмущения; $y(k+1)$ – m - вектор измерения (выхода); $v(k+1)$ – m - вектор ошибки измерения.

Предположим, что

- случайные векторы $w(k)$ и $v(k+1)$ образуют стационарные белые гауссовские последовательности, для которых

$$E\left[w(k)\right]=0\,,\ E\left[w(k)w^T(i)\right]=Q\delta_{ki}\,,$$

$$E\left[v(k+1)\right]=0\,,\ E\left[v(k+1)v^T(i+1)\right]=R\delta_{ki}\,,$$

$$E\left[v(k+1)w^T(i)\right]=0\,,\ k,i=0,1,\ldots,N-1$$

(здесь и далее $E[\cdot]$ - оператор математического ожидания, δ_{ki} - символ Кронекера);

- начальное состояние $x(0)$ имеет нормальное распределение с параметрами

$$E\left[x(0)\right]=\bar{x}(0)\,,$$

$$E\left\{\left[x(0)-\bar{x}(0)\right]\left[x(0)-\bar{x}(0)\right]^T\right\}=P(0)$$

и не коррелирует с $w(k)$ и $v(k+1)$ при любых значениях переменной k;

- неизвестные параметры сведены в вектор $\Theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s)$, включающий в себя элементы вектор - функций $f\left[x(k),u(k),k\right]$, $h\left[x(k+1),k+1\right]$, матриц $\Gamma(k)$, Q, R, $P(0)$ и вектора $\bar{x}(0)$ в различных комбинациях.

Необходимо для математической модели (1), (2) с учетом высказанных априорных предположений на основе метода статистической линеаризации (МСЛ) разработать процедуру оптимального оценивания параметров, исследовать ее эффективность и целесообразность применения. В такой постановке задача рассматривается и решается впервые.

2. Линеаризация модели

МСЛ (например, [17, 18]) применим к неоднозначным функциям и к существенным нелинейностям, имеющим характеристики с угловыми точками и разрывами, и заключается в приближенной замене нелинейной характеристики эквивалентной в вероятностном смысле линеаризованной функциональной зависимостью.

Считая значение вектора неизвестных параметров Θ фиксированным, выполним статистическую линеаризацию системы (1), (2). В соответствии с [19] получим:

$$f\left[x(k),u(k),k\right]\approx f_0\left[\bar{x}(k),P(k),u(k),k\right]+$$
$$+f_1\left[\bar{x}(k),P(k),u(k),k\right]\left[x(k)-\bar{x}(k)\right];\quad(3)$$

$$h\left[x(k+1),k+1\right]\approx h_0\left[\bar{x}(k+1),P(k+1),k+1\right]+$$
$$+h_1\left[\bar{x}(k+1),P(k+1),k+1\right]\left[x(k+1)-\bar{x}(k+1)\right],\quad(4)$$

где

$$f_0\left[\bar{x}(k),P(k),u(k),k\right]=$$
$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det\left(P(k)\right)}}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left[x(k),u(k),k\right]\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[x(k)-\bar{x}(k)\right]^T P^{-1}(k)\left[x(k)-\bar{x}(k)\right]\right\}dx(k)\quad(5)$$

$$f_1\left[\bar{x}(k),P(k),u(k),k\right]=\frac{\partial f_0\left[\bar{x}(k),P(k),u(k),k\right]}{\partial\bar{x}(k)};$$

$$h_0\left[\bar{x}(k+1),P(k+1),k+1\right]=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det\left(P(k+1)\right)}}\int_{-\infty}^{+\infty}h\left[x(k+1),k+1\right]\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[x(k+1)-\bar{x}(k+1)\right]^T P^{-1}(k+1)\right.$$
$$\left.\left[x(k+1)-\bar{x}(k+1)\right]\right\}dx(k+1);\quad(6)$$

$$h_1\left[\bar{x}(k+1),P(k+1),k+1\right]=$$
$$=\frac{\partial h_0\left[\bar{x}(k+1),P(k+1),k+1\right]}{\partial\bar{x}(k+1)};$$

$$\bar{x}(k)=E\left[x(k)\right]=$$
$$\begin{cases}\bar{x}(0), & \text{если } k=0;\\ f_0\left[\bar{x}(k-1),P(k-1),u(k-1),k-1\right], & \text{если } k=\overline{1,N-1};\end{cases}\quad(7)$$

$$P(k)=E\left\{\left[x(k)-\bar{x}(k)\right]\left[x(k)-\bar{x}(k)\right]^T\right\}=$$
$$=\begin{cases}P(0), \quad \text{если } k=0;\\ f_1\left[\bar{x}(k-1),P(k-1),u(k-1),k-1\right]P(k-1)\times\\ \quad\times f_1^T\left[\bar{x}(k-1),P(k-1),u(k-1),k-1\right]+\\ \quad+\Gamma(k)Q\Gamma^T(k), \quad \text{если } k=1,2,...,N-1\end{cases}\quad(8)$$

Отметим, что вычисление интегралов в формулах (5), (6) можно существенно упростить с помощью представленных в [18] выражений для коэффициентов статистической линеаризации типовых одномерных нелинейностей, встречающихся в системах автоматического управления.

