Оценка области устойчивости нелинейной системы путем разбиения линейного блока на подсистемы

А.И. Баркин

Аннотация. Предлагается новый способ вычисления параметрической области устойчивости нелинейной системы регулирования, основанный на методе квадратичного преобразования вектора состояния. Для понижения размерности оптимизационной задачи вводится разбиение линейной части системы на два последовательно соединенных блока.

Ключевые слова. Нелинейные системы управления, абсолютная устойчивость, частотные критерии.

Введение

Рассматривается система регулирования, описываемая уравнениями:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b\xi(t), \tag{1}$$

$$\xi(t) = \varphi(\sigma, t), \tag{2}$$

$$\sigma(t) = c^T x(t), \tag{3}$$

где $x, b, c \in R^n$,. Постоянная $n \times n$ матрица A устойчива (гурвицева). Скалярная функция $\varphi(\sigma, t)$ удовлетворяет неравенству

$$0 \le \varphi(\sigma, t) / \sigma \le k\ . \tag{4}$$

Известен (см. обзорную работу [1]) так называемый круговой частотный критерий абсолютной устойчивости системы (1-4):

$$\mathrm{Re}\, W(i\omega) + k^{-1} > 0,\ \forall \omega \ge 0, \tag{5}$$

где $W(p) = c^T (A - pI)^{-1} b,$ - передаточная функция линейной части. Критерий (5) эффективно проверяется, поскольку имеет простую геометрическую интерпретацию, но во многих случаях слишком консервативен. В работах [2-4] методом квадратичного преобразования получен более сильный критерий.

$$\mathrm{Re}\, Q(\Phi(i\omega) + k^{-1} I) > 0,\ \forall \omega \ge 0, \tag{6}$$

где

$$\Phi(p) = 0{,}5 c_{[2]}^T (A_{[2]} - pI)^{-1} b_{[2]} \tag{7}$$

- $n \times n$ передаточная матрица, матрицы $A_{[2]}, b_{[2]}, c_{[2]}$ имеют размерности $m \times m$, $m \times n, m \times n$; $m = n(n+1)/2$. Матрица Q размерности $n \times n$ является положительно определенной несимметричной матрицей свободных параметров, подлежащих оптимизации. В [5] показано, что матрица $\Phi(p)$ может быть получена непосредственно по дробно-рациональной передаточной функции $W(p) = N(p)/D(p)$. Если система (1) записана в каноническом виде с матрицей Фробениуса A, то

$$\Phi(p) = W(pI - A) + R(pI - A), \tag{8}$$

где

$$W(pI - A) = N(pI - A)(D(pI - A))^{-1}, \ R(pI - A) = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T(pI - A) \\ c^T(pI - A)^2 \\ \dots \\ c^T(pI - A)^{n-1} \end{bmatrix} (D(pI - A))^{-1}. \tag{9}$$

При большой размерности n задача оптимизации критерия (6) по матрице свободных параметров Q становится довольно трудоемкой. Целью настоящей работы является понижение числа оптимизируемых параметров за счет разбиения линейной части системы на два последовательно соединенных блока.

Основной результат

Разобьем передаточную функцию линейной части в произведение передаточных функций с действительными коэффициентами:

$$W(p) = W_1(p) W_2(p). \tag{10}$$

Такому разбиению соответствуют уравнения

$$\dot{y} = By + f\xi, \tag{11}$$

$$\dot{z} = Cz + gh^T y, \tag{12}$$

$$\sigma = r^T z, (13)$$

где $y, d, h \in R^m$; $z, g, r \in R^q$. Очевидно, $W_1(p) = h^T(B - pI)^{-1} f$, $W_2 = r^T(pI - C)g$. В выражении $W_1(p)$ учтен отрицательный знак обратной связи.

Применяя квадратичное преобразование, получим

$$\dot{y}^{[2]} = B_{[2]} y^{[2]} + f_{[2]} \eta, \tag{14}$$

$$\dot{z}^{[2]} = C_{[2]} z^{[2]} + g_{[2]} z y^T h, \tag{15}$$

где $\eta = \xi y$.

Обозначим $N = yz^T$. В силу уравнений (11) и (12) получим

$$\dot{N} = BN + NC^T + f\xi z^T + 0{,}5 h_{[2]}^T y^{[2]} g^T. \tag{16}$$

Преобразуем (16) по Лапласу, принимая во внимание (14):

$$(B-0{,}5pI)\widetilde{N}(p)+\widetilde{N}(p)(C^{T}-0{,}5pI)=-f\widetilde{\gamma}^{T}(p)-0{,}5h_{[2]}^{T}(pI-B_{[2]})^{-1}f_{[2]}\widetilde{\eta}g^{T}, \qquad (17)$$

