

# Моделирование динамики системы твердых и упругих тел в программном комплексе EULER

В.Г. Бойков, А.А. Юдаков

**Аннотация.** В статье представлены основные принципы моделирования, используемые в программном комплексе автоматизированного динамического анализа многокомпонентных механических систем EULER (ЭЙЛЕР). Приведено формализованное представление механической системы, основные принципы формирования и решения уравнений движения. Представлен вывод уравнений динамики упругих тел, подверженных малым деформациям и движущихся в составе системы. При этом используется метод конечных элементов, метод Крейга-Бэмптона для редуцирования матриц и приближение, более общее по сравнению с используемым в литературе.

**Ключевые слова:** механическая система, уравнения движения, уравнения связей, упругое тело, метод конечных элементов, метод Крейга-Бэмптона

## Введение

Программный комплекс EULER предназначен для математического моделирования динамического поведения многокомпонентных механических систем в трехмерном пространстве. Объектами моделирования могут быть механические системы из различных областей техники, например: автомобилестроения, авиации, ракетно-космической техники, машиностроения, робототехники, станкостроения и т.д.

При моделировании механических систем в EULER пользователю не требуется выводить уравнения движения или оперировать абстрактными математическими понятиями. Описание модели механической системы максимально приближено к реальной конструкции, что делает этот подход одинаково понятным как для инженера-механика, так и для математика-прикладника и других специалистов. Пользователь задает геометрические объекты, указывает звенья, шарниры, силовые элементы, при необходимости создает объекты контроля и управления с

соответствующими датчиками и приводами. Далее автоматически формируются точные в рамках классической механики уравнения движения в соответствии с описанием модели. Если в процессе движения механической системы происходят изменения в ее структуре, например, разрушаются или заклиниваются какие-то шарниры, включаются-выключаются каналы управления, то соответствующие уравнения автоматически переформируются. При проведении исследований пользователь может отображать ускорения, скорости, расстояния, углы и силы, возникающие в механической системе в процессе движения.

Целью данной статьи является описание основных принципов формирования и решения уравнений движения системы твердых и упругих тел, используемых в EULER. Алгоритмы формирования и решения уравнений движения системы твердых тел достаточно подробно рассмотрены в современной литературе (например, [1,2]). В EULER уравнения формируются в численной форме в абсолютных координатах

движения тел с произвольным типом накладываемых механических связей и произвольной структурой связей, включая кинематические контуры.

Для моделирования динамики упругих тел в настоящее время применяется множество подходов, каждый из которых ориентирован на определенную область практического применения. Наиболее гибким и универсальным методом приближенного решения обширного круга технических проблем является метод конечных элементов (МКЭ) [6,7]. В приложении к задачам динамики этот метод имеет свои особенности. Для динамики тела, подверженного лишь малым упругим деформациям, строгая теория разработана уже давно. Если же помимо малых деформаций приходится рассматривать большое движение тела как целого, оказывается необходимым учитывать инерционную связь между большими перемещениями тела и упругими деформациями. Эта область применения классического МКЭ получила серьезное развитие лишь в самое последнее время и количество публикаций по данной тематике до сих пор крайне ограничено [3-5]. В литературе при выводе уравнений движения в данной постановке вводится приближение, в соответствии с которым инерция тела сосредоточена в узлах МКЭ-модели. В настоящей работе представлен вывод уравнений движения деформируемого тела с использованием приближения, более общего по сравнению с общепринятым. При применении на практике разработанной методики оказывается возможным существенно расширить круг рассматриваемых задач и, кроме того, она позволяет преодолеть некоторые проблемы, возникающие при использовании широко распространенных МКЭ-пакетов.

## 1. Формализованное представление многокомпонентной механической системы

Под многокомпонентной механической системой понимается произвольная совокупность конечного числа твердых и упругих тел, взаимное движение которых может быть ограничено механическими связями. Между телами системы могут осуществляться также силовые взаи-

модействия, и система может подвергаться внешним силовым воздействиям. Система может также содержать каналы управления, формирующие движение тел в соответствии с заданными зависимостями.

На уровне формализованного представления многокомпонентная механическая система состоит из следующих основных элементов: звенья, упругие тела, механические связи, силовые элементы.

Звено - базовый элемент структуры механической системы. Звенья представляют собой твердые тела механической системы или интерфейсные узлы ее упругих тел. Каждое звено имеет жестко связанную с ним базовую систему координат звена (БСКЗ). Движение механической системы описывается математически как движение базовых систем координат звеньев относительно системы координат проекта (СКП) плюс изменение параметров деформации упругих тел. Уравнения движения механической системы формируются в предположении, что СКП является инерциальной системой координат. В механической системе выделяется одно неподвижное (инерциальное) звено, которое жестко связывается с СКП. На Рис. 1 дано схематическое представление механической системы.

Простейшим типом звена является твердое тело. Массово-инерционные характеристики твердого тела полностью определяются массой, координатами центра масс и тензором инерции. В некоторых практических случаях деформируемые конструкции могут моделироваться набором твердых тел - звеньев, которые связаны между собой механическими связями и силовыми элементами. При этом связи моделируют возможные относительные движения этих тел, а силовые элементы моделируют упругие и демпфирующие свойства конструкции. Но такой подход имеет существенные ограничения. Он не подходит для моделирования движения сложных пространственных упругих конструкций. В таких случаях необходимо использовать модели упругих тел.

Упругие тела используются для моделирования движения деформируемых конструкций. Упругое тело представляется совокупностью интерфейсных звеньев, взаимодействие которых между собой описывается уравнениями