Подставив соотношения (3), (4) в уравнения (1), (2) соответственно, с учетом обозначений

$$a\left[\bar{x}(k),P(k),u(k),k\right]=f_0\left[\bar{x}(k),P(k),u(k),k\right]-$$
$$-f_1\left[\bar{x}(k),P(k),u(k),k\right]\bar{x}(k);\quad(9)$$

$$\Phi\left[\bar{x}(k),P(k),u(k),k\right]=f_1\left[\bar{x}(k),P(k),u(k),k\right];\quad(10)$$

$$A\left[\bar{x}(k+1),P(k+1),k+1\right]=$$
$$=h_0\left[\bar{x}(k+1),P(k+1),k+1\right]-$$
$$-h_1\left[\bar{x}(k+1),P(k+1),k+1\right]\bar{x}(k+1);\quad(11)$$

$$H\left[\bar{x}(k+1),P(k+1),k+1\right]=$$
$$=h_1\left[\bar{x}(k+1),P(k+1),k+1\right],\quad(12)$$

приходим к следующей модели гауссовской линейной нестационарной системы:

$$x(k+1)=a\left[\bar{x}(k),P(k),u(k),k\right]+$$
$$+\Phi\left[\bar{x}(k),P(k),u(k),k\right]x(k)+\Gamma(k)w(k),\quad(13)$$

$$y(k+1)=A\left[\bar{x}(k+1),P(k+1),k+1\right]+$$
$$+H\left[\bar{x}(k+1),P(k+1),k+1\right]x(k+1)+v(k+1),$$
$$k=0,1,...,N-1.\quad(14)$$

Зависимость $a[\cdot]$, $\Phi[\cdot]$ от $\bar{x}(k),P(k),u(k)$ и $A[\cdot]$, $H[\cdot]$ от $\bar{x}(k+1)$, $P(k+1)$ в модели (13), (14) обуславливает необходимость учета в алгоритме вычисления ИМФ из [20] выражений (7), (8) и значительно усложняет вычисление производных ИМФ по компонентам входного сигнала. В целях упрощения обозначений условимся в дальнейшем опускать зависимость от $\bar{x}(\cdot)$, $P(\cdot)$, $u(\cdot)$ в выражениях для $a[\cdot]$, $\Phi[\cdot]$, $A[\cdot]$ и $H[\cdot]$, неявно предполагая ее. Например, вместо $a\left[\bar{x}(k),P(k),u(k),k\right]$ будем писать $a(k)$.

3. Оценивание неизвестных параметров

Оценивание неизвестных параметров математической модели осуществляется по данным наблюдений Ξ в соответствии с критерием идентификации $\chi(\theta)$. Сбор числовых данных происходит в процессе проведения идентификационных экспериментов, которые выполняются по некоторому плану ξ_ν.

Предположим, что экспериментатор может произвести ν запусков системы, причем сигнал U_1 он подает на вход системы k_1 раз, сигнал U_2 - k_2 раза и т.д., наконец, сигнал U_q - k_q раз. В этом случае дискретный (точный) нормированный план эксперимента ξ_ν представляет собой совокупность точек $U_1, U_2, \ldots, U_q$, называемых спектром плана, и соответствующих им долей повторных запусков:

$$\xi_\nu = \begin{Bmatrix} U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_q \\ \dfrac{k_1}{\nu},\ \dfrac{k_2}{\nu},\ \ldots,\ \dfrac{k_q}{\nu} \end{Bmatrix},\ U_i \in \Omega_U,\ i=1,2,\ldots,q.$$

Здесь

$$U_i^T = \left\{\left[u^i(0)\right]^T, \left[u^i(1)\right]^T, \ldots, \left[u^i(N-1)\right]^T\right\},$$

$i=1,2,\ldots,q$; $\Omega_U \subset R^{Nr}$ задает ограничения на условия проведения эксперимента.

Обозначим через $Y_{i,j}$ j - ю реализацию выходного сигнала ($j=1,2,\ldots,k_i$), соответствующую i - му входному сигналу U_i ($i=1,2,\ldots,q$). Тогда в результате проведения по плану ξ_ν идентификационных экспериментов будет сформировано множество

$$\Xi = \left\{\left(U_i, Y_{i,j}\right),\ j=1,2,\ldots,k_i,\ i=1,2,\ldots,q\right\},$$

$$\sum_{i=1}^{q} k_i = \nu.$$

Уточним структуру $Y_{i,j}$:

$$Y_{i,j}^T = \left\{\left[y^{i,j}(1)\right]^T, \left[y^{i,j}(2)\right]^T, \ldots, \left[y^{i,j}(N)\right]^T\right\},$$
$$j=1,2,\ldots,k_i,\ i=1,2,\ldots,q,$$

и заметим, что в случае пассивной параметрической идентификации, как правило, $q=\nu=1$.

