Локализация ресурсов вычислительных систем реального времени

А.И. Грюнталь

Аннотация. В статье рассматривается задача планирования систем, включающих конечное количество задач. Изучаются условия, при которых система разрешима, то есть существует планирование, при котором каждая из образующих систему задач может быть завершена до заданного момента времени.
Рассматривается проблема локализации: при каких условиях задача разрешимости может быть локализована, то есть сведена к существованию локальных по времени разрешимых подсистем.
В качестве естественного объекта локализации определяются и исследуются полные подсистемы. Показано, что каждая система однозначно представима в виде объединения полных подсистем, и что разрешимость системы эквивалентна разрешимости всех полных подсистем.
Результаты статьи могут найти применение при проектировании вычислительных систем, функционирующих в режиме жесткого реального времени.

Ключевые слова: системы реального времени, программное обеспечение, многозадачность, планирование, локализация, полные подсистемы, разрешимые системы

Введение

Вычислительные системы реального времени – это системы, для которых специфицированы ограничения на время выполнения решаемых задач [1]. Мы будем рассматривать некоторый специальный класс ограничений, присущих системам жесткого реального времени, то есть системам, в которых выполнение задачи после установленного предельного срока неприемлемо.

Опишем соответствующую модельную ситуацию. Каждая задача характеризуется числом t - *моментом возникновения* (или старта) задачи, *ресурсной длительностью* выполнения задачи L – длительностью процессорного времени, необходимой для выполнения задачи в монопольном режиме, и T - *максимальной длительностью* выполнения задачи.

В силу того, что в системе одновременно может выполняться несколько задач, выполнение каждой конкретной задачи может прерываться в связи с появлением других задач, а также в связи со спецификой алгоритма, который распределяет ресурсы процессора между различными задачами. Поэтому время работы процессора, затраченное на выполнение задачи, представляет собой набор промежутков (а не один непрерывный промежуток). Ограничения реального времени, накладываемые на задачу, состоят в том, что задача должна закончиться не позднее, чем в момент времени t+T. В противном случае фиксируется отказ системы.

Задача планирования для систем реального времени состоит в распределении ресурсов процессора таким образом, чтобы сформулированные выше ограничения реального времени были выполнены для каждой задачи.

Основной вопрос, возникающий в связи с планированием систем реального времени, следующий: является ли система реального времени разрешимой, то есть существует ли планирование, при котором все задачи системы исполняются своевременно. При положительном ответе на первый вопрос возникает проблема нахождения конструктивного алгоритма или класса алгоритмов, задающих разрешимые планирования.

В настоящей статье рассматривается один из аспектов проблемы планирования систем реального времени.

Объектом изучения являются конечные множества задач общего вида без каких-либо ограничений на периодичность возникновения задач, длительность и т.д. Ниже такие множества мы и будем называть *системами*.

Исследуется проблема *локализации*, а именно: в какой мере разрешимость систем является локальным свойством, то есть может быть сведена к вопросу о разрешимости локальных по времени подсистем специального вида.

Основной результат, изложенный в настоящей статье, следующий. Выяснилось, что произвольная система естественным образом распадается на подмножества, называемые полными подсистемами, планирование для которых может осуществляться локально, то есть независимо от других полных подсистем. С использованием введенных в статье определений этот результат формулируется так: система разрешима тогда и только тогда, когда она локально разрешима.

Коротко о содержании статьи. Вначале даются основные определения: задания (формальный аналог задачи), системы, функции планирования, разрешимости системы. Все определения даются в формальных математических терминах, что позволяет формулировать результаты в строгой форме.

Вводится технически удобный комбинаторный аналог функции планирования – отображение планирования, определенное на комплексах полуинтервалов.

Основным объектом локализации являются полные подкомплексы и полные подсистемы. Понятие полного подкомплекса базируется, в свою очередь, на понятии связного подкомплекса. Поэтому вводится определение связного подкомплекса и систематически изучаются свойства связных подкомплексов.

Далее вводится понятие полной функции планирования и доказывается, что если система разрешима, то она разрешима в классе полных функций планирования. Наконец, дается определение локальной функции планирования и доказывается теорема о существовании локально разрешимого представления полной функции, утверждающая, как было отмечено выше, что функция разрешима в том случае, когда она локально разрешима.

Условия разрешимости систем исследовались многими авторами [2], [3]. Предметом исследования являлись системы, обладающие некоторой регулярностью, например, периодические или близкие к ним. В отличие от этих исследований, в настоящей статье рассматриваются произвольные системы, без дополнительных условия на периодичность возникновения и длительность задач.

В настоящей работе исследуются некоторые аспекты планирования произвольных систем, включающих конечное множество задач. Случай произвольной системы с синхронным стартом рассмотрен в [4].

Результаты статьи могут быть использованы при создании приложений, функционирующих в среде разработанной в НИИСИ РАН операционной системы реального времени ос2000 [5].

Основные определения

Дадим определение основных объектов: задания, системы и функции планирования.

Заданием назовем четвёртку чисел (t, L, T, I), такую, что $t \geq 0$, $0 < L \leq T$, I – целое положительное число. Число t называется *моментом старта* задания, L – *ресурсной длительностью*, а T – *максимальной длительностью выполнения* задания. Целое число I назовем *индексом* задания. Момент старта задания, ресурсную длительность и максимальную длительность задания с индексом I будем обозначать соответственно через t_I, L_I и T_I.

Системой $S = \{(t_I, L_I, T_I, I)\}$ будем называть такое конечное множество заданий, что индексы любых двух заданий различны. *Множество индексов системы* S будем обозначать через IndSet(S).

Моментом старта системы start(S) будем называть наименьшее из чисел t_I, где I принадлежит IndSet(S). Через IndSet(S)+ будем обозначать *расширенное множество индексов* системы S, получаемое добавлением к IndSet(S) целого числа нуль. Полуинтервал [start(S), +∞), будем называть *областью определения системы*.

Введем еще несколько определений. *Геометрическим полуинтервалом* или просто полуинтервалом $[\tau_1, \tau_2)$ будем называть множество чисел t, таких, что $\tau_1 \le t < \tau_2$. Если $\tau_2 = +\infty$, то полуинтервал называется *бесконечным* или *неограниченным*. В противном случае полуинтервал называется *ограниченным*. Число τ_1 называется *левой границей* полуинтервала, а τ_2 – *правой границей*.

Если c – полуинтервал, то левая граница полуинтервала будет обозначаться через inf(c), правая граница – через sup(c), а длина – через L(c). Ясно, что sup(c) = inf(c) + L(c).

Ниже мы будем рассматривать *наборы (множества)*, состоящие из *полуинтервалов*. Распространим определение левой и правой границ, а также длины на набор полуинтервалов.

Пусть $C = (c_1,\ldots,c_N)$ – набор полуинтервалов. Тогда наименьшее из чисел $\inf(c_1),\ldots,\inf(c_N)$ называется левой границей набора полуинтервалов C и обозначается через inf(C). Соответственно, наибольшее из чисел $\sup(c_1),\ldots,\sup(c_N)$ называется правой границей набора полуинтервалов C и обозначается через sup(C).

Длиной набора полуинтервалов C называется сумма длин всех полуинтервалов из C. Длина набора полуинтервалов обозначается через L(C).

Два полуинтервала называются *смежными*, если левая граница одного полуинтервала совпадает с правой границей другого полуинтервала.