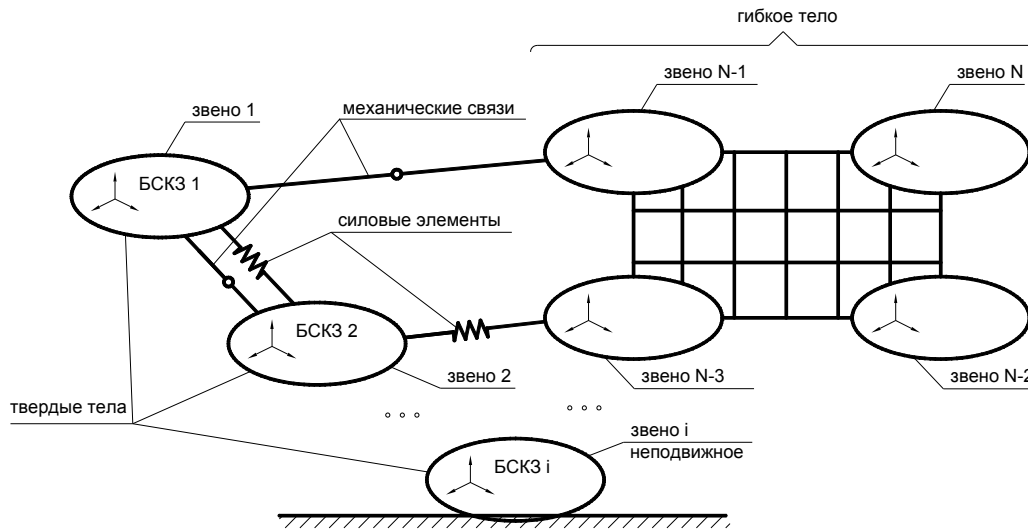


Рис. 1. Схематическое представление многокомпонентной механической системы

движения упругого тела. Эти уравнения будут рассмотрены ниже. Интерфейсные звенья упругого тела, как и другие звенья механической системы, могут использоваться при наложении механических связей и в соединениях с использованием силовых элементов.

Механическая связь представляет собой соединение звеньев, ограничивающее их относительное движение. Предполагается, что механическая связь только накладывает ограничения на относительное движение соединяемых звеньев, но сама она не обладает никакими массово-инерционными характеристиками. Кинематическая пара - частный случай механической связи, которая соединяет два звена. Кинематическая пара, например, вращательный или сферический шарнир, является наиболее распространенным подвижным соединением звеньев механической системы. В общем же случае кинематическая связь может соединять более двух звеньев. На каждом из звеньев, соединяемых механической связью, создается локальная система координат (ЛСК) связи, которая жестко связывается со звеном. Задание механической связи сводится к описанию возможных взаимных относительных положений, скоростей или ускорений ее локальных систем координат.

Силовые элементы используются для описания активных сил, действующих на звенья механической системы. К ним относятся силы упругости, демпфирующие силы, движущие силы

и силы сопротивления движению, силы гравитационного притяжения, силы воздействия внешней среды на звенья механической системы и т.д. Силовые элементы не имеют массово-инерционных характеристик. Они только создают силовые воздействия на звенья. Масса реального объекта, моделируемого силовым элементом, например, пружины или амортизатора, должна быть распределена по звеньям. Силовые воздействия, создаваемые силовыми элементами на звенья механической системы, могут зависеть от положения звеньев, их скоростей и времени. Воздействие силового элемента на звено описывается следующим образом:  $\mathbf{s}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = \{\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t), \mathbf{m}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)\}$ , где  $\mathbf{f}$  - сила, действующая на звено со стороны силового элемента;  $\mathbf{m}$  - момент силы, действующий на звено со стороны силового элемента;  $\mathbf{q}$  - вектор обобщенных координат, определяющих положение звеньев механической системы;  $\dot{\mathbf{q}}$  - производная вектора  $\mathbf{q}$  по времени;  $t$  - время. Здесь и далее через  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$  обозначается объединение в общий вектор-столбец любых вектор-столбцов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$ .

Силы и моменты реакций в механических связях не относятся к активным силам. Реакции в механических связях полностью определяются описанием связей, и для них не требуется специального описания в виде силовых элементов.

Помимо звеньев, упругих тел, механических связей и силовых элементов для описания модели многокомпонентной механической системы в EULER используются также программные движения, датчики, изменения механизма, события, условия начального состояния и другие типы объектов.

## 2. Уравнения движения твердого тела

Уравнения движения твердого тела в составе системы тел будем формировать в координатах движения соответствующей ему БСКЗ. Уравнения движения твердого тела в форме Ньютона-Эйлера имеют следующий вид:

$$m \cdot \mathbf{a}_{MC} = \mathbf{f}_a + \mathbf{f}_g + \mathbf{f}_r, \quad (1)$$

$$m \cdot \tilde{\rho}_{MC} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{m}_a + \tilde{\rho}_{MC} \cdot \mathbf{f}_g + \mathbf{m}_r, \quad (2)$$

где  $m$  - масса тела;  $\mathbf{a}_{MC}$  - ускорение центра масс тела относительно СКП;  $\mathbf{f}_a$  - сумма активных сил, действующих на тело (кроме гравитационных сил);  $\mathbf{f}_g$  - сумма гравитационных сил, действующих на тело;  $\mathbf{f}_r$  - сумма всех сил реакций связей;  $\rho_{MC}$  - радиус-вектор центра масс тела относительно центра БСКЗ;  $\mathbf{r}$  - радиус-вектор центра БСКЗ относительно центра СКП;  $\mathbf{J}$  - тензор инерции тела относительно центра БСКЗ;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  - угловое ускорение тела относительно СКП;  $\boldsymbol{\omega}$  - угловая скорость тела относительно СКП;  $\mathbf{m}_a$  - сумма моментов активных сил, действующих на тело (кроме гравитационных сил), относительно центра БСКЗ;  $\mathbf{m}_r$  - сумма всех моментов реакций связей относительно центра БСКЗ.

Ускорение центра масс тела выражается формулой:

$$\mathbf{a}_{MC} = \ddot{\mathbf{r}} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \rho_{MC} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \rho_{MC}; \quad (3)$$

Тогда уравнения твердого тела (1),(2) можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{a}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{s}_a + \mathbf{s}_g + \mathbf{k} + \mathbf{R}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{M}$  - обобщенная матрица масс тела:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m \cdot \mathbf{I} & -m \cdot \tilde{\rho}_{MC} \\ m \cdot \tilde{\rho}_{MC} & \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (5)$$

( $\mathbf{I}$  - единичная матрица размером  $3 \times 3$ );  $\mathbf{a}\boldsymbol{\varepsilon} = \{\mathbf{a}, \boldsymbol{\varepsilon}\}$  - вектор ускорений БСКЗ,  $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$ ;  $\mathbf{s}_a = \{\mathbf{f}_a, \mathbf{m}_a\}$  - обобщенная активная сила без учета гравитационных сил;  $\mathbf{s}_g = \{\mathbf{f}_g, \tilde{\rho}_{MC} \cdot \mathbf{f}_g\}$  - обобщенная сила гравитации;  $\mathbf{k} = \{-m \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \rho_{MC}, -\tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}\}$  - обобщенная сила инерции;  $\mathbf{R} = \{\mathbf{f}_r, \mathbf{m}_r\}$  - обобщенная сила реакции связей.