Априорные предположения, высказанные в разделе 1, и выполненная в разделе 2 статистическая линеаризация моделей состояния и наблюдения позволяют воспользоваться для оценивания параметров методом максимального правдоподобия. В соответствии с этим методом необходимо найти такие значения параметров $\hat{\Theta}$, для которых

$$\hat{\Theta} = \arg\min_{\Theta\in\Omega_\Theta}\left[-\ln L(\Theta;\Xi)\right] = \arg\min_{\Theta\in\Omega_\Theta}\left[\chi(\Theta;\Xi)\right], \tag{15}$$

где в соответствии с [4,21]:

$$\chi(\Theta;\Xi) = \frac{Nm\nu}{2}\ln 2\pi + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{k_i}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\varepsilon^{i,j}(k+1)\right]^T\left[B^i(k+1)\right]^{-1}\left[\varepsilon^{i,j}(k+1)\right] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q}k_i\sum_{k=0}^{N-1}\ln\det B^i(k+1), \tag{16}$$

причем

$$\varepsilon^{i,j}(k+1) = y^{i,j}(k+1) - \hat{y}^{i,j}(k+1|k),$$

а $\hat{y}^{i,j}(k+1|k)$ и $B(k+1)$ определяются по соответствующим рекуррентным уравнениям дискретного фильтра Калмана [22]:

$$\hat{x}^{i,j}(k+1|k) = \Phi^i(k)\hat{x}^{i,j}(k|k) + a^i(k);$$
$$P^i(k+1|k) = \Phi^i(k)P^i(k|k)\left[\Phi^i(k)\right]^T + \Gamma(k)Q\Gamma^T(k);$$
$$\hat{y}^{i,j}(k+1|k) = H^i(k+1)\hat{x}^{i,j}(k+1|k) + A^i(k+1);$$
$$B^i(k+1) = H^i(k+1)P^i(k+1|k)\left[H^i(k+1)\right]^T + R;$$
$$K^i(k+1) = P^i(k+1|k)\left[H^i(k+1)\right]^T\left[B^i(k+1)\right]^{-1};$$
$$\hat{x}^{i,j}(k+1|k+1) = \hat{x}^{i,j}(k+1|k) + K^i(k+1)\varepsilon^{i,j}(k+1);$$
$$P^i(k+1|k+1) = \left[I - K^i(k+1)H^i(k+1)\right]P^i(k+1|k),$$

для $k=0,1,\ldots,N-1$ $i=1,2,\ldots,q$, $j=1,2,\ldots,k_i$ с начальными условиями $\hat{x}^{i,j}(0|0) = \bar{x}(0)$, $P(0|0) = P(0)$.

Для нахождения условного минимума $\chi(\Theta;\Xi)$ воспользуемся методом проекции градиента (например, [23,24]), учитывая, что

$$\frac{\partial\chi(\theta;\Xi)}{\partial\theta_l}=$$

$$=\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{k_i}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\frac{\partial\varepsilon^{i,j}(k+1)}{\partial\theta_l}\right]^T\left[B^i(k+1)\right]^{-1}\left[\varepsilon^{i,j}(k+1)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{k_i}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\varepsilon^{i,j}(k+1)\right]^T\left[B^i(k+1)\right]^{-1}\frac{\partial B^i(k+1)}{\partial\theta_l}\times$$

$$\times\left[B^i(k+1)\right]^{-1}\varepsilon^{i,j}(k+1)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q}k_i\sum_{k=0}^{N-1}Sp\left[\left[B^i(k+1)\right]^{-1}\frac{\partial B^i(k+1)}{\partial\theta_l}\right],$$

$$l=1,2,...,s.$$

4. Планирование оптимальных входных сигналов

Свобода в выборе входных сигналов существенно различается в зависимости от приложений. В экономических и экологических системах у экспериментатора нет возможности воздействовать на систему с целью проведения идентификационных экспериментов, в то время как в лабораторных условиях и на стадиях разработки нового оборудования выбор входных величин имеет лишь амплитудные и мощностные ограничения.

Предварим рассмотрение алгоритмов синтеза оптимальных входных сигналов изложением некоторых основополагающих понятий и результатов теории планирования эксперимента для нашего случая.

Под непрерывным нормированным планом ξ условимся понимать совокупность величин

$$\xi=\begin{Bmatrix}U_1,U_2,\ldots,U_q\\ p_1,p_2,\ldots,p_q\end{Bmatrix},\ p_i\ge 0,\ \sum_{i=1}^{q}p_i=1,\ U_i\in\Omega_U,$$

$$i=1,2,...,q. \quad (17)$$

В отличие от дискретного плана ξ_ν, веса p_i здесь могут принимать любые значения в диапазоне от 0 до 1, в том числе и иррациональные. Множество планирования Ω_U определяется ограничениями на условия проведения эксперимента.