Функцией планирования системы S назовем функцию p(t) со следующими свойствами:

фп1) функция p(t) определена на полуинтервале $\mathrm{start}(S) \le t < +\infty$;

фп2) функция p(t) принимает значения в множестве IndSet(S)+;

фп3) прообраз числа I из IndSet(S)+ функции p(t) представляет собой объединение конечного количества непересекающихся полуинтервалов;

фп4) для каждого I из IndSet(S) сумма длин полуинтервалов, составляющих прообраз индекса I функции p(t), равна L_I – ресурсной длительности задания с номером I;

фп5) если $t \ge \mathrm{start}(S)$ и p(t) = I, то $t_I \le t$.

Введем несколько технически полезных для описания свойств функции планирования определений и обозначений. Прообраз числа I функции p(t) будем обозначать через coimg(p)(I).

Пусть даны система и функция планирования. Поскольку множество, представимое в виде объединения конечного количества полуинтервалов, однозначно представимо в виде объединения конечного количества несмежных полуинтервалов, то и прообраз каждого индекса I функции планирования однозначно представим в виде объединения непересекающихся несмежных полуинтервалов. Этот набор полуинтервалов будем называть *комбинаторным прообразом* задания для функции планирования. Комбинаторный прообраз задания с индексом I для функции планирования p(t) будем обозначать через Ccoimg(p)(I). Заметим, что если полуинтервал c входит в Ccoimg(p)(I) и $\inf(c) \le t < \sup(t)$, то p(t) = I.

Пусть дан набор непересекающихся полуинтервалов C. Формально надо различать это множество полуинтервалов и множество всех точек, из которых эти полуинтервалы состоят. Другими словами, надо различать набор полуинтервалов и результат выполнения теоретико-множественной операции объединения, выполненной над этими полуинтервалами. Для этого введем обозначение: через set(C) будем обозначать теоретико-множественное объединение полуинтервалов, входящих в C.

С использованием введенных обозначений свойства фп4) и фп5) записываются в виде $L(\mathrm{Ccoimg}(p)(I)) = L_I$ и $t_I \le \inf(\mathrm{Ccoimg}(p)(I))$. Также справедливо равенство coimg(p)(I) = set(Ccoimg(p)(I)).

Максимальную правую границу среди всех составляющих Ccoimg(p)(I) полуинтервалов будем называть *моментом (или временем) завершения задания* с индексом I и обозначать через fin_I. Таким образом,

$\mathrm{fin}_I = \sup(\mathrm{Ccoimg}(p)(I))$.

Функция планирования *разрешает систему* S, если $\mathrm{fin}_I \le t_I + T_I$ для всех I из IndSet(S). Система называется *разрешимой*, если существует хотя бы одна функция планирования, разрешающая систему.

Технически удобно вместо функции планирования рассматривать отображение планирования. Для этого введем понятие комплекса полуинтервалов и изучим основные свойства этого объекта.

Комплекс полуинтервалов

Ниже потребуется рассматривать различные, но геометрически совпадающие полуинтервалы, то есть полуинтервалы, у которых левые и правые границы совпадают. Для этого введем понятие *индексированного полуинтервала*.

Индексированным полуинтервалом будем называть пару (c, I), где c – геометрический полуинтервал, а I – целое положительное число. Геометрический полуинтервал c называется носителем индексированного полуинтервала, а число I – индексом индексированного полуинтервала. Индекс индексированного полуинтервала a будем обозначать через ind(a).

Левой и правой границами индексированного полуинтервала называются левая и правая границы носителя индексированного полуинтервала. Аналогично *длиной индексированного полуинтервала* называется длина его носителя. Для левой и правой границ и длины индексированного полуинтервала c сохраняются обозначения inf(c), sup(c) и L(c).

Два индексированных полуинтервала называются *смежными*, если смежными являются их носители.

Комплексом полуинтервалов будем называть такое конечное множество индексированных полуинтервалов, что индексы любых двух индексированных полуинтервалов различны. *Множество индексов комплекса полуинтервалов* C будем обозначать через IndSet(C).

Различие между набором (множеством) полуинтервалов и комплексом полуинтервалов состоит в том, что набор полуинтервалов состоит из геометрических полуинтервалов, а комплекс полуинтервалов – из индексированных. Соответственно, все геометрические полуинтервалы из набора полуинтервалов различны, а комплекс полуинтервалов может содержать индексированные полуинтервалы, носители которых совпадают. При обозначении индексированных полуинтервалов мы не будем указывать индекс, если конкретное значение индекса не влияет на ясность изложения.

Пусть даны два комплекса полуинтервалов C и D. Комплекс D называется *подкомплексом* комплекса C, если все входящие в D полуинтервалы входят и в C. Комплекс, состоящий из одного индексированного полуинтервала c, будем обозначать через {c}.

Над комплексами можно выполнять обычные теоретико-множественные операции *объединения, пересечения и дополнения*. При этом надо учитывать, что два индексированных полуинтервала с совпадающими носителями и различными индексами различны. Объединение комплексов C_1 и C_2 будем обозначать через $C_1 + C_2$, а разность - $C_1 - C_2$.

Количество полуинтервалов, входящих в комплекс C, будем называть *мощностью* комплекса C и обозначать через card(C).

Для комплекса полуинтервалов, так же как и для набора полуинтервалов, определены понятия левой и правой границ и длины. *Левой границей* комплекса полуинтервалов назовем минимальную левую границу всех входящих в комплекс полуинтервалов. *Правой границей* комплекса назовем максимальную правую границу всех входящих в комплекс полуинтервалов. Левая и правая границы комплекса полуинтервалов C обозначаются через inf(C) и sup(C) соответственно

Носителем комплекса назовем полуинтервал, левая граница которого совпадает с левой границей подкомплекса, а *длина* равна сумме длин входящих в комплекс полуинтервалов. Таким образом, длина комплекса – это по определению длина носителя комплекса. Носитель комплекса C обозначается через Supp(C).

Определение *длины комплекса полуинтервалов* дословно совпадает с определением длины набора полуинтервалов с тем отличием, что в определении длины комплекса участвуют носители входящих в комплекс индексированных полуинтервалов. Длина комплекса C обозначается через L(C).

Непосредственно из данных определений следуют равенства L(Supp(C)) = L(C) и inf(Supp(C)) + L(C) = Sup(Supp(C)).

Отображение планирования

Пусть C – произвольный комплекс полуинтервалов. *Отображением планирования* комплекса C называется отображение, которое ставит в соответствие каждому полуинтервалу c из C набор полуинтервалов R(c), удовлетворяющий следующим свойствам:

опл1) множество R(c) состоит из непересекающихся несмежных полуинтервалов;

опл2) при c1 ≠ c2 полуинтервалы из R(c1) не пересекаются с полуинтервалами из R(c2);

опл3) выполняется равенство L(c) = L(R(c));

опл4) выполняется неравенство inf(c) ≤ inf(R(c)).

Пример. Пусть дан комплекс, состоящий из одного полуинтервала [0, 2). Тогда отображение R1, ставящее в соответствие полуинтервалу [0, 2) множество полуинтервалов, состоящее из одного этого полуинтервала, будет отображением планирования.

Также отображением планирования будет отображение R2, ставящее в соответствие полуинтервалу [0, 2) два полуинтервала [0, 1) и [1, 2). Очевидно, отображения R1 и R2 различны.

Пусть дана система S = {(t_I, L_I, T_I, I)}. Каждому заданию S_I = {(t_I, L_I, T_I, I)} поставим в соответствие индексированный *полуинтервал ресурсов*, равный ([t_I , t_I+L_I), I).

Комплексом ресурсов Res(S) системы S назовем комплекс, состоящий из полуинтервалов ресурсов системы S.

Отображение планирования системы S - это по определению отображение планирования комплекса ресурсов Res(S).

Следующая конструкция устанавливает взаимно-однозначное соответствие между функциями планирования и отображениями планирования.