где волной сверху обозначены преобразования Лапласа от соответствующих функций, $\gamma(t)=\xi z$. Обозначим также

$$\Phi_1(p)=0{,}5h_{[2]}^{T}(B_{[2]}-pI)^{-1}f_{[2]}. \qquad (18)$$

При $\operatorname{Re} p\ge 0$ уравнение (17) можно рассматривать как аналог уравнения Ляпунова, которое имеет решение

$$\widetilde{N}(p)=\int_0^{\infty}e^{B\tau}f\widetilde{\gamma}^{T}(p)e^{C^{T}\tau}e^{-p\tau}d\tau-\int_0^{\infty}e^{B\tau}\Phi_1(p)\widetilde{\eta}(p)g^{T}e^{C^{T}\tau}e^{-p\tau}d\tau. \qquad (19)$$

В (15) участвует произведение $N^{T}h=zy^{T}h$. В соответствии с (19) получаем

$$\widetilde{N}^{T}h=M(p)\widetilde{\gamma}(p)-T(p)\Phi_1(p)\widetilde{\eta}(p) \qquad (20)$$

где

$$M(p)=\int_0^{\infty}h^{T}e^{B\tau}fe^{C\tau}e^{-p\tau}d\tau,\ \ T(p)=\int_0^{\infty}e^{C\tau}gh^{T}e^{B\tau}d\tau. \qquad (21)$$

Запишем неравенство (4) в новых координатах

$$\xi(r^{T}z-k^{-1}\xi)\ge 0. \qquad (22)$$

Умножив (22) на $y^{T}S_1y,\ S_1\ge 0$ получим

$$\eta^{T}S_1(Nr-k^{-1}\eta)\ge 0. \qquad (23)$$

Аналогично, умножая (22) на $z^{T}S_2z,\ S_2\ge 0$ получаем

$$\gamma^{T}S_2(0{,}5r_{[2]}^{T}z^{[2]}-k^{-1}\gamma)\ge 0. \qquad (24)$$

Для $\widetilde{N}r$ в (23) получаем

$$\widetilde{N}r=G(p)\widetilde{\gamma}(p)-F(p)\Phi_1(p)\widetilde{\eta}(p), \qquad (25)$$

где

$$G(p)=\int_0^{\infty}e^{B\tau}fr^{T}e^{C\tau}e^{-p\tau}d\tau,\ \ F(p)=\int_0^{\infty}r^{T}e^{C\tau}ge^{B\tau}e^{-p\tau}d\tau. \qquad (26)$$

Преобразуем по Лапласу уравнение (15)

$$\widetilde{z}^{[2]}(p)=(pI-C_{[2]})^{-1}g_{[2]}\widetilde{N}^{T}(p)h. \qquad (27)$$

Мы имеем два квадратичных неравенства (23) и (24), элементы которых связаны линейными соотношениями (20),(25) и (27). Такой ситуации соответствует квадратичный критерий Якубовича [6], согласно которому система абсолютно устойчива, если выполнено неравенство

$$\operatorname{Re}\{\widetilde{\eta}^{*}(i\omega)S_1(\widetilde{N}(i\omega)r-k^{-1}\widetilde{\eta}(i\omega))+\widetilde{\gamma}^{*}(i\omega)S_2(0{,}5r_{[2]}^{T}\widetilde{z}^{[2]}(i\omega)-k^{-1}\widetilde{\gamma}(i\omega))\}<0 \qquad (28)$$

для всех $\omega \geq 0$ и всех комплексных векторов $\tilde{\eta}, \tilde{\gamma}$. Отсюда получаем матричное неравенство

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Re} S_1(F(i\omega)\Phi_1(i\omega) + k^{-1}I) & -0{,}5(S_1 G(i\omega) + \Phi^*{}_1(i\omega)T^*(i\omega)\Phi_2{}^*(i\omega)S_2^T) \\ -0{,}5(G^*(i\omega)S_1^T + S_2\Phi_2(i\omega)T(i\omega)\Phi_1(i\omega)) & \operatorname{Re} S_2(\Phi_2(i\omega)M(i\omega) + k^{-1}I) \end{bmatrix} > 0,$$

где

$$\Phi_2(p) = 0{,}5 r_{[2]}^T (C_{[2]} - pI)^{-1} g_{[2]}. \tag{29}$$

Можно показать [6], что неравенство (28) эквивалентно неравенству

$$\operatorname{Re} S_1(F(i\omega)\Phi_1(i\omega) + k^{-1}I) - 0.25(S_1 G(i\omega) +$$
$$\Phi^*{}_1(i\omega)T^*(i\omega)\Phi_2{}^*(i\omega)S_2^T)(\operatorname{Re} S_2(\Phi_2(i\omega)M(i\omega) + k^{-1}I)^{-1}(G^*(i\omega)S_1^T + S_2\Phi_2(i\omega)T(i\omega)\Phi_1(i\omega)) > 0 \tag{30}$$

Теорема. Пусть существует такая положительно определенная $l \times l$ матрица S_2, для которой $\operatorname{Re} S_2(\Phi_2(i\omega)M(i\omega) + k^{-1}I) > 0,\ \forall \omega \geq 0$. Система (1)-(4) абсолютно устойчива, если существует такая положительно определенная матрица S_1 размерности $m \times m$, для которой при всех $\omega \geq 0$ выполнено неравенство (30).