Для плана (17) нормированная информационная матрица $M(\xi)$ определяется соотношением

$$M(\xi)=\sum_{i=1}^{q}p_iM(U_i), \quad (18)$$

в котором информационные матрицы Фишера одноточечных планов

$$M(U)=-\underset{Y}{E}\left[\frac{\partial^2\ln L(\Theta;Y_1^N)}{\partial\theta\partial\theta^T}\right]$$

зависят от неизвестных параметров Θ, что позволяет в дальнейшем говорить только о локально-оптимальном планировании. В [20] приводится алгоритм вычисления информационных матриц Фишера $M(U;\Theta)$ для модели (13), (14).

Качество оценивания параметров можно повысить за счет построения плана эксперимента, оптимизирующего некоторый выпуклый функционал Χ от информационной матрицы $M(\xi)$ путем решения экспериментальной задачи

$$\xi^*=\arg\min_{\xi\in\Omega_\xi}X[M(\xi)]. \quad (19)$$

Решая задачу планирования эксперимента, мы определенным образом воздействуем на нижнюю границу неравенства Рао-Крамера [4]: например, для D - оптимального плана минимизируем объем, для A – оптимального – сумму квадратов длин осей эллипсоида рассеяния оценок параметров.

При решении экстремальной задачи (19) возможны два подхода. Первый из них (прямой) предполагает поиск минимума функционала Χ[M(ξ)] непосредственно с привлечением методов нелинейного программирования. Возможные варианты прямой процедуры синтеза оптимальных входных сигналов представлены в [6, 14-16]. Другой подход (его называют двойственным) основан на теореме эквивалентности [25], обобщенная формулировка которой выглядит следующим образом.

Утверждения:

Табл. 1. Соответствие значений параметров теоремы эквивалентности критериям оптимальности

Критерий оптимальности	Параметры теоремы двойственности		
	$X\left[M(\xi)\right]$	$\mu(U,\xi)$	η
D	$-\ln\det M(\xi)$	$Sp\left[M^{-1}(\xi)M(U)\right]$	s
A	$Sp\left[M^{-1}(\xi)\right]$	$Sp\left[M^{-2}(\xi)M(U)\right]$	$Sp\left[M^{-1}(\xi)\right]$

1) план ξ^* минимизирует $X\left[M(\xi)\right]$;

2) план ξ^* минимизирует $\max\limits_{U\in\Omega_U}\mu(U,\xi)$;

3) $\max\limits_{U\in\Omega_U}\mu(U,\xi^*)=\eta$

эквивалентны между собой. Информационные матрицы планов, удовлетворяющих условиям 1-3, совпадают. Любая линейная комбинация планов, удовлетворяющих 1-3, также удовлетворяет 1-3. Выражения для $X\left[M(\xi)\right]$, ,$\mu(U,\xi),\eta$ приведены в Табл.1.

Приведем двойственную градиентную процедуру построения непрерывных оптимальных планов [5,25]:

Шаг 1. Зададим начальный невырожденный план ξ_0 и по формуле (18) вычислим нормированную матрицу $M(\xi_0)$ плана. Положим $l=0$.

Шаг 2. Найдём локальный максимум

$$U^l=\arg\max_{U\in\Omega_U}\mu(U,\xi_l)$$

методом проекции градиента. Если окажется, что $\left|\mu(U^l,\xi_l)-\eta\right|\le\delta$, закончим процесс.

Если $\mu(U^l,\xi_l)>\eta$, перейдём к шагу 3. В противном случае будем искать новый локальный максимум.

Шаг 3. Вычислим τ_l по формуле

$$\tau_l=\arg\min_{0\le\tau\le1}X\left[M\left(\xi_{l+1}^{\tau}\right)\right],$$

$$\xi_{l+1}^{\tau}=(1-\tau)\xi_l+\tau\xi(U^l),$$

где $\xi(U^l)$ - одноточечный план, размещенный в точке U^l.

Шаг 4. Составим план

$$\xi_{l+1}=(1-\tau_l)\xi_l+\tau_l\xi(U^l),$$

произведём его «очистку» в соответствии с рекомендациями из [5], положим $l=l+1$ и перейдём на шаг 2[2].