Пусть p(t) - функция планирования. Тогда определим отображение планирования *R*(p) комплекса ресурсов Res(S). Для c из Res(S) положим

$$R(\mathrm{p})(\mathrm{c}) = \mathrm{Ccoimg}(\mathrm{p})(\mathrm{ind}(\mathrm{c})).$$

Очевидно, что если p_1(t) и p_2(t) различные функции планирования, то $R(p_1) \neq R(p_2)$. Действительно, пусть существует такое t, что $p_1(t) \neq p_2(t)$. Предположим, что $p_1(t) \neq 0$ (случай $p_2(t) \neq 0$ рассматривается аналогично). Тогда пусть c такой полуинтервал из Res(S), что ind(c) = p_1(t). Обозначим через d такой полуинтервал из Ccoimg(p_1)(ind(c)), который содержит число t. А тогда d не содержится в Ccoimg(p_2)(ind(c)). Следовательно, $R(p_1) \neq R(p_2)$.

Покажем, что отображение *R*(p) является отображением планирования. Свойство опл1) выполнено, так как по определению Ccoimg(p)(I) представляет собой набор непересекающихся несмежных полуинтервалов для каждого I.

Свойство опл2) выполнено в связи с тем, что при различных c1 и c2 множества coimg(p)(ind(c_1)) и coimg(p)(ind(c_2)) не пересекаются. А так как

coimg(p)(ind(c_1)) = set(Ccoimg(p)(ind(c_1)) и

coimg(p)(ind(c_2)) = set(Ccoimg(p)(ind(c_2)),

то комбинаторные прообразы Ccoimg(p)(ind(c_1)) и Ccoimg(p)(ind(c_2)) не имеют общих элементов.

Справедливость опл3) и опл4) вытекает непосредственно из приведенных выше неравенств L(Ccoimg(p)(I)) = L_I и t_I ≤ inf(Ccoimg(p)(I)). Таким образом, *R*(p) – отображение планирования.

Пусть теперь R – отображение планирования комплекса ресурсов Res(S). Определим отображение fp, которое отображению планирования R ставит в соответствие функцию fp(R)(t).

При t, принадлежащем set(R(c)), и c из Res(S) положим fp(R)(t) = ind(c). Для t из [start(S), +∞) и не принадлежащем ни одному из set(R(c)) положим fp(R)(t) = 0.

Прежде всего заметим, что определение функции fp(R)(t) корректно, поскольку при $c_1 \neq c_2$ выполняется неравенство set(R(c_1)) ≠ set(R(c_2)).

Покажем, что fp(R)(t) – функция планирования. По построению функция fp(R)(t) принимает значения во множестве IndSet(S)+, и прообраз coimg(fp(R))(I) при I > 0 представим в виде объединения непересекающихся интервалов, поскольку coimg(fp(R))(I) = set(R(c)), I = ind(c). Таким образом, для функции fp(R) (t) условия фп1), фп2) и фп3) выполнены.

Далее, по построению Ccoimg(fp(R))(I) = R(c), а в силу опл3) L(R(c) = L(c). Поэтому L(Ccoimg(fp(R))(I)) = L_I. Следовательно, для fp(R)(t) выполнено условие фп4).

Наконец, так как inf(Ccoimg(fp(R))(I)) = inf(R(c)), то, в силу опл4), выполнено неравенство inf(c) ≤ inf(R(c)), и следовательно,

$$t_I \leq \mathrm{inf}(\mathrm{Ccoimg}(\mathrm{fp}(R))(I)).$$

Поэтому выполнено условие фп5) и, значит, fp(R)(t) является функцией планирования системы S.

Теперь покажем, что последовательное применение отображений *R* и fp является тождественным отображением, то есть для каждой функции планирования p(t) справедливо p(t) = fp(*R*(p))(t).

Действительно, пусть p(t) ≠ 0. Значит, t принадлежит множеству set(Ccomb(p)(p(t))) = set(*R*(c)), ind(c) = p(t). Тогда по построению отображения fp получаем fp(R)(t) = ind(c) = p(t). Таким образом, при p(t) $\neq$ 0 равенство fp(R(p))(t) доказано.

Пусть p(t) = 0, то есть ни при каком c из Res(S) число t не принадлежит set(Ccomb(p)(c)), а значит и set(R(c)). Поэтому fp(R(p))(t) = 0. Таким образом, равенство p(t) = fp(R(p))(t) выполнено при всех t $\geq$ init(S).

Поэтому отображение R является взаимно однозначным отображением множества функций планирования системы S на множество отображений планирования комплекса Res(S). В соответствии с принятыми обозначениями fp = coimg(R).

Заметим, что так как sup(Ccoimg(fp(R))(I)) = sup(R(c)), I = ind(c), условие разрешимости для функции fp(R) sup(Ccoimg(p)(I)) $\leq t_I + T_I$ преобразуется в неравенство

$$\sup(R(c)) \leq t_I + T_I,$$

называемое *условием разрешимости для отображения планирования*. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. О соответствии функций и отображений планирования.

Отображение R является взаимно однозначным соответствием между множеством отображений планирования системы S и множеством отображений планирования комплекса полуинтервалов Res(S).

Функция планирования p(t) разрешает систему в том и только в том случае, когда для отображения R(p) выполнено следующее условие разрешимости:

$$\sup(R(p)(c)) \leq t_I + T_I,\ I = \mathrm{ind}(c).$$

Связные комплексы

Целью рассмотрения является локализация ресурсов вычислительных систем. Точнее, мы будем искать условия и методы разбиения системы на изолированные подсистемы, для которых возможно независимое друг от друга планирование.

Определение изолированности оказалось нетривиальным. Для формализации свойства изолированности введем понятие полного подкомплекса.

Ниже мы приведем определение полного подкомплекса и сформулируем в виде теорем его основные свойства. Понятие полного подкомплекса базируется, в свою очередь, на понятии связного подкомплекса. Изучение связных подкомплексов и является нашей ближайшей целью.

Введем обозначение. Пусть C – комплекс полуинтервалов и inf(C) < s. Через {C<s} обозначим подкомплекс комплекса C, состоящий из тех и только тех полуинтервалов c, для которых inf(c) < s.

Пусть дан комплекс C и s > inf(C). Число L({C<s}) будем обозначать через L(C)(s). При s = inf(C) положим L(C)(s) = 0.

Дадим определение связного комплекса. Комплекс C будем называть *связным*, если для любого полуинтервала c из C, такого что inf(C) < inf(c), выполняется неравенство

$$\inf(c) < \inf(C) + L(C)(\inf(c)).$$

Это неравенство будем называть *неравенством связности* для полуинтервала c (относительно комплекса C).

Комплекс, все полуинтервалы которого имеют общую левую границу, также будем считать связным по определению.

Пример 1. Пусть дан комплекс, состоящий из полуинтервалов I1 = [0, 3), I2 = [1, 6), I3 = [2, 7) и I4 = [5, 8). Тогда каждый из подкомплексов D1 = (I1, I2, I4) и D2 = (I1, I3, I4) связный. А подкомплекс D3 = (I1, I4), который является их пересечением, несвязный. Пример 1 показывает, что пересечение связных подкомплексов может и не быть связным подкомплексом.

Подкомплекс, состоящий из двух смежных полуинтервалов, связным не является.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма. О принадлежности полуинтервала носителю связного комплекса.

Пусть C – связный комплекс, и c – полуинтервал из C. Тогда c принадлежит носителю комплекса C.

Доказательство леммы. Для полуинтервала c из C, для которого inf(c) = inf(C), утверждение леммы очевидно выполнено. Пусть inf(C) < inf(c). Для доказательства леммы надо показать, что

$$\sup(c) \leq \inf(C) + L(\mathrm{Supp}(C)).$$

Так как комплекс C связный, то inf(c) < inf(C) + L(C)(inf(c)).