## 3. Уравнения движения упругого тела

Уравнения движения упругого тела выводятся в предположении, что оно совершает большое движение в составе механической системы и подвержено малым упругим деформациям. Абсолютное большинство реальных практических примеров, в которых приходится сталкиваться с моделированием движения деформируемых конструкций, подпадают под данный класс задач. При этом если данное ограничение принято, то для вывода уравнений динамики упругого тела оказывается возможным использовать классический метод конечных элементов (МКЭ) и редукцию модели методом Крейга-Бэмптона [8]. Метод Крейга-Бэмптона (связанных подструктур) – это метод редуцирования системы уравнений движения деформируемого тела, получаемых на основе МКЭ, путём аппроксимации малых упругих перемещений тела набором допустимых форм. Он состоит из пяти этапов:

1) деление узлов на граничные (интерфейсные) и внутренние; при этом в качестве граничных выбираются узлы прикрепления силовых элементов и шарниров и узлы, приближенное представление движения которых нежелательно;

2) расчет статических форм при единичных смещениях по всем степеням свободы граничных узлов;

3) расчет собственных форм колебаний при зажатых граничных степенях свободы;

4) построение модальной матрицы  $\mathbf{H}_F$ , редуцированных матриц масс  $\bar{\mathbf{M}}$  и жесткости  $\bar{\mathbf{C}}$ ;

5) ортонормализация базиса модального пространства на основе решения редуцированной обобщенной проблемы собственных значений;

получение модальной матрицы  $\mathbf{H}_R$ , ортонормальной относительно матриц МКЭ-модели.

Итак, пусть приняты следующие два положения: для получения матриц используется МКЭ; для редукции модели применяется метод Крейга-Бэмптона. При этом малые упругие перемещения тела аппроксимируются набором допустимых форм:  $\mathbf{x}_n = \mathbf{H}\mathbf{w}$ , где  $\mathbf{x}_n$  - реальные координаты всех узлов МКЭ-модели в собственной системе координат тела,  $\mathbf{w}$  - набор модальных координат размера  $H$ , где  $H$  - количество рассматриваемых форм. В качестве модальной матрицы  $\mathbf{H}$  может быть выбрана любая матрица, составленная из допустимых форм тела, в том числе матрица  $\mathbf{H}_F$  или  $\mathbf{H}_R$  из метода Крейга-Бэмптона. Основное преимущество применения редукции модели состоит в том, что получаемые матрицы имеют размер, который практически всегда несравнимо меньше размера матриц всей МКЭ-модели.

Уравнения динамики упругого тела выводятся на основе уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{s}, \quad (6)$$

где  $T$  - кинетическая энергия,  $U$  - потенциальная,  $\mathbf{q}$  - вектор обобщенных координат тела,  $\mathbf{s}$  - вектор обобщенных сил. В качестве  $\mathbf{q}$  выберем совокупность шестимерного вектора положения присоединенной системы координат тела  $\{\mathbf{r}, \boldsymbol{\varphi}\}$  и вектора модальных координат  $\mathbf{w}$ . Понятие присоединенной системы координат (ПСК) тела является основным при моделировании движения упругого тела в рассматриваемой постановке. Если тело не совершает упругих колебаний (заморожено), то всё движение тела определяется движением ПСК; она является собственной системой координат тела, в которой упругие перемещения аппроксимируются набором допустимых форм.

Для удобства записи формул примем следующие обозначения:  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}$ , где  $\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}$  - линейная и угловая скорости ПСК относительно системы координат проекта;  $\mathbf{q} = \mathbf{r}\boldsymbol{\varphi}\mathbf{w} = \{\mathbf{r}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{w}\}$ ,  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\xi} = \{\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\xi}\}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{a}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\zeta} = \{\mathbf{a}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\zeta}\}$ , где  $\mathbf{a}, \boldsymbol{\varepsilon}$  - линейное и угловое

ускорения ПСК тела относительно СКП;  $\boldsymbol{\xi} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ ,  $\boldsymbol{\zeta} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ . Обозначим через  $N$  - количество всех узлов тела, через  $\mathbf{H}_k$  - часть модальной матрицы размера  $6 \times H$ , относящаяся к  $k$ -ому узлу тела ( $\mathbf{x}_{n,k} = \mathbf{H}_k \mathbf{w}$  - шестимерный вектор положения  $k$ -ого узла),  $\mathbf{H}_k^r$  - поступательная часть  $\mathbf{H}_k$ ,  $\mathbf{H}_k^p$  - вращательная часть  $\mathbf{H}_k$ .

Рассмотрим все части уравнения Лагранжа (6) последовательно. Уравнение для расчета кинетической энергии МКЭ-модели тела известно:

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{v}_n^T \mathbf{M}_{FEM} \mathbf{v}_n, \quad (7)$$

где  $\mathbf{v}_n$  - вектор реальных скоростей всех узлов тела в ПСК,  $\mathbf{M}_{FEM}$  - матрица масс всей МКЭ-модели. При этом, если  $\mathbf{M}_{FEM}$  - матрица общего вида, получаемая из МКЭ, то можно вывести уравнения динамики упругого тела в самой общей постановке. Эти уравнения были получены, однако здесь они не приводятся в силу своей громоздкости (например, компоненты обобщенной матрицы масс выражаются через 18 матриц, каждая из которых записывается через блоки матрицы  $\mathbf{M}_{FEM}$ , части матрицы  $\mathbf{H}_k$  и другие величины); публикация данных результатов планируется в самое ближайшее время. После реализации разработанных методов на практике были выявлены различные серьезные проблемы, которые возникают при использовании широко распространенных МКЭ-пакетов для получения матриц модели, а также некоторые трудности, непосредственно связанные с использованием полученных уравнений; в данной статье они подробно не описываются. Далее приводится вывод уравнений динамики деформируемых конструкций методом «смещенных твердых тел» с использованием приближения, более общего по сравнению с общепринятым в литературе. Этот метод позволяет сгладить все недостатки применения классического МКЭ; уравнения, полученные этим методом, были реализованы в ПК EULER в качестве основного средства моделирования динамики упругих тел.