Приведённый алгоритм построения оптимальных сигналов требует вычисления градиента

$$\nabla_U\mu(U,\xi)=\left\|\frac{\partial\mu(U,\xi)}{\partial u_j(t)}\right\|,$$

$$t=0,1,...,N-1,\quad j=1,2,...,r.$$

Для критерия D – оптимальности получаем:

$$\frac{\partial\mu(U,\xi)}{\partial u_j(t)}=\frac{\partial Sp\left[M^{-1}(\xi)M(U)\right]}{\partial u_j(t)}=Sp\left[M^{-1}(\xi)\frac{\partial M(U)}{\partial u_j(t)}\right].$$

В случае критерия А – оптимальности

$$\frac{\partial\mu(U,\xi)}{\partial u_j(t)}=\frac{\partial Sp\left[M^{-2}(\xi)M(U)\right]}{\partial u_j(t)}=Sp\left[M^{-2}(\xi)\frac{\partial M(U)}{\partial u_j(t)}\right].$$

Основу рассмотренной процедуры синтеза входных сигналов составляют алгоритмы вычисления информационной матрицы одноточечного плана $M(U;\Theta)$ из [20] и её производных $\dfrac{\partial M(U;\Theta)}{\partial u_j(t)}$.

Практическое применение в процедуре активной параметрической идентификации построенного непрерывного оптимального плана

$$\xi^*=\begin{Bmatrix}U_1^*, U_2^*, ..., U_q^*\\ p_1^*, p_2^*, ..., p_q^*\end{Bmatrix},\ \sum_{i=1}^{q}p_i^*=1,\ p_i^*\ge0,$$

$$U_i^*\in\Omega_U,\ i=1,2,...,q$$

затруднено тем обстоятельством, что веса p_i^* представляют собой, вообще говоря, произвольные вещественные числа, заключенные в интервале от нуля до единицы. Несложно заметить, что в случае заданного числа ν возмож-

[2] Соответствие значений параметров $X\left[M(\xi)\right]$, $\mu(U,\xi)$, η двойственной процедуры критериям A- и D- оптимальности такое же, как в Табл. 1.

ных запусков системы величины $k_i^* = \nu p_i^*$ могут оказаться нецелыми числами. Проведение эксперимента требует округления величин k_i^* до целых чисел. Очевидно, что полученный в результате такого округления план будет отличаться от оптимального непрерывного плана, причем приближение тем лучше, чем больше число возможных запусков. Возможный алгоритм «округления» непрерывного плана до точного изложен в [8].

Разработанный в рамках системы MATLAB программный комплекс включает в себя модули, отвечающие за вычисление информационной матрицы и ее производных по компонентам входного сигнала, нахождение оценок неизвестных параметров методом максимального правдоподобия, синтез A- и D- оптимальных входных сигналов с использованием прямой и двойственной градиентных процедур.

5. Оптимальное оценивание параметров одной модельной структуры

Рассмотрим следующую модель стохастической нелинейной дискретной системы:

$$x(k+1) = x(k) + 0.05\theta\varphi(x(k),u(k)) + 0.05w(k), \quad (20)$$

$$y(k+1) = x(k+1) + v(k+1), \quad k = 0,1,...,N-1, \quad (21)$$

где

$$\varphi(x(k),u(k)) = \begin{cases} -25, \text{ если } u(k)-x(k) < 0.75, \\ 0, \text{ если } -0.75 \le u(k)-x(k) \le 0.75, \\ 25, \text{ если } u(k)-x(k) > 0.75; \end{cases}$$

θ - неизвестный параметр системы, причем $0.5 \le \theta \le 2$.

Будем считать, что выполнены все априорные предположения, высказанные в разделе 1, причем

$$\mathrm{E}\left[w(k)w(i)\right] = 0.4\delta_{ki} = Q\delta_{ki},$$

$$\mathrm{E}\left[v(k+1)v(i+1)\right] = 0.4\delta_{ki} = R\delta_{ki},$$

$$x(0) \in \mathrm{N}(0.5;0.05).$$

Выполнив статистическую линеаризацию модели (20), (21), получим линеаризованную модель вида (13), (14), в которой в соответствии с соотношениями (9)-(12)

$$a(k) = 1.25\theta\left[\Phi\left(\frac{0.75+u(k)-\bar{x}(k)}{\sqrt{P(k)}}\right) - \Phi\left(\frac{0.75-u(k)+\bar{x}(k)}{\sqrt{P(k)}}\right)\right] +$$

$$+\frac{1.25\theta\bar{x}(k)}{\sqrt{2\pi P(k)}}\left[\exp\left\{\frac{-(0.75+u(k)-\bar{x}(k))^2}{2P(k)}\right\} + \exp\left\{\frac{-(0.75-u(k)+\bar{x}(k))^2}{2P(k)}\right\}\right]$$

$$\varPhi(k) = 1 - \frac{1.25\theta}{\sqrt{2\pi P(k)}} \times$$

$$\times\left[\exp\left\{\frac{-(0.75+u(k)-\bar{x}(k))^2}{2P(k)}\right\} + \exp\left\{\frac{-(0.75-u(k)+\bar{x}(k))^2}{2P(k)}\right\}\right]$$