Поэтому sup(c) < inf(C) + L(C)(inf(c)) + L(c).

Но L(C)(inf(c)) + L(c) $\leq$ L(Supp(c)).

Значит, sup(c) < inf(C) + L(Supp(c)). Лемма доказана.

Теорема. Об объединении связных комплексов.

Если носители связных комплексов пересекаются, то объединение связных комплексов снова будет связным комплексом.

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. О неравенстве.

Пусть C – связный комплекс, и $\inf(C) < s < \inf(C) + L(Supp(C))$.

Тогда выполнено неравенство

(*) $s < \inf(C) + L(C)(s)$.

Доказательство леммы.

Рассмотрим несколько случаев. Предположим, что существует такая пара полуинтервалов c_1 и c_2, что $\inf(c_1) < s \leq \inf(c_2)$ и в C нет полуинтервалов, левые границы которых лежат между $\inf(c_1)$ и $\inf(c_2)$.Тогда очевидно, что $L(C)(s) = L(C)(\inf(c_2))$. Но поскольку C-связный комплекс, то для c_2 выполнено неравенство связности

$\inf(c_2) < \inf(C) + L(C)(\inf(c_2))$.

А так как $s \leq \inf(c_2)$, то выполнено и неравенство (*).

Пусть теперь все c из C такие, что $\inf(c) < s$. Но тогда $L(C)(s) = L(Supp(C))$. По условию леммы выполнено неравенство $s < \inf(C) + L(Supp(C))$. А значит, выполнено и неравенство (*). Таким образом, лемма о неравенстве доказана.

Доказательство теоремы. Пусть C – объединение комплексов C_1 и C_2, $\inf(C_1) \leq \inf(C_2)$, и носители $supp(C_1)$ и $supp(C_2)$ пересекаются. Докажем, что комплекс C связный.

Докажем сначала, что для всех полуинтервалов из C_1 выполняется неравенство связности в комплексе C. Пусть c принадлежит C_1, и $\inf(C_1) < \inf(c)$. Тогда, поскольку C_1 - связный комплекс, выполнено неравенство связности $\inf(c) < \inf(C_1) + L(C1)(\inf(c))$. Но $\inf(C_1) = \inf(C)$ и $L(C_1)(\inf(c)) \leq L(C)(\inf(c))$. Поэтому $\inf(c) < \inf(C) + L(C)(\inf(c))$. Последнее неравенство является неравенством связности для полуинтервала c в комплексе C. Таким образом, для всех полуинтервалов из C_1 неравенство связности выполнено (за исключением полуинтервалов, левая граница которых совпадает с $\inf(C_1)$, - для них неравенство связности проверять не надо).

Пусть теперь c – произвольный полуинтервал из C_2, и $\inf(C1) < \inf(C_2)$. Докажем, что для c выполнено неравенство связности в комплексе C. Так как комплекс C_2 связный, то выполнено неравенство связности

$\inf(c) < \inf(C_2) + L(C_2)(\inf(c))$.

Так как носители $Supp(C_1)$ и $Supp(C_2)$ пересекаются, то $\inf(C_2)$ принадлежит $Supp(C_1)$. Из леммы о неравенстве следует, что

$\inf(C_2) < \inf(C_1) + L(C_1)(\inf(C_2))$.

Значит, $\inf(c) < \inf(C_1) + L(C_1)(\inf(C_2)) + L(C_2)(\inf(c))$.

Но так как $\inf(C_2) \leq \inf(c)$, то $L(C_1)(\inf(C2)) \leq L(C_1)(\inf(c))$.

Поэтому

$\inf(c) < \inf(C_1) + L(C_1)(\inf(c)) + L(C2)(\inf(c))$.

При этом $L(C_1)(\inf(c)) + L(C2)(\inf(c)) = L(C)(\inf(c))$.

Поэтому для полуинтервала c выполнено неравенство связности в комплексе C. Следовательно, доказано, что если носители двух связных комплексов пересекаются, то объединение комплексов снова будет связным комплексом.

Теорема об объединении связных комплексов доказана.

Следствие из теоремы об объединении связных комплексов.

Если два связных комплекса пересекаются (то есть имеют хотя бы один общий индексированный полуинтервал), то их объединение снова будет связным комплексом. Это следствие непосредственно следует из теоремы об объединении связных комплексов и леммы о принадлежности.

Лемма. О связных комплексах с непересекающимися носителями.

Пусть комплексы $C_1,\ldots,C_N$ связные и их носители попарно не пересекаются. Тогда объединение этих комплексов не будет связным.

Доказательство леммы. Обозначим через C объединение комплексов $C_1,\ldots,C_N$. Будем считать, что комплексы $C_1,\ldots,C_N$ занумерованы в порядке возрастания их левых границ, то есть

$\inf(C_1) < \inf(C_2) <\ldots<\inf(C_N)$.

Пусть c_2 – полуинтервал из C_2, для которого $\inf(c_2) = \inf(C_2)$. В силу предположения о нумерации

$L(C)(\inf(c_2)) = L(C_1)(\inf(c_2)) = L(Supp(C_1))$.

Так как носители комплексов C_1 и C_2 не пересекаются, то

$\inf(C_1) + L(Supp(C_1)) \leq \inf(c_2)$.

Поэтому $\inf(c_2) \geq \inf(C) + L(C)(\inf(c_2))$.

Значит, для полуинтервала c_2 не выполнено неравенство связности в комплексе C.

Лемма о связных комплексах с непересекающимися носителями доказана.

Дадим определение разбиения комплекса полуинтервалов на связные подкомплексы. Пусть C - комплекс полуинтервалов и $D_1,\ldots,D_N$ - его связные подкомплексы. Будем говорить, что подкомплексы $D_1,\ldots,D_N$ образуют *разбиение комплекса C на связные подкомплексы*, если каждый полуинтервал c из C входит хотя бы в один из подкомплексов $D_1,\ldots,D_N$ и носители подкомплексов $D_1,\ldots,D_N$ попарно не пересекаются.

Заметим, что из леммы о принадлежности следует, что каждый полуинтервал из C принадлежит ровно одному из подкомплексов. Таким образом, D1,…,DN образуют разбиение C в теоретико-множественном смысле. Кроме того, поскольку носители D1,…,DN не пересекаются, то все левые границы этих подкомплексов попарно различны.

Теорема. О существовании разбиения на связные подкомплексы.

Пусть C – комплекс полуинтервалов. Тогда существует разбиение C на связные подкомплексы $D_1,\ldots,D_N$.

Доказательство. Доказательство теоремы будем вести индукцией по мощности комплекса C. Пусть дан комплекс C, и предположим, что для всех комплексов, мощность которых меньше чем card(C), утверждение теоремы выполнено.

Рассмотрим связные подкомплексы D, такие что inf(D) = inf(C). Такие подкомплексы существуют. Например, таким подкомплексом является любой полуинтервал c из C, для которого inf(c) = inf(C).

Пусть D_1 – объединение всех таких подкомплексов. Из теоремы об объединении связных комплексов следует, что D_1 – связный подкомплекс. Если D_1 = C, то утверждение теоремы выполнено.

Пусть в C существуют полуинтервалы, не содержащиеся в D_1. Множество таких полуинтервалов обозначим через E. Поскольку card(E) < card(C), то для E существует разбиение на связные подкомплексы D2,…,DN.

Покажем, что $D_1, D_2,\ldots,D_N$ – разбиение C на связные подкомплексы. Действительно, каждый из этих подкомплексов связный. Носители подкомплексов $D_2,\ldots,D_N$ попарно не пересекаются. Покажем, что носитель подкомплекса D_1 не пересекается с носителем подкомплекса D_i, где i = 2,…N.