Итак, пусть дополнительно введено приближение: в массово-инерционном смысле, упругое тело заменяется набором твердых тел

с центрами масс в точках, которые отстоят от соответствующих узлов МКЭ-модели тела на некоторые известные вектора  $\mathbf{p}_{mc,k}$ ,  $k = \overline{1, N}$ . Тогда, выразив положения, линейные и угловые скорости каждого узла тела через обобщенные координаты и их производные, можно преобразовать формулу (7) к следующей:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}, \quad (8)$$

получив при этом выражение для расчета обобщенной матрицы масс  $\mathbf{M}$  в следующем блочном виде:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{rr} & \mathbf{J}_{r\varphi} & \mathbf{J}_{rw} \\ \mathbf{J}_{r\varphi}^T & \mathbf{J}_{\varphi\varphi} & \mathbf{J}_{\varphi w} \\ \mathbf{J}_{rw}^T & \mathbf{J}_{\varphi w}^T & \mathbf{J}_{ww} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где  $\mathbf{J}_{rr}$ ,  $\mathbf{J}_{rw}$ ,  $\mathbf{J}_{ww}$  - постоянны в ПСК,  $\mathbf{J}_{r\varphi}$ ,  $\mathbf{J}_{\varphi w}$  - линейно зависят от  $\mathbf{w}$ , а  $\mathbf{J}_{\varphi\varphi}$  - квадратично.

Формулы для этих компонент, так же как и в общей постановке, имеют достаточно объемную запись, однако оказываются гораздо более легкими с точки зрения количества арифметических операций; их публикация также планируется в ближайшее время. Далее, подставив формулу (8) в уравнение Лагранжа, можно записать выражения для соответствующих членов этого уравнения в виде:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{a} \boldsymbol{\xi} - \mathbf{k}, \quad (10)$$

где  $\mathbf{k}$  - вектор обобщенных сил инерции:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \{ -\bar{\mathbf{k}}_r, -\bar{\mathbf{k}}_\varphi, -\bar{\mathbf{k}}_w \}; \\ \bar{\mathbf{k}}_r &= \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_{r\varphi} \boldsymbol{\omega} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} (2\mathbf{J}_{rw} - \mathbf{I}_{r\varphi, H}) \boldsymbol{\xi}; \\ \bar{\mathbf{k}}_\varphi &= \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{J}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\omega} + (\tilde{\mathbf{v}} \mathbf{I}_{r\varphi, H} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_{\varphi w} + \mathbf{J}_{\varphi w}) \boldsymbol{\xi}; \\ \bar{\mathbf{k}}_w &= \mathbf{k}_{w, \varphi\varphi} + \mathbf{k}_{w, \varphi w} - \mathbf{I}_{r\varphi, H}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{v} + \mathbf{J}_{\varphi w}^T \boldsymbol{\omega}; \end{aligned} \quad (11)$$

компоненты векторов  $\mathbf{k}_{w, \varphi\varphi}$ ,  $\mathbf{k}_{w, \varphi w}$  равны:

$$\begin{aligned} k_{w, \varphi\varphi, i} &= -\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \left( \frac{\partial \mathbf{J}_{\varphi\varphi}}{\partial w_i} \right) \boldsymbol{\omega}, \\ k_{w, \varphi w, i} &= -\boldsymbol{\omega}^T \left( \frac{\partial \mathbf{J}_{\varphi w}}{\partial w_i} \right) \boldsymbol{\xi}, \quad i = \overline{1, H}, \end{aligned}$$

а  $\mathbf{I}_{r\varphi, H}$  - одна из матриц, через которые выражаются компоненты матрицы масс.

Потенциальная энергия тела равна:  $U = U_C + U_g$ , где  $U_C$  - потенциальная энергия упругих деформаций,  $U_g$  - потенциальная энергия гравитации. Используя формулу для энергии упругих деформаций МКЭ-модели тела:  $U_C = \frac{1}{2} \mathbf{x}_n^T \mathbf{C}_{FEM} \mathbf{x}_n$ , где  $\mathbf{C}_{FEM}$  - матрица жесткости всей МКЭ-модели тела, можно показать, что:  $\partial U_C / \partial \mathbf{q} = \mathbf{C} \mathbf{q}$ , где  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix}$  - обобщенная матрица жесткости,  $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{H}^T \mathbf{C}_{FEM} \mathbf{H}$  - редуцированная матрица жесткости из метода Крейга-Бэмптона; значит, обобщенная сила упругости равна:

$$\mathbf{s}_u = -\mathbf{C} \cdot \mathbf{r} \mathbf{w}. \quad (12)$$

Обобщенную силу гравитации можно выразить в виде:

$$\mathbf{s}_g = \mathbf{M} \mathbf{g}, \quad (13)$$

поскольку  $\partial U_g / \partial \mathbf{q} = -\mathbf{M} \mathbf{g}$ , где  $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_r; \mathbf{0}; \mathbf{0})$  - обобщенный вектор ускорения свободного падения,  $\mathbf{g}_r$  - обычный вектор ускорения свободного падения.

Обобщенные силы  $\mathbf{s}$  из правой части уравнения Лагранжа представляют собой сумму активных сил, сил демпфирования и сил реакции связей. Математическая модель демпфирования строится известными методами на основе диссипативной функции Рэлея:  $R = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}$ ; обобщенная сила демпфирования при этом равна:

$$\mathbf{s}_d = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{v} \boldsymbol{\xi}. \quad (14)$$

Обобщенную матрицу демпфирования можно записать в виде:  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{D}} \end{bmatrix}$ , где  $\bar{\mathbf{D}}$  получается либо методом Рэлея:  $\bar{\mathbf{D}} = \alpha \bar{\mathbf{C}} + \beta \bar{\mathbf{M}}$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  - некоторые константы, либо на основе представления свободных колебаний тела набором независимых уравнений движения с одной степенью свободы, тогда:  $\bar{\mathbf{D}} = \text{diag}(d_1; \dots; d_H)$ , где  $d_k = 2\gamma_k \omega_k$ ,  $\gamma_k$  - доля критического затухания соответствующей формы,  $\omega_k$  - ее собственная частота колебаний.