$$\varGamma(k) = 0.05\theta;\ A(k+1) = 0;\ H(k+1) = 1,$$

где $\Phi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\alpha} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ - функция Крампа (Лапласа), $\bar{x}(k)$ и $P(k)$ определяются по рекуррентным соотношениям

$$\bar{x}(k) = \bar{x}(k-1) +$$

$$+1.25\theta\left[\Phi\left(\frac{0.75+u(k-1)-\bar{x}(k-1)}{\sqrt{P(k-1)}}\right) - \Phi\left(\frac{0.75-u(k-1)+\bar{x}(k-1)}{\sqrt{P(k-1)}}\right)\right]$$

$$P(k) = f_1(k-1)P(k-1)f_1(k-1) + \varGamma(k)Q\varGamma(k)$$

$$f_1(k-1) = 1 - \frac{1.25\theta}{\sqrt{2\pi P(k-1)}}\left[\exp\left\{\frac{-(0.75+u(k-1)-\bar{x}(k-1))^2}{2P(k-1)}\right\} + \right.$$

$$\left. + \exp\left\{\frac{-(0.75-u(k-1)+\bar{x}(k-1))^2}{2P(k-1)}\right\}\right].$$

Таким образом, необходимо оценить параметр θ, входящий в $a(k)$, $\varPhi(k)$ и $\varGamma(k)$.

Выберем область планирования $\Omega_U = \left\{U \in R^N \,\middle|\, 25 \le u(k) \le 30,\ k = 0,1,...,N-1\right\}$ и критерий A – оптимальности.

Для того, чтобы ослабить зависимость результатов оценивания от выборочных данных, произведем пять независимых запусков системы и усредним полученные оценки неизвестных параметров. Реализации выходных сигналов получим компьютерным моделированием, считая, что истинное значение параметра $\theta^* = 1$ и $N = 31$.

О качестве идентификации в пространстве параметров и в пространстве откликов будем судить, соответственно, по значениям коэффициентов k_θ и k_Y, вычисляющихся по следующим формулам:

$$k_\theta = \frac{\left|\theta^* - \widehat{\theta}_{cp}\right|}{\left|\theta^* - \widehat{\theta}^*_{cp}\right|};$$

$$k_Y = \frac{\left\|Y_{cp} - \widehat{Y}_{cp}\right\|}{\left\|Y_{cp} - \widehat{Y}^*_{cp}\right\|} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{k=0}^{N-1}\left(y_{cp}(k+1) - \widehat{y}_{cp}(k+1\,|\,k+1)\right)^2}{\sum\limits_{k=0}^{N-1}\left(y_{cp}(k+1) - \widehat{y}^*_{cp}(k+1\,|\,k+1)\right)^2}},$$

где θ^* – истинное значение параметра; $\widehat{\theta}_{cp}$ – усредненная оценка неизвестного значения параметра по исходному входному сигналу; $\widehat{\theta}^*_{cp}$ – усредненная оценка неизвестного значения параметра по синтезированному входному сигналу; $Y_{cp} = \left\{y_{cp}(k+1), k = 0,1,...,N-1\right\}$, $\hat{Y}_{cp} = \left\{\hat{y}_{cp}(k+1\,|\,k+1), k = 0,1,...,N-1\right\}$, $\hat{Y}^*_{cp} = \left\{\hat{y}^*_{cp}(k+1\,|\,k+1), k = 0,1,...,N-1\right\}$ – усредненные по всем запускам последовательности измерений для θ, равного θ^*, $\widehat{\theta}_{cp}$, $\widehat{\theta}^*_{cp}$ соответственно, при некотором выбранном допустимом входном сигнале $U \in \Omega_U$; $\widehat{y}(k+1\,|\,k+1)$ находится при помощи равенства

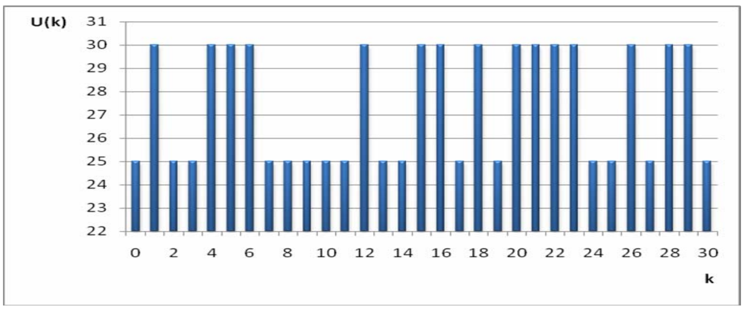
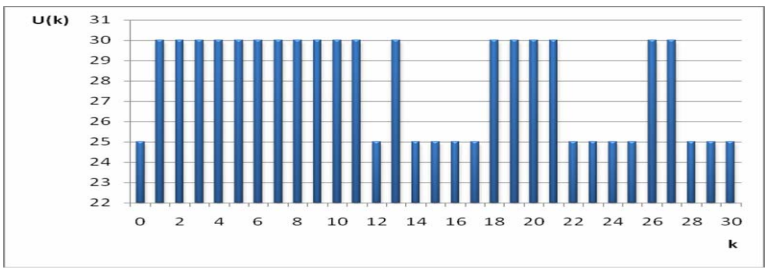
$$\widehat{y}(k+1\,|\,k+1) = A(k+1) + \mathrm{H}(k+1)\widehat{x}(k+1\,|\,k+1).$$

Результаты выполнения процедуры активной параметрической идентификации представлены в Табл. 2 (оптимальный план получился одноточечным).