Действительно, пусть $\mathrm{Supp}(D_1)$ пересекается с $\mathrm{Supp}(D_i)$ при некотором i, и d – полуинтервал из D_i, такой что $\inf(d) = \inf(D_i)$. Тогда из леммы о неравенстве вытекает, что подкомплекс $D_1+\{d\}$, получающийся добавлением полуинтервала d к D_1, будет связным. А значит, d должен принадлежать D, что противоречит построению D.

Теорема о существовании разбиения на связные подкомплексы доказана.

Теорема. О единственности разбиения на связные подкомплексы.

Разбиение комплекса C на связные подкомплексы $D_1,\ldots,D_N$ единственно.

Доказательство теоремы о единственности разбиения. Предположим обратное. Тогда существуют несовпадающие друг с другом разбиения $D_1,\ldots,D_N$ и $E_1,\ldots,E_K$.

Рассмотрим два случая. Предположим сначала, что каждый подкомплекс из набора подкомплексов $E_1,\ldots,E_K$ содержится в одном из $D_1,\ldots,D_N$. Так как эти разбиения не совпадают, то существует подкомплекс D из этого разбиения, который не совпадает ни с одним из подкомплексов $E_1,\ldots,E_K$. Пусть $F_1,\ldots,F_M$ те подкомплексы из $E_1,\ldots,E_K$, которые пересекаются с D. По предположению все $F_1,\ldots,F_M$ содержатся в D. Кроме того, M > 1, (в противном случае D совпадало бы с F_1). Значит, D является объединением нескольких (больше одного) связных подкомплексов с непересекающимися носителями. По лемме о связных комплексах с непересекающимися носителями подкомплекс D должен быть несвязным. Противоречие.

Допустим теперь, что существует E из $E_1,\ldots,E_K$, не совпадающий ни с одним $D_1,\ldots,D_N$ и не содержащийся ни в одном подкомплексе этого разбиения. Пусть $G_1,\ldots,G_L$ - все подкомплексы из набора подкомплексов $D_1,\ldots,D_N$, имеющие с E непустое пересечение. Обозначим через D подкомплекс, который получается в результате объединения E и $G_1,\ldots,G_L$. Из следствия из теоремы об объединении связных комплексов вытекает, что D связный. С другой стороны, D совпадает с объединением $G_1,\dots,G_L$. Но тогда по лемме о связных комплексах с непересекающимися носителями D не должен быть связным. Противоречие.

Теорема о единственности разбиения на связные подкомплексы доказана.

Пусть $D_1,\dots,D_N$ – связные непересекающиеся комплексы. Напомним, что связные комплексы *занумерованы в порядке возрастания*, если $\inf(D_1) < \inf(D_2) < \dots < \inf(D_N)$.

Ниже нам понадобится следующая лемма.

Лемма. О верхней границе.

Пусть C – комплекс полуинтервалов, $D_1,\dots,D_N$ – разбиение этого комплекса на связные занумерованные в порядке возрастания подкомплексы и E – произвольный подкомплекс C. Тогда $\sup(\mathrm{Supp}(E)) \le \sup(\mathrm{Supp}(D_N))$.

Доказательство леммы. Докажем сначала справедливость утверждения, когда $N = 1$, то есть, когда $D = C$ и C – связный. Пусть E – подкомплекс C. Если $\inf(E) = \inf(C)$, то утверждение леммы очевидно выполнено. Пусть $\inf(E) < \inf(C)$. Тогда, так как C связный, выполняется неравенство связности

$\inf(E) < \inf(C) + L(C)(\inf(E))$, поэтому

$\inf(E) + L(\mathrm{Supp}(E)) < \inf(C) + L(C)(\inf(E)) + L(\mathrm{Supp}(E))$.

Кроме того, очевидно, что

$L(C)(\inf(E)) + L(\mathrm{Supp}(E)) \le L(\mathrm{Supp}(C))$.

Значит,

$\inf(E) + L(\mathrm{Supp}(E)) < \inf(C) + L(\mathrm{Supp}(C))$.

А это и означает, что $\sup(\mathrm{Supp}(E)) < \sup(\mathrm{Supp}(C))$. Таким образом, утверждение леммы при $N = 1$ доказано. Это утверждение можно еще сформулировать таким образом: *носитель подкомплекса связного комплекса принадлежит носителю связного комплекса*.

Рассмотрим общий случай. Обозначим через E_i пересечение E и D_i. Введем обозначения. Пусть $\varepsilon_i = \sup(\mathrm{Supp}(D_i)) - \sup(\mathrm{Supp}(E_i))$, $\delta_i = \inf(E_i) - \inf(D_i)$, $_i = 1,\dots,N$. Так как $\mathrm{Supp}(E_i)$ принадлежит $\mathrm{Supp}(D_i)$, то все эти числа неотрицательны. Кроме того, положим, $\Delta_i = \inf(D_{i+1}) - \sup(\mathrm{Supp}(D_i))$, $i = 1,\dots,N-1$. Числа Δ_i также неотрицательны, поскольку подкомплексы $D_1,\dots,D_N$ занумерованы в порядке возрастания, а их носители не пересекаются.

Заметим теперь, что

$\sup(\mathrm{Supp}(E_N)) = \inf(E_1) + L(\mathrm{Supp}(E_1)) + \varepsilon_1 + \Delta_1 + \delta_2 + L(\mathrm{Supp}(E_2)) + \varepsilon_2 + \Delta_2 + \delta_3 + \dots + \varepsilon_{N-1} + \Delta_{N-1} + \delta_N + L(\mathrm{Supp}(E_N))$.

Поэтому

$\sup(\mathrm{Supp}(E_N)) \ge \inf(E_1) + L(\mathrm{Supp}(E_1)) + L(\mathrm{Supp}(E_2)) + \dots + L(\mathrm{Supp}(E_N))$.

Но правая часть этого неравенства и есть $\sup(\mathrm{Supp}(E))$. Так как по доказанному ранее $\sup(\mathrm{Supp}(E_N)) \le \sup(\mathrm{Supp}(D_N))$, то утверждение леммы справедливо и в общем случае. Лемма доказана.

Полные подкомплексы

Полные подкомплексы являются естественными объектами планирования в том смысле, что в некотором классе функций планирования планирование на полных подкомплексах осуществляется независимо друг от друга. Цель настоящего раздела – определение полных подкомплексов и изучение их свойств.

Пусть C – комплекс полуинтервалов и D его подкомплекс. Будем говорить, что подкомплекс D_1 *расположен слева* от D, если для любого полуинтервала d из D_1 выполнено неравенство $\inf(d) < \inf(D)$.

Подкомплекс D называется *изолированным слева* (в комплексе C), если носитель любого подкомплекса D_1, расположенного слева от D, не пересекается с носителем D. В частности, D изолирован слева, если левее D полуинтервалы из C отсутствуют.

Назовем подкомплекс D комплекса C *полным*, если выполнены три условия

п1) подкомплекс D связный;

п2) подкомплекс D изолирован слева;

п3) подкомплекс D содержит все полуинтервалы из C, с которыми пересекается носитель D.

С учетом леммы о неравенстве последнее условие п3) можно переформулировать так: подкомплекс D содержит все полуинтервалы d из C, для которых выполнены условия:

$\inf(d) > \mathrm{ind}(D)$ и $\inf(d) < \inf(D) + L(D)(\inf(d))$.

Пример. Пусть C – комплекс, состоящий из двух непересекающихся полуинтервалов c_1 и c_2. Тогда подкомплексы $\{c_1\}$ и $\{c_2\}$ полные, а сам комплекс C (рассматриваемый как свой подкомплекс) – неполный.