Рассмотрим далее сосредоточенные активные силы, действующие на тело. Пусть к  $k$ -ому интерфейсному узлу приложены сила  $\mathbf{f}_k$  и момент  $\mathbf{m}_k$  в точке, отстоящей от этого узла на вектор  $\mathbf{p}_{f,k}$ . Из условия равенства виртуальных работ на возможных перемещениях по обобщенным координатам получим (суммирование ведется по всем узлам тела, к которым приложены силы):

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_a &= \sum_k (\mathbf{s}_{r,k}, \mathbf{s}_{\varphi,k}, \mathbf{s}_{w,k}), \\ \mathbf{s}_{r,k} &= \mathbf{s}_{n,r,k}, \\ \mathbf{s}_{\varphi,k} &= \mathbf{s}_{n,\varphi,k} + (\mathbf{p}_k + \mathbf{H}_k^r \mathbf{w}) \cdot \mathbf{s}_{n,r,k}, \\ \mathbf{s}_{w,k} &= \mathbf{H}_k^T \cdot \mathbf{s}_{n,k}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь  $\mathbf{s}_{n,k} = (\mathbf{s}_{n,r,k}, \mathbf{s}_{n,\varphi,k}) = (\mathbf{f}_k, \mathbf{m}_k + \tilde{\mathbf{p}}_{f,k} \mathbf{f}_k)$  - приложенная сила, приведенная к соответствующему узлу.

Сводя все части уравнения Лагранжа (6) воедино, получаем уравнение для расчета динамики деформируемого тела:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{a}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{s}_a + \mathbf{s}_g + \mathbf{s}_u + \mathbf{s}_d + \mathbf{k} + \mathbf{R}, \quad (16)$$

где  $\mathbf{M}$  - обобщенная матрица масс (9);  $\mathbf{s}_a$  - обобщенные активные силы (15);  $\mathbf{s}_g$  - обобщенная сила гравитации (13);  $\mathbf{s}_u$  - сила упругости (12);  $\mathbf{s}_d$  - сила демпфирования (14);  $\mathbf{k}$  - обобщенные силы инерции (11);  $\mathbf{R}$  - обобщенные силы реакции связей.

#### 4. Уравнения связей

Введем следующий вектор обобщенных координат локальных систем координат (ЛСК) связи

$$\mathbf{q}_c = \{\mathbf{q}_{c,1}, \dots, \mathbf{q}_{c,i}, \dots, \mathbf{q}_{c,NL}\},$$

где  $\mathbf{q}_{c,i} = \{\mathbf{r}_{c,i}, \boldsymbol{\varphi}_{c,i}\}$  - шестимерный вектор положения  $i$ -й ЛСК связи;  $NL$  - число ЛСК связи.

Рассмотрим двусторонние (удерживающие) связи. Такие связи описываются следующими уравнениями:

$$g_h(\mathbf{q}_c, t) = 0; \quad (17)$$

$$g_n(\dot{\mathbf{q}}_c, \mathbf{q}_c, t) = 0. \quad (18)$$

Уравнение (17) описывает голономную связь. Уравнение (18) описывает неголономную связь. Путем двукратного дифференцирования уравнения (17) или однократного дифференцирования уравнения (18) получаем уравнение ускорений для связи, которое можно представить в следующем виде

$$\mathbf{G}_c \cdot \ddot{\mathbf{q}}_c = -h_c, \quad (19)$$

где  $\mathbf{G}_c$  - вектор-строка производных уравнения связи, для голономной связи  $\mathbf{G}_c = \nabla_{\mathbf{q}_c} g_h$ , для неголономной связи  $\mathbf{G}_c = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}_c} g_n$ ;  $h_c(\dot{\mathbf{q}}_c, \mathbf{q}_c, t)$  - представляет собой ускорение нарушения связи при отсутствии ускорений ЛСК связи.

В уравнении (19) для всех ЛСК проведем замену ускорения  $i$ -й ЛСК связи  $\ddot{\mathbf{q}}_{c,i}$  на  $\ddot{\mathbf{q}}_i$  - ускорения обобщенных координат звена, к которому она прикреплена. Если звено, с которым связана  $i$ -я ЛСК, является твердым телом, то  $\ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{a}\boldsymbol{\xi}_i$ , где  $\mathbf{a}\boldsymbol{\xi}_i$  - обобщенный вектор ускорений соответствующего твердого тела. Если звено, с которым связана  $i$ -я ЛСК, является упругим телом, то  $\ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{a}\boldsymbol{\xi}_i$ , где  $\mathbf{a}\boldsymbol{\xi}_i$  - обобщенный вектор ускорений соответствующего упругого тела. В обоих случаях

$$\mathbf{G}_{c,i} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_{c,i} = \mathbf{G}_i \cdot \ddot{\mathbf{q}}_i + h_{a,i}, \quad (20)$$

где  $\mathbf{G}_{c,i} = \{\mathbf{G}_{cr,i}, \mathbf{G}_{c\varphi,i}\}$  - шестимерный вектор-строка производных уравнения связи по переменным  $i$ -й ЛСК.

Если звено, с которым связана  $i$ -я ЛСК, является твердым телом, то

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_i &= \{\mathbf{G}_{r,i}, \mathbf{G}_{\varphi,i}\}; \\ \mathbf{G}_{r,i} &= \mathbf{G}_{cr,i}; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\varphi,i} &= \mathbf{G}_{c\varphi,i} - \mathbf{G}_{cr,i} \cdot \tilde{\mathbf{p}}_{c,i}; \\ h_{a,i} &= (\mathbf{G}_{cr,i} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \mathbf{p}_{c,i}), \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\mathbf{p}_{c,i}$  - радиус-вектор центра  $i$ -й ЛСК связи относительно центра БСКЗ звена, с которым она связана;  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i$  - угловая скорость БСКЗ звена, с которым связана  $i$ -я ЛСК связи, относительно СКП.

Если звено, с которым связана  $i$ -я ЛСК, является упругим телом, то

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_i &= \{\mathbf{G}_{r,i}, \mathbf{G}_{\varphi,i}, \mathbf{G}_{w,i}\}; \\ \mathbf{G}_{r,i} &= \mathbf{G}_{cr,i}; \end{aligned}$$

$$\mathbf{G}_{\varphi,i} = \mathbf{G}_{c\varphi,i} - \mathbf{G}_{cr,i} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\rho}}_{k,i} + \mathbf{H}_{k,i}^r \mathbf{w}_i + \boldsymbol{\rho}_{c,i}); \quad (23)$$

$$\mathbf{G}_{w,i} = \mathbf{G}_{cr,i} \cdot \mathbf{H}_{k,i}^r + (-\mathbf{G}_{cr,i} \cdot \tilde{\boldsymbol{\rho}}_{c,i} + \mathbf{G}_{c\varphi,i}) \cdot \mathbf{H}_{k,i}^\varphi;$$

$$\mathbf{h}_{a,i} = -\mathbf{G}_{cr,i} \left[ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i (\boldsymbol{\rho}_{k,i} + \mathbf{H}_{k,i}^r \mathbf{w}_i + \boldsymbol{\rho}_{c,i}) + \right. \\ \left. + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{H}_{k,i}^r \boldsymbol{\xi}_i + (\tilde{2\boldsymbol{\omega}}_i + \mathbf{H}_{k,i}^\varphi \boldsymbol{\xi}_i) (\tilde{\mathbf{H}}_{k,i}^\varphi \boldsymbol{\xi}_i) \boldsymbol{\rho}_{c,i} \right]. \quad (24)$$