Данные, приведенные в Табл. 2, показывают, что коэффициент $k_\theta \approx 9.2$. В пространстве откликов при псевдослучайном входном сигнале U, приведенном на Рис.1, $k_Y \approx 4.7$. При решении реальных задач истинные значения параметров неизвестны и, таким образом, сравнение качества оценок в пространстве параметров невозможно. Именно поэтому наиболее показательным является сравнение качества оценивания в пространстве откликов.

Результаты, представленные в данном разделе, показывают эффективность и целесооб-

Табл. 2. Результаты выполнения процедуры активной идентификации

Исходный и синтезированный входные сигналы	Номер запуска системы	Значения оценок параметра $\widehat{\theta}$
	1	0.662
	2	0.954
	3	0.969
	4	0.963
	5	0.941
	$\widehat{\theta}_{cp}$	0.899
	1	0.989
	2	1.011
	3	1.036
	4	0.997
	5	1.020
	$\widehat{\theta}^*_{cp}$	1.011

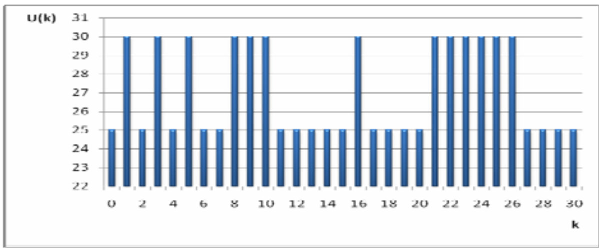


Рис.1. Тестовый сигнал для анализа качества прогнозирования на основе результатов из Табл.2

разность применения разработанной процедуры оптимального оценивания параметров при построении моделей стохастических нелинейных дискретных систем.

Заключение

Дано систематическое изложение наиболее существенных для практики вопросов теории и техники активной параметрической идентификации стохастических нелинейных дискретных систем. Впервые рассмотрена и решена задача оптимального оценивания на основе МСЛ для случая вхождения неизвестных параметров в уравнения состояния и наблюдения, начальные условия и ковариационные матрицы помех динамики и ошибок измерений. Расширен класс решаемых задач за счет возможности работать с моделями динамических систем, содержащих существенные нелинейные элементы. Разработаны оригинальные градиентные алгоритмы активной идентификации, позволяющие решать задачи оптимального оценивания параметров математических моделей методом максимального правдоподобия с привлечением прямой и двойственной процедур синтеза A - и D – оптимальных входных сигналов. На примере одной модельной структуры продемонстрирована эффективность и целесообразность применения разработанной процедуры оптимального оценивания параметров при построении моделей стохастических нелинейных дискретных систем.

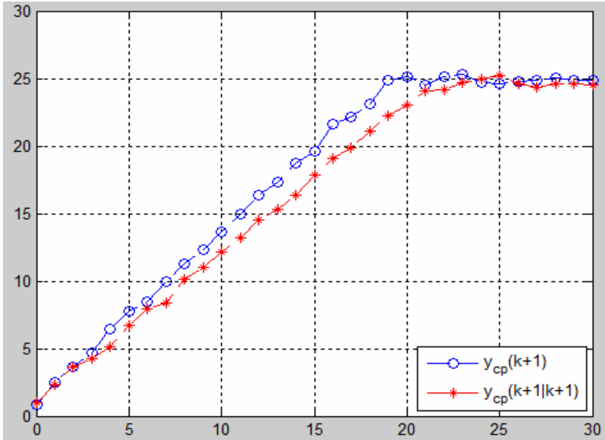


Рис. 2. Графическое представление Y_{cp} и $\hat{Y}_{cp}$ при U, изображенном на Рис.1

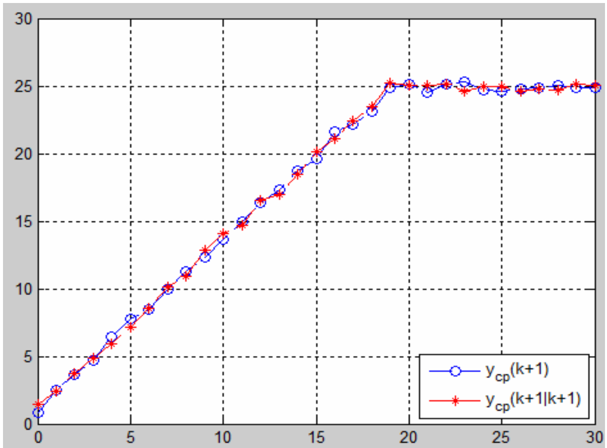


Рис. 3. Графическое представление Y_{cp} и $\hat{Y}^{*}_{cp}$ при U, изображенном на Рис.1