Заметим, что свойство связного подкомплекса быть полным зависит от «расположения» подкомплекса D в комплексе C. Одно и то же множество полуинтервалов D может быть полным подкомплексом в одном комплексе и не быть полным в другом.

Заметим также, что поскольку полный подкомплекс является связным, то каждый входящий в полный подкомплекс полуинтервал принадлежит носителю полного подкомплекса.

Из определения полного подкомплекса непосредственно вытекает следующее *свойство сохранения полноты*. Пусть D - полный подкомплекс комплекса C, и полуинтервал c из C не пересекается с Supp(D). Тогда подкомплекс D будет полным и в C-{c}.

Отсюда вытекает такое следствие. Пусть $C_1,\ldots C_N$ – полные подкомплексы комплекса C. При этом $C_1,\ldots C_N$ не обязательно образуют разбиение C. Пусть D – объединение $C_1,\ldots C_N$. Тогда $C_1,\ldots C_N$ образуют разбиение D на полные подкомплексы.

Условие п2) из определения полного комплекса также может быть переформулировано. Обозначим через left(D) подкомплекс C, состоящий из всех полуинтервалов c, для которых выполнено условие inf(c) < inf(D). В терминах ранее введенных обозначений left(D) = {C<inf(D)}. Следующая лемма предоставляет конструктивный способ установления факта полноты подкомплекса.

Лемма. Об условии изолированности.

Пусть $D_1,\ldots D_N$ – разбиение left(D) на связные подкомплексы. Будем также считать, что $\inf(D_1) < \inf(D_2) < \ldots < \inf(D_N)$. Тогда подкомплекс D изолирован слева тогда и только тогда, когда носители D и D_N не пересекаются.

Доказательство леммы. Из определения изолированного слева подкомплекса непосредственно следует, что если подкомплекс D изолирован, то носители D и D_N не пересекаются. Обратное утверждение непосредственно следует из леммы о верхней границе, примененной к разбиению $D_1,\ldots D_N$ комплекса left(D).

Теорема. О разбиении на полные подкомплексы.

Пусть C – комплекс полуинтервалов. Тогда существует и единственное разбиение C на полные подкомплексы.

Доказательство теоремы. Из теоремы о разбиении комплекса на связные подкомплексы следует, что разбиение на полные подкомплексы единственно. Докажем теперь, что подкомплексы, образующие разбиение C на связные подкомплексы, будут полными.

Пусть $D_1,\ldots D_N$ – связные занумерованные в хронологическом порядке подкомплексы, образующие разбиение C. Из леммы об условии изолированности следует, что каждый из подкомплексов D_i будет изолирован слева. Значит, выполнено условие п2). Поскольку при $i \neq j$ подкомплексы D_i и D_j не пересекаются, то условие п3) также выполнено. Следовательно, подкомплексы $D_1,\ldots D_N$ полные.

Теорема доказана.

В конце раздела дадим определение *полной подсистемы*. Пусть S - система и S_1 - ее подсистема. Подсистема S_1 называется *полной*, если подкомплекс $Res(S_1)$ является полным в комплексе Res(S).

Полные функции планирования

Основным объектом рассмотрения в этом разделе являются полные функции планирования.

Пусть p(t) – функция планирования системы S. *Лакуной* функции планирования назовем такой полуинтервал I, что значение функции p(t) на I равно нулю и полуинтервал I принадлежит одному из носителей полных подкомплексов, образующих разбиение комплекса ресурсов Res(S). Будем говорить, что функция планирования является *полной*, если у нее нет лакун.

Пусть R – отображение планирования комплекса C, и пусть $C_1,\ldots,C_N$ – разбиение комплекса ресурсов C на полные подкомплексы. Будем говорить, что отображение планирования удовлетворяет *условию локальности*, если для каждого c из C_i, i = 1,…, N, выполняется условие: set(R(c)) принадлежит $Supp(C_i)$.

Функция планирования p(t) системы S удовлетворяет *условию локальности*, если условию локальности удовлетворяет отображение планирования *R*(p) комплекса Res(S).

Следующая лемма устанавливает эквивалентность полноты функции планирования и условия локальности.

Пусть p(t) – функция планирования системы S.

Лемма. Об эквивалентности.

Функция планирования p(t) полная в том и только том случае, когда для нее выполнено условие локальности.

С учетом того, что построенное выше отображение fp является обратным к отображению *R*, лемму об эквивалентности можно переформулировать так. Для отображения планирования R комплекса Res(S) выполнено условие локальности тогда и только тогда, когда функция планирования fp(R) полная.

Замечание. В силу условия опл4) сумма длин всех полуинтервалов *R*(p)(c) для всех c из C_i равна L(Supp(C_i)). В силу условия опл2) при $c_1 \neq c_1$ полуинтервалы из комплексов *R*(p)(c_1) и *R*(p)(c_1) не пересекаются. Поэтому, если все эти полуинтервалы *R*(p)(c), c из C_I, содержатся в Supp(C_I), то их объединение совпадает с Supp(C_i).

Доказательство леммы. Заметим вначале, что если для каждого c из C_I set(*R*(p)(c)) принадлежит Supp(C_i), то на Supp(C_i) функция p(t) отлична от нуля. Действительно, из приведенного выше замечания следует, что каждая точка t из Supp(C_i) принадлежит одному из полуинтервалов комплекса *R*(p)(c). А тогда, по определению функции p(t), значение этой функции в точке t равно ind(c) ≠ 0.

Докажем теперь обратное утверждение. Будем считать, что подкомплексы $C_1,\ldots,C_N$ занумерованы в порядке возрастания. Доказательство будем вести индукцией по номеру подкомплекса K = 1,…,N.

Докажем сначала, что утверждение справедливо при K = 1. Пусть p(t) ≠ 0 при всех t из Supp(C_1). Тогда каждое число t из Supp(C_1) принадлежат одному из полуинтервалов из *R*(p)(c) для некоторого c из Res(S). В силу того, что $C_1,\ldots,C_N$ образуют разбиение Res(S) на полные подкомплексы и с учетом условия опл4) получаем, что в Supp(C_1) содержатся полуинтервалы только из C_1. Таким образом, для C_1 утверждение леммы верно.

Пусть утверждение леммы выполнено для всех k < K. Докажем, что оно выполнено и при K. Так как p(t) ≠ 0 при всех t из Supp(C_K), то в силу свойства опл4) полуинтервал Supp(C_K) принадлежит объединению полуинтервалов из *R*(p)(c), c из $C_1,\ldots,C_K$. Но по предположению индукции полуинтервалы из *R*(p)(c), c из C_i, C_i = 1,…,K-1 принадлежат Supp(C_i). Так как Supp(C_1),…, Supp(C_{K-1}), не пересекаются с Supp(C_K), то Supp(C_K) принадлежит объединению полуинтервалов из *R*(p)(c), c из C_K.

Лемма доказана.

Теорема. О существовании полной функции планирования.

Если система разрешима, то существует разрешающая систему полная функция планирования.

Прежде чем доказывать теорему о планировании без простоев, сформулируем лемму, в доказательстве которой собственно и содержатся основные рассуждения по доказательству теоремы.

Лемма. Об отображении планирования связного комплекса.

Пусть C – связный комплекс и R – отображение планирования этого комплекса. Тогда существует такое отображение планирования Q комплекса C, что для каждого c из C выполнены следующие утверждения:

опс1) sup(Q(c)) ≤ sup(R(c));

опс2) set(Q(c)) принадлежит Supp(C).

Доказательство леммы об отображении планирования связного комплекса мы приведем после доказательства теоремы о планировании без простоев.

Доказательство теоремы о существовании полной функции планирования.

Прежде всего сведем доказательство теоремы к доказательству аналогичного утверждения для отображений планирования.