Введем общий вектор параметров положения всех твердых и упругих тел механической системы:

$$\mathbf{q} = \{\mathbf{r}\boldsymbol{\varphi}_1, \mathbf{r}\boldsymbol{\varphi}_2, \dots, \mathbf{r}\boldsymbol{\varphi}_{NR}, \mathbf{r}\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{r}\boldsymbol{\omega}_2, \dots, \mathbf{r}\boldsymbol{\omega}_{NF}\}, \quad (25)$$

где  $NR$  - количество твердых тел в механической системе;  $NF$  - количество упругих тел в механической системе. Общую размерность вектора  $\mathbf{q}$  обозначим  $N$ . Используя (20),(21), уравнение ускорения связи (19) можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{G} \cdot \ddot{\mathbf{q}} = -\left(h_c + \sum_{i=1}^{NL} h_{a,i}\right) = -h, \quad (26)$$

где  $\mathbf{G}$  - вектор-строка производных нарушения связи по параметрам изменения состояния тел механической системы;  $h$  - нарушение ускорения связи, возникающее при отсутствии ускорений параметров положения тел. Элементы вектора  $\mathbf{G}$  в уравнении (26) определяются по (21), если соответствующая ЛСК связи связана с твердым телом, по (23) – если соответствующая ЛСК связи связана с упругим телом (его интерфейсным звеном), или равны нулю, если отсутствует ЛСК связи, связанная с соответствующим телом. Элементы  $h_{a,i}$  в уравнении (26) определяются по (22), если  $i$ -я ЛСК связи связана с твердым телом, по (24) – если  $i$ -я ЛСК связи связана с упругим телом.

Собрав уравнения (26) всех связей механической системы в одну систему уравнений, получаем

$$\mathbf{G} \cdot \ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{h}, \quad (27)$$

где  $\mathbf{G}$  - матрица размером  $NC \times N$  ( $NC$  - общее число связей), строки которой представляют собой векторы  $\mathbf{G}$  из (26);  $\mathbf{h}$  - вектор-столбец размером  $NC$ , элементами которого являются значения  $h$  из (26).

Механические связи, которые существуют в реальных механических системах, как правило, не являются идеальными. Неидеальные связи можно моделировать как совокупность идеаль-

ной связи и активного силового воздействия, нарушающего идеальность связи. Как правило, таким силовым воздействием является трение. Таким образом, далее будем предполагать, что рассматриваемые механические связи являются идеальными. Можно показать, что вектор реакций идеальной связи, действующих на ЛСК, может быть выражен в следующем виде

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{G}_c^T \cdot \boldsymbol{\lambda},$$

где  $\boldsymbol{\lambda}$  - неопределенный множитель, значение которого задает величину реакции.

## 5. Расчет динамического состояния системы тел

Под расчетом динамического состояния системы тел понимается расчет вектора ускорений движения тел  $\ddot{\mathbf{q}}$  и сил, действующих в системе, включая реакции связей. Используя вектор параметров положения тел механической системы (25), уравнения движения твердых (4) и упругих (16) тел можно записать в виде одной системы уравнений

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{S} + \mathbf{K} + \mathbf{R}, \quad (28)$$

где  $\mathbf{M}$  - квадратная блочно-диагональная матрица масс;  $\mathbf{S}$  - суммарный вектор активных сил равный  $\mathbf{s}_a + \mathbf{s}_g$  для твердых тел и  $\mathbf{s}_a + \mathbf{s}_g + \mathbf{s}_u + \mathbf{s}_d$  для упругих тел;  $\mathbf{K}$  - вектор сил инерции;  $\mathbf{R}$  - вектор реакций связей. Можно показать, что

$$\mathbf{R} = \mathbf{G}^T \cdot \boldsymbol{\lambda}, \quad (29)$$

где  $\mathbf{G}^T$  - транспонированная матрица  $\mathbf{G}$  из (27);  $\boldsymbol{\lambda}$  - вектор множителей реакций связей длиной  $NC$ .

Используя (28), (29) и (27) запишем систему уравнений движения тел механической системы с учетом связей

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{S} + \mathbf{K} + \mathbf{G}^T \cdot \boldsymbol{\lambda}; \quad (30)$$

$$\mathbf{G} \cdot \ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{h}.$$

Предполагается, что перед расчетом динамического состояния системы тел положение и скорости тел (векторы  $\mathbf{q}$  и  $\dot{\mathbf{q}}$ ) известны. В соответствии с их значениями определены все активные силы  $\mathbf{S}$ , силы инерции  $\mathbf{K}$ , матрица связей  $\mathbf{G}$  и вектор  $\mathbf{h}$ . Обратив матрицу  $\mathbf{M}$  из первого уравнения системы (30) получаем



$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{S} + \mathbf{K}) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}^T \cdot \boldsymbol{\lambda}. \quad (31)$$

Подставив (31) во второе уравнение системы (30), получаем линейную систему уравнений для определения множителей реакций связей  $\boldsymbol{\lambda}$

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{b}, \quad (32)$$

где  $\mathbf{A} = \mathbf{GM}^{-1}\mathbf{G}^T$ ;  $\mathbf{b} = -\mathbf{GM}^{-1}(\mathbf{S} + \mathbf{K}) - \mathbf{h}$ .

После определения вектора  $\boldsymbol{\lambda}$  из решения системы уравнений (32) определяются значения вектора ускорений тел  $\ddot{\mathbf{q}}$  в соответствии с (31).

## 6. Расчет движения системы тел

Расчет движения системы тел производится путем численного интегрирования вектора ускорений  $\ddot{\mathbf{q}}$ , значение которого определяется в результате расчета динамического состояния системы тел. Уравнения ускорений связей в системе (30) являются неустойчивыми в плане получаемого решения исходных уравнений связей (17),(18). В процессе численного интегрирования эти уравнения нарушаются, то есть связи расходятся. Для парирования этих нарушений в программном комплексе EULER предусмотрена стабилизация связей и коррекция положения и скоростей звеньев механической системы. Стабилизация связей выполняется всегда в процессе расчетов, а коррекция положения и скоростей может включаться/выключаться пользователем.