Литература

1. Спиди К., Браун Р., Гудвин Дж. Теория управления. Идентификация и оптимальное управление. – М.: Мир, 1973. - 248 с.
2. Сейдж Э. П., Мелса Дж. Л. Идентификация систем управления. - М.: Наука, 1974. - 246 с.
3. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. Оценивание параметров и состояния. - М.: Мир, 1975. - 683 с.
4. Льюнг Л. Идентификация систем: Теория для пользователя. - М.: Наука, 1991. – 432 с.
5. Федоров В. В. Теория оптимального эксперимента (планирование регрессионных экспериментов). - М.: Наука, 1971. – 312 с.
6. Денисов В. И. Математическое обеспечение системы ЭВМ – экспериментатор. - М.: Наука, 1977. – 251 с.
7. Горский В.Г., Адлер Ю.П., Талалай А.М. Планирование промышленных экспериментов (модели динамики). - М.: Металлургия, 1978. – 112 с.
8. Ермаков С.М., Жиглявский А.А. Математическая теория оптимального эксперимента. - М.: Наука, 1987. – 320 с.
9. Попов А.А. Оптимальное планирование эксперимента в задачах структурной и параметрической идентификации моделей многофакторных систем: диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук

(05.13.17 – теоретические основы информатики), Новосибирск, 1997.
10. Овчаренко В.Н. Планирование идентифицирующих входных сигналов в линейных динамических системах // АиТ. – 2001. - №2. - С. 75-87.
11. Орлов Ю.Ф. Активная идентификация объектов управления: диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук (05.13.01 – системный анализ, управление и обработка информации), М., 2006.
12. Jauberthie C., Denis-Vidal L., Coton P., Joly-Blanchard G. An optimal input design procedure // Automatica. – 2006. - V.42. - P. 881-884.
13. Денисов В.И., Еланцева И.Л., Чубич В.М. Активная идентификация стохастических линейных дискретных систем, описываемых моделями в пространстве состояний и ARMAX - моделями // Сиб. журн. индустр. матем. – 2000. - Т.3. - №1(5).- С. 87-100.
14. Денисов В.И., Чубич В.М., Черникова О.С. Активная параметрическая идентификация стохастических линейных дискретных систем во временной области // Сиб.журн.индустр.матем. – 2003. - Т.6. - №3(15). - С. 70-87.
15. Денисов В. И., Чубич В. М., Черникова О.С., Бобылева Д.И. Активная параметрическая идентификация стохастических линейных систем: монография. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2009.-192 с.
16. Chubich V.M. Application of methods of experiment design theory in problem of stochastic nonlinear discrete systems identification // Proc. of the IASTED international conferences on automation, control, and information technology (ACIT-CDA 2010). Novosibirsk, Russia, P. 272-279.
17. Казаков И. Е., Доступов Б.Г. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. – М.: Физматгиз, 1962. – 332 с.
18. Казаков И. Е. Статистические методы проектирования систем управления. - М.: Машиностроение, 1969. – 261 с.
19. Синицын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева. - М.: Логос, 2007. – 776 с.
20. Чубич В. М. Вычисление информационной матрицы Фишера в задаче активной параметрической идентификации стохастических нелинейных дискретных систем // Науч. вест. НГТУ. – 2009. - №1(34). – С. 23 – 40.
21. Áström K. J. Maximum likelihood and prediction errors methods // Automatica. - 1980.-V. 16. - P. 551 – 574.
22. Огарков М. А. Методы статистического оценивания параметров случайных процессов. – М.: Энергоатомиздат, 1980. – 208 с.
23. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование.– М.: Мир, 1982. – 583 с.
24. Сухарев А.Г., Тимохов В. В., Федоров В. В. Курс методов оптимизации.– М.:Наука, 1986. – 328 с.
25. Mehra R. K. Optimal input signals for parameter estimation in dynamic systems – survey and new results // IEEE Trans. Automat. Control. - 1974. - V. 19. - No. 6. - P. 753-768.

Чубич Владимир Михайлович. Доцент кафедры прикладной математики ГОУ ВПО «Новосибирский государственный технический университет». Окончил Новосибирский электротехнический институт в 1984 году. Кандидат технических наук, доцент. Имеет 40 печатных работ, в том числе одну монографию и 5 учебных пособий. Область научных интересов - анализ и планирование экспериментов для стохастических динамических систем. E-mail: chubich_62@ngs.ru.