Для доказательства теоремы достаточно доказать следующее утверждение. Пусть R – отображение планирования комплекса Res(S), для которого выполнено условие разрешимости sup(R(c)) ≤ $t_I + T_I$, I = ind(c). Тогда существует такое отображение планирования Q, что sup(Q(c)) ≤ sup(R(c)) и для c из C_i множество set(Q(c)) принадлежит Supp(C_i).

Действительно, согласно теореме о соответствии функций и отображений планирования для отображения планирования *R*(p) условие разрешимости выполнено. В силу выполнения неравенства sup(Q(c)) ≤ sup(R(c)) условие разрешимости будет выполнено и для отображения планирования Q. А в силу того, что set(Q(c)) принадлежит Supp(C_I), функция fp(R) будет функцией планирования без простоев, разрешающей систему.

Итак, нашей целью является построение отображения планирования Q, обладающего указанными выше свойствами. Для построения Q воспользуемся индукцией и применим лемму об отображении планирования связного комплекса.

Пусть R = *R*(p) – разрешающее систему S отображение планирования. Пусть далее $C_1,\ldots,C_N$ – разбиение комплекса Res(S) на полные подкомплексы, занумерованные в порядке возрастания. Обозначим через R' сужение отображения R на подкомплекс C_1.

В соответствии с леммой об отображении планирования связного комплекса существует отображение Q_1 подкомплекса C_1, удовлетворяющее утверждениям опс1) и опс2) леммы, то есть для каждого c из C_1 выполнены неравенства $\sup(Q_1(c)) \le \sup(R'(c))$ и $set(Q_1(c))$ принадлежит $Supp(C_1)$.

Если C состоит только из C_1, то отображение Q_1 является искомым. Таким образом, если $C = C_1$, то теорема доказана.

Пусть теперь N > 1. Применим индукцию по количеству полных комплексов в разбиении. Пусть D – объединение подкомплексов $C_2,\ldots,C_N$. Тогда $C_2,\ldots,C_N$ – разбиение D на полные подкомплексы. По предположению индукции существует такое определенное на D отображение планирования Q_2, для которого выполнены следующие условия:

1) для c из C_k, k = 2,…,N, $set(Q_2(c))$ принадлежит $Supp(C_k)$;

2) $\sup(Q_2(c)) \le t_I + T_I$, где I = ind(c).

Рассмотрим отображение Q_3, которое на C_1 совпадает с Q_1, а на D совпадает с Q_2. Такое построение Q_3 корректно, потому что все полуинтервалы из Q_1 (c_1), c_1 из C_1, лежат в $Supp(C_1)$, а все полуинтервалы $Q_2(c_2)$, c_2 из $C_2,\ldots,C_N$, находятся правее $\inf(C_2)$. Значит, $Q_1(c_1)$ и $Q_2(c_2)$ не пересекаются, и, следовательно, выполнено условие опл2).

Выполнение условий опл1), опл3) и опл4) обусловлено тем, что каждое из отображений Q_1 и Q_2 являются отображениями планирования (на своих подкомплексах), а перечисленные свойства локальны, то есть зависят от значений отображения на отдельных полуинтервалах. Таким образом, Q_3 является отображением планирования.

Теперь надо показать, что для Q_3 выполнено неравенство $\sup(Q_3(c)) \le \sup(R(c))$ для всех c из C, и что для c из C_i множество $set(Q_3(c))$ принадлежит $Supp(C_i)$.

Неравенство $\sup(Q_3(c)) \le \sup(R(c))$ выполнено, поскольку оно выполнено для Q_1 и Q_2, а в зависимости от принадлежности полуинтервала c отображение $Q_3(c)$ совпадает либо с $Q_1(c)$, либо с $Q_2(c)$. По этой причине, а также из предположения индукции следует, что $set(Q_3(c))$ принадлежит $Supp(C_i)$ для c из C_i. Поэтому отображение Q_3 искомое.

На этом изложение доказательства теоремы о существовании полной функции планирования закончено. Осталось доказать лемму об отображении планирования связного комплекса.

Доказательство леммы об отображении планирования

Прежде, чем доказывать лемму, введем несколько определений.

Последовательность полуинтервалов $c_1,\ldots,c_n$ называется *цепочкой полуинтервалов*, если $\sup(c_i) = \inf c_{i+1}$, i = 1,…,n-1.

Число $\inf(c_1)$ называется *левой границей цепочки полуинтервалов*, а $\sup(c_n)$ – *правой границей*.

Число n называется *комбинаторной длиной* цепочки полуинтервалов.

Метрической длиной цепочки полуинтервалов Ch называется число L(Ch) = sup(cn) – inf(c1). Ясно, что L(Ch) = L(c1) +…+ L(cn).

При доказательстве леммы технически проще пользоваться понятием *слабого отображения планирования*. Дадим соответствующее определение.

Пусть C – комплекс полуинтервалов и отображение R ставит в соответствие каждому c из C набор полуинтервалов R(c) так, что выполняются свойства опл2), опл3) и опл4). А свойство опл1) заменено на более слабое свойство

опл-с1) комплекс R(c) состоит из непересекающихся (но может быть смежных) полуинтервалов.

Такое отображение будем называть *слабым отображением планирования*. Заметим, что (обычное) отображение планирования является слабым отображением планирования. Поэтому все определения, относящиеся к слабому отображению планирования, относятся и к обычному отображению планирования.

Связь между слабым отображением планирования и обычным отображением планирования устанавливается с помощью *отображения слияния*. Понятие отображения слияния было фактически использовано при определении комбинаторного прообраза функции планирования. Теперь дадим явное определение.

Пусть $C = (c_1,\ldots,c_n)$ набор несмежных полуинтервалов. Тогда через join(C) будем обозначать набор полуинтервалов, получающийся слиянием всех смежных полуинтервалов из C. Отображение join будем называть *отображением слияния*.

Уточним способ построения отображения слияния. Если среди полуинтервалов $c_1,\ldots,c_n$ нет смежных, то положим join(C) = C.

Пусть теперь в C существуют смежные полуинтервалы, скажем, d и e, причем sup(d) = inf(c). Тогда определим набор полуинтервалов C_1 следующим образом. Удалим из C полуинтервалы d и e и вместо них включим в C_1 полуинтервал [inf(d), sup(c)). Если в C_1 не осталось смежных полуинтервалов, то положим join(C) = C_1. Заметим, что inf(C) = inf(C_1), sup(C) = sup(C_1) и set(join(C)) = set(join(C_1)).

Если в C_1 снова есть смежные интервалы, то применим описанную процедуру еще раз. И так далее, до тех пор, пока не получим комплекс C_K, состоящий только из несмежных полуинтервалов.

Тогда положим join(C) = C_K. Поскольку множество может быть представлено в виде объединения непересекающихся полуинтервалов, то определение операции join корректно, то есть не зависит от порядка, в котором осуществлялось объединение полуинтервалов из C.

Заметим, что по построению inf(C) = inf(join(C)), sup(C) = sup(join(C)) и set(C) = set(join(C)).

Распространим определение отображения слияния на слабое отображение планирования. Если R – слабое отображение планирования комплекса C, то через join(R) определим такое отображение планирования, которое каждому полуинтервалу c из C ставит в соответствие набор полуинтервалов join(R(c)). Покажем, что join(R) – отображение планирования.

Свойство опл1) вытекает непосредственно из свойств отображения слияния. Свойства опл2) и опл3) следуют из того, что set(C) = set(join(C)). Наконец, опл4) является следствием того, что inf(C) = inf(join(C)). Таким образом, join(R) является отображением планирования. Кроме того, для R выполнено условие sup(R(c)) = sup(join(R(c))).