Число свободных параметров в критерии (6) равно n^2, в то время как в критерии (30) это число равно $l^2 + (n-l)^2 \leq n^2,\ 0 \leq l \leq n$. Наибольший выигрыш по числу параметров можно получить при $m = l = n/2$, если n четное.

Пример. Рассмотрим систему второго порядка с передаточной функцией

$W(p) = \dfrac{1}{(p + a_1)(p + a_2)}$, где a_1, a_2 - положительные числа.

Пусть $W_1(p) = 1/(p + a_1),\ W_2(p) = 1/(p + a_2)$.

Соответствующие дифференциальные уравнения имеют вид

$$\dot{y} = -a_1 y - \xi,$$
$$\dot{z} = -a_2 z + y,$$
$$\sigma = z.$$

Простые выкладки приводят к следующим выражениям

$$\Phi_1(p) = \frac{1}{p + 2a_1},\ \Phi_2(p) = \frac{1}{p + 2a_2},$$

$$F(p) = T(p) = \frac{1}{p + a_1 + a_2},\ G(p) = M(p) = -\frac{1}{p + a_1 + a_2}.$$

Матрицы S_1, S_2 вырождаются в положительные числа. Обозначим

$$R_1(\omega) = \operatorname{Re}\frac{1}{(i\omega + a_1 + a_2)(i\omega + 2a_1)}, \quad R_2(\omega) = \operatorname{Re}\frac{1}{(i\omega + a_1 + a_2)(i\omega + 2a_2)}.$$

Неравенство (30) имеет в данном случае вид

$$S_1 S_2 (R_1(\omega) + k^{-1})(R_2(\omega) + k^{-1}) - 0{,}25\left|\frac{S_1}{i\omega + a_1 + a_2} + \frac{S_2}{(-i\omega + 2a_1)(-i\omega + a_1 + a_2)(-i\omega + 2a_2)}\right|^2 > 0.$$

Разделив на $S_1 S_2$, получим

$$(R_1(\omega) + k^{-1})(R_2(\omega) + k^{-1}) - 0{,}25\left|\frac{\mu^{-1}}{i\omega + a_1 + a_2} + \frac{\mu}{(-i\omega + 2a_1)(-i\omega + a_1 + a_2)(-i\omega + 2a_2)}\right|^2 > 0,$$

где $\mu = (S_2 / S_1)^{0,5}$. Минимизируя второе слагаемое по μ, получаем окончательно условие абсолютной устойчивости

$$(R_1(\omega) + k^{-1})(R_2(\omega) + k^{-1}) - 0{,}5\frac{(1 + (4a_1a_2 - \omega^2)/d)}{d(\omega^2 + (a_1 + a_2)^2)} > 0,\ d = (\omega^2 + 4a_1^2)(\omega^2 + 4a_2^2). \quad (31)$$

Отметим, что условие (31) не содержит свободных параметров.

При значениях $a_1 = a_2 = 0{,}5$ по круговому критерию получаем максимальное k=2.0, по критерию (31) $k = 2.82$. Критерий (6) дает $k = 2.87$, но этот результат достигнут численной оптимизацией по четырем свободным параметрам.

Заключение

Получен способ уменьшения размерности оптимизационной задачи, связанной с определением максимального сектора абсолютной устойчивости. Наибольший выигрыш по числу параметров получатся в том случае, когда размерности подсистем близки. Платой за уменьшение размерности является некоторое понижение точности по сравнению с критерием (6).

Литература

1. Либерзон М.Р. Очерки о теории абсолютной устойчивости//АиТ. 2006.№10.С.86.3
2. Баркин А.И., Зеленцовский А.Л. Критерий абсолютной устойчивости нелинейных систем управления //АиТ.1981. №7. С.5-10.
3. Баркин А.И. О соотношении между двумя критериями абсолютной устойчивости //АиТ. 1984. №1. С.36-41.
4. Баркин А.И., Зеленцовский А.Л. Абсолютная устойчивость систем регулирования с единственным нелинейным элементом. // ДАН СССР. 1984. Т.276. №4. С. 809-812.
5. Баркин А.И., Рокин Д.Н. Модернизация одного критерия абсолютной устойчивости //АиТ. 2008. №5. С. 15-24.
6. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия М.:Наука, 1978.

Баркин Александр Иванович. Главный научный сотрудник ИСА РАН. Окончил Московское высшее техническое училище им. Н.Э. Баумана в 1962 году. Доктор технических наук, профессор. Автор 50 научных трудов, в том числе 3-х монографий. Область научных интересов: теория автоматического управления, нелинейные системы, устойчивость. E-mail: barkin@isa.ru.