Стабилизация связей представляет собой процесс управляемого уменьшения погрешностей соблюдения связей путем введения в уравнения ускорения связей специальных стабилизирующих добавок. С учетом стабилизирующего добавка уравнение ускорения связи имеет следующий вид

$$\mathbf{G} \cdot \ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{h} - \Delta\ddot{\mathbf{g}} = -(\mathbf{h} + \Delta\ddot{\mathbf{g}}),$$

где  $\Delta\ddot{\mathbf{g}}$  - стабилизирующий добавок ускорения связи, предназначенный для ее возвращения в корректное состояние. Значение стабилизирующего добавка ускорения определяется следующим образом

$$\Delta\ddot{\mathbf{g}} = k_0 \cdot \Delta\mathbf{g} + k_1 \cdot \Delta\dot{\mathbf{g}}, \quad (33)$$

где  $\Delta\mathbf{g}, \Delta\dot{\mathbf{g}}$  - текущие невязки положения и скорости связи;  $k_0, k_1$  - коэффициенты закона стабилизации. Значения коэффициентов  $k_0, k_1$

должны обеспечивать устойчивость процесса стабилизации. В качестве исходных параметров регулирования стабилизации задаются период колебаний  $T_s$  и коэффициент затухания  $\xi_s$  процесса стабилизации. Уравнение (33) является обычным уравнением колебаний 2-го порядка, отсюда получаем

$$k_0 = -\left(\frac{2\pi}{T_s}\right)^2, \quad k_1 = -\frac{4 \cdot \pi \cdot \xi_s}{T_s}.$$

Введение стабилизирующих добавков в уравнения ускорений связей не изменяет схему расчета динамического состояния системы тел. С их учетом правая часть системы уравнений (32) принимает следующий вид

$$\mathbf{b} = -\mathbf{GM}^{-1}(\mathbf{S} + \mathbf{K}) - (\mathbf{h} + \Delta\ddot{\mathbf{g}}),$$

где  $\Delta\ddot{\mathbf{g}}$  - вектор стабилизирующих добавков ускорений для всех связей.

Коррекция положения и скоростей звеньев механической системы выполняется для одновременной ликвидации нарушений всех связей. Коррекция скоростей производится в соответствии с гипотезой абсолютно пластического мгновенного удара в связях. Для коррекции скоростей определяются множители ударных импульсов в связях из решения следующей системы уравнений

$$\mathbf{GM}^{-1}\mathbf{G}^T \cdot \boldsymbol{\lambda}_v = \Delta\dot{\mathbf{g}},$$

где  $\Delta\dot{\mathbf{g}}$  - вектор невязок скоростей в связях;  $\boldsymbol{\lambda}_v$  - вектор множителей ударных импульсов в связях, компенсирующих невязки скоростей. Коррекция скоростей звеньев механической системы определяется следующим выражением

$$\Delta\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}^T \cdot \boldsymbol{\lambda}_v.$$

Коррекция положения звеньев механической системы производится аналогично коррекции скоростей, но в отличие от нее задача коррекции положения является нелинейной и решается методом Ньютона. На каждой итерации определяются множители  $\boldsymbol{\lambda}_p$ , аналогичные множителям ударных импульсов в связях, из решения следующей системы уравнений

$$\mathbf{GM}^{-1}\mathbf{G}^T \cdot \boldsymbol{\lambda}_p = \Delta\mathbf{g},$$

где  $\Delta\mathbf{g}$  - вектор невязок положения в связях. Коррекция положения звеньев механической системы на текущей итерации определяется выражением

$$\Delta q = M^{-1} G^T \cdot \lambda_p.$$

Для численного интегрирования уравнений движения в программном комплексе EULER пользователь может выбрать любой реализованный в нем метод. В настоящее время в программном комплексе реализованы: метод Рунге-Кутты четвертого порядка, метод Рунге-Кутты-Фелберга четвертого/пятого порядков с автоматической коррекцией шага, многшаговые методы Адамса различных порядков аппроксимации, неявные методы Эйлера, Парка, модифицированный метод Ньюмарка и другие методы.

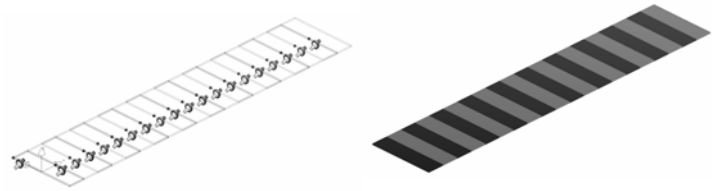


Рис. 2. Цепочка тел

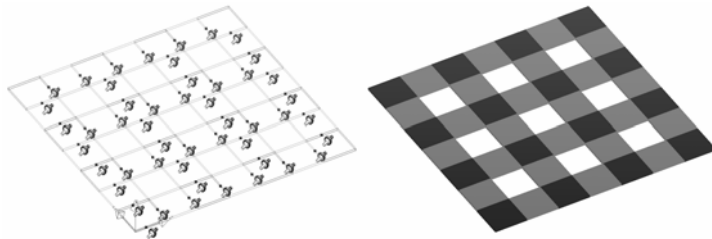


Рис. 3. Сетка тел

### 7. Точность и время расчета

Для проверки точности расчетов ПК EULER студентами и преподавателями МГУ им. М.В. Ломоносова было проведено решение большого количества различных задач по теоретической механике. Решение этих задач показало, что практически всегда точность, получаемая в EULER, при соответствующем задании параметров численного решения, составляет не менее шести значащих цифр. Это значительно выше точности, которая обычно требуется при проведении инженерных расчетов.