Для слабого отображения планирования введем понятие *дефекта* – числовой характеристики, измеряющей «величину непопадания» образа слабого отображения планирования R комплекса C в Supp(C).

Если R – слабое отображение планирования, то через {R} будем обозначать набор (множество) полуинтервалов, получающийся объединением всех полуинтервалов из наборов R(c) для всех c из C. Другими словами, полуинтервал c принадлежит {R} тогда и только тогда, когда он принадлежит одному из R(c). Из свойств слабого отображения планирования непосредственно вытекает, что все полуинтервалы из {R} взаимно не пересекаются. Набор {R} будем называть *набором полуинтервалов слабого отображения* R.

Комбинаторной длиной слабого отображения планирования будем называть количество входящих в {R} полуинтервалов. С использованием введенных ранее обозначений комбинаторная длина отображения R равна card({R}).

Пусть C – комплекс полуинтервалов, и R – слабое отображение планирования. *Максимальной начальной цепочкой* отображения R называется цепочка Ch, состоящая из входящих в {R} полуинтервалов, такая, что выполняются следующие свойства:

мнц1) inf(Ch) = inf(C);

мнц2) среди всех цепочек, удовлетворяющих условию мнц1), цепочка Ch имеет максимальную комбинаторную длину.

Условие мнц2) означает, что правая граница последнего полуинтервала из цепочки не является левой границей никакого полуинтервала из {R}. Ясно, что длина максимальной начальной цепочки однозначно определена отображением R.

Максимальную начальную цепочку слабого отображения R будем обозначать через init(R). Положим

Δ = card({R}) – card(init(R)).

Число $\Delta = \Delta(R)$ будем называть *дефектом* слабого отображения R. Ясно, что $\Delta \geq 0$, поскольку все составляющие init(R) полуинтервалы содержатся в {R}.

Покажем, что $\Delta = 0$ в том и только том случае, когда все полуинтервалы из {R} содержатся в Supp(C). Действительно, $\Delta = 0$ в том и только том случае, когда количество полуинтервалов в начальной цепочке отображения R совпадает с общим количеством полуинтервалов из {R}, то есть {R} и начальная цепочка состоят из одних и тех же полуинтервалов.

Из свойств слабого отображения планирования вытекает, что длина всех полуинтервалов из {R} равна длине Supp(C). Таким образом, метрическая длина полуинтервалов из начальной цепочки совпадает с длиной Supp(C). Поэтому полуинтервал Supp(C) совпадает с полуинтервалом [inf(c1), sup(cn)), в котором содержатся все полуинтервалы из начальной цепочки, а значит и из {R}.

Пусть теперь все полуинтервалы из {R} содержатся в Supp(C). Поскольку все полуинтервалы из {R} не пересекаются друг с другом, а сумма длин полуинтервалов из {R} равна длине Supp(C), то эти полуинтервалы образуют цепочку, так как в противном случае расстояние между левой и правой границами цепочки превосходило бы L(Supp(C)).

Теперь, пользуясь введенными объектами и их свойствами, приступим непосредственно к доказательству леммы.

Пусть R – отображение планирования связного комплекса C, и предположим, что $\Delta(R) \neq 0$. Тогда построим слабое отображение планирования R_1 комплекса C, для которого $\Delta(R_1) < \Delta(R)$ и выполняется следующее *условие монотонности правой границы* $\sup(R_1(c)) \leq \sup(R(c))$, где c из C.

Процедура построения отображения R_1 по отображению R использует только свойства слабого отображения планирования, поэтому возможно ее последовательное применение.

Если $\Delta(R_1) \neq 0$, то будем применять эту процедуру к R_1 и т.д. до тех пор, пока не получим слабое отображение планирования R_M, такое, что $\Delta(R_M) = 0$.

В силу выполнения условия монотонности правой границы на каждом шаге построения справедливо неравенство $\sup(R_M(c)) \leq \sup(R(c))$. Кроме того, так как $\Delta(R_M) = 0$, то $set(R_M(c))$ будет принадлежать Supp(C) для всех c из C. Таким образом, для R_M выполнены утверждения опс1) и опс2) леммы об отображении планирования связного комплекса.

Отображение R_M, вообще говоря, является слабым отображением планирования. Поэтому заменим R_M отображением $join(R_M)$. Это отображение уже будет удовлетворять всем требованиям опл1) – опл4), предъявляемым к отображению планирования.

В силу свойств отображения join утверждения опс1) и опс2) леммы будут выполнены и для отображения планирования $join(R_M)$. Поэтому отображение $Q = join(R_M)$ и будет искомым отображением, существование которого утверждает лемма.

Таким образом, для завершения доказательства леммы осталось доказать возможность построения слабого отображения планирования R_1 комплекса C, дефект которого меньше, чем дефект отображения R, и для которого выполнено условие монотонности правой границы. Приведем соответствующее построение.

Итак, пусть C – связный комплекс и R – отображение планирования этого комплекса. Мы будем рассматривать отображение планирования как слабое. Пусть {R} – набор полуинтервалов слабого отображения R. Обозначим через C' множество полуинтервалов, состоящее из пересечений входящих в {R} полуинтервалов с Supp(C).

Тогда теоретико-множественное дополнение set(C') до Supp(C) однозначно представимо в виде объединения несмежных полуинтервалов $b_1,\ldots,b_k$. Так как $\Delta(R) \neq 0$, то в наборе $b_1,\ldots,b_k$ содержится, по крайней мере, один полуинтервал. Будем считать, что эти полуинтервалы занумерованы в порядке возрастания.

Покажем, что существует такой полуинтервал c из C, что выполняются условия $\inf(c) \leq \inf(b_1)$ и $\sup(b_1) < \sup(R(c))$. Действительно, если $\inf(b_1) = \inf(C)$, то таким свойством обладает любой полуинтервал c из C, у которого $\inf(c) = \inf(C)$. В этом случае образ R(c) целиком расположен правее b1.

Пусть теперь $\inf(C) < \inf(b_1)$. Напомним, что при $t > \inf(C)$ через $\{C<t\}$ обозначается ком-

плекс, состоящий из тех и только тех полуинтервалов с из C, для которых inf(c) < t. Заметим, что inf(C) = inf({C<t}).

Так как C – связный комплекс, то в силу леммы о неравенстве

$inf(b_1) < inf(C) + L(C)(inf(b_1))$.

Из опл3) следует, что L(C)(inf(b1)) = L(R({C< inf(b1)})).

Поэтому $inf(b_1) < = inf(\{C<inf(b_1)\}) + L(R(\{C< inf(b1)\}))$.

Из опл4) следует, что $inf(\{C<inf(b_1)\}) \leq inf(R(\{C < inf(b1)\}))$.

Поэтому $inf(b_1) < inf(R(\{C < inf(b_1)\})) + L(R(\{C < inf(b1)\}))$.

В силу опл-с1) и опл2)

$inf(R(\{C < inf(b_1)\})) + L(R(\{C < inf(b_1)\})) \leq sup(R(\{C < inf(b_1)\}))$.

Поэтому $inf(b_1) < sup(R(\{C < inf(b_1)\}))$.

Это означает, что существует такой полуинтервал c из C, что

$inf(c) < inf(b_1)$ и $sup(R(c)) > inf(b_1)$.

Но так как в полуинтервале b_1 точки из R(c) не содержатся, то $sup(R(c)) > sup(b_1)$. Таким образом, существование требуемого полуинтервала c доказано.

Приступим к построению отображения R_1. Для c' из C, отличных от c, положим $R_1(c') = R(c')$. Построим теперь $R_1(c)$.

Обозначим через $e_1,\ldots e_m$ занумерованные в порядке возрастания полуинтервалы, составляющие образ R(c). Таким образом, $sup(e