Матрицы формируемых в EULER уравнений движения механической системы являются сильно разреженными, благодаря чему время расчета практически линейно зависит от числа тел исследуемой системы. На Рис. 2 и Рис.3 представлены примеры двух типов тестовых задач: цепочка одинаковых тел, соединенных шаровыми шарнирами, и прямоугольная решетка одинаковых тел. Движение систем происходит под действием гравитации. На Рис. 4 представлены графики времени решения этих задач в зависимости от количества тел. Решение проводилось на персональном компьютере с процессором Genuine Intel (R) CPU T2500 @ 2.00 GHz. Для численного интегрирования использовался метод Рунге-Кутты с постоянным шагом 0.001 сек. Длительность процесса движения систем 1 сек. Коррекция положения и

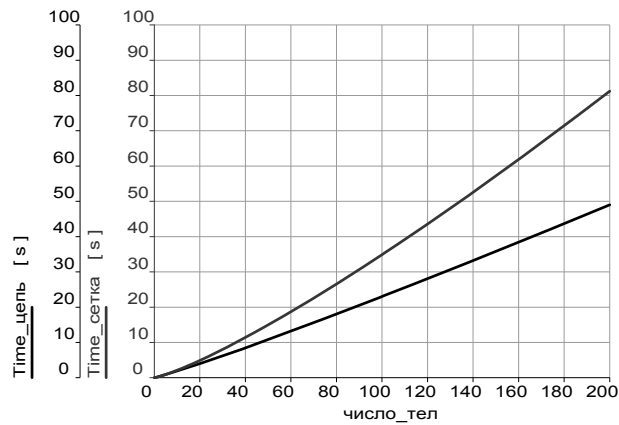


Рис. 4. Время расчета тестовых задач

скоростей была отключена. Реальное время расчета в обоих примерах хорошо аппроксимируется степенной функцией  $k \cdot n^\alpha$ , где  $n$  - число тел в исследуемой системе;  $k, \alpha$  - коэффициенты, значения которых зависят от типа задачи: для цепочки тел  $\alpha = 1.09$ , для сетки тел  $\alpha = 1.22$ .

### 8. Примеры

На Рис. 5 - Рис.8 показан пример расчета поведения стойки самолета в процессе приземления. Общий вид экрана ПК EULER в процессе исследования представлен на Рис. 5. На Рис.6 показан общий вид стойки. Корпус стойки моделируется упругим телом. Раскраска по поступательным деформациям корпуса приведена на Рис. 7, Рис.8. На Рис. 8 также показана шкала градации цветов раскраски в метрах.

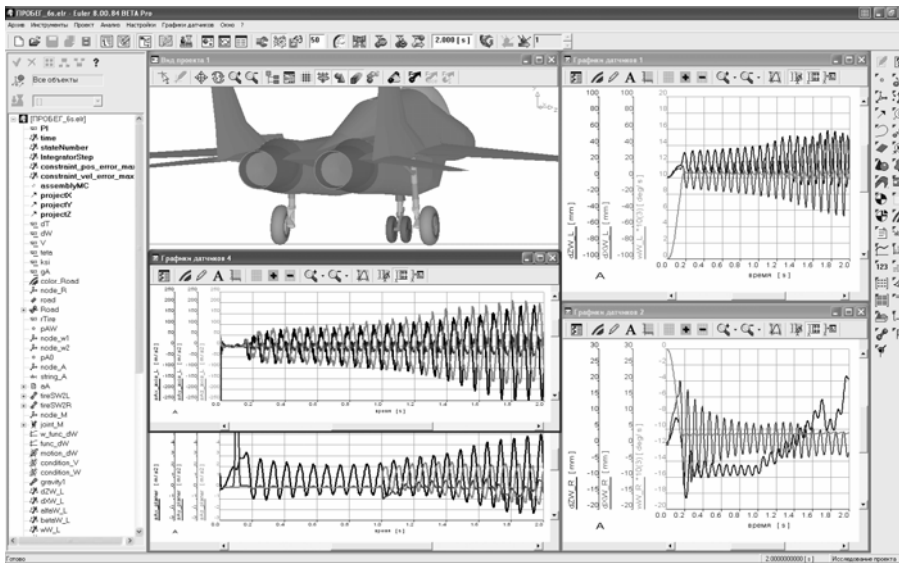


Рис. 5. Экран ПК EULER в процессе исследования стойки



Рис. 6. Общий вид стойки

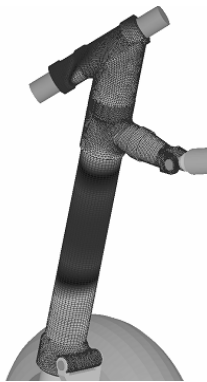


Рис. 7. МКЭ-модель корпуса стойки

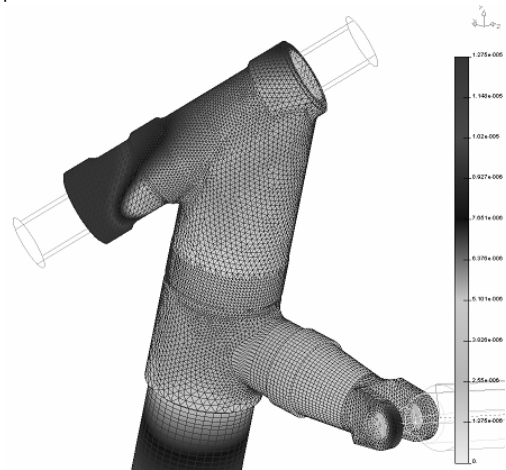


Рис. 8. Деформации верхней части корпуса стойки

## Литература

1. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. – 292 с.
2. R. Featherstone, D. Orin. Robot dynamics: equations and algorithms. Proc. of the 2000 IEEE, 826-834 pp.
3. Михеев Г.В. Компьютерное моделирование динамики систем абсолютно твердых и упругих тел, подверженных малым деформациям: дис. канд. техн. наук / Михеев Г.В.; науч. рук. Д.Ю. Погорелов; Брянский гос. техн. ун-т. – Брянск, 2004. – 153 с.
4. Внутренняя документация к программному комплексу ADAMS.
5. Шабана А. Описание динамики гибких тел с использованием обобщенных уравнений Ньютона-Эйлера.
6. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М.: Высш.шк., 1985. – 329 с.
7. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. – 541 с.
8. Craig, R.R., Jr., Vamptton, M.C.C. Coupling of substructures for dynamic analysis, AIAA Journal, Vol. 6, No. 7, 1968, pp. 1313-1319.

**Бойков Владимир Георгиевич.** Генеральный директор ЗАО «АвтоМеханика», доцент кафедры оптимального управления. Окончил МГУ им. М.В.Ломоносова. Кандидат технических наук. Область научных интересов: моделирование многокомпонентных механических систем. E-mail: [Boykov@euler.ru](mailto:Boykov@euler.ru).

**Юдаков Алексей Александрович.** Ведущий программист ЗАО «АвтоМеханика», аспирант кафедры оптимального управления. Окончил МГУ им. М.В.Ломоносова. Область научных интересов: моделирование упругих тел в составе механических систем. E-mail: [you\\_AD@mail.ru](mailto:you_AD@mail.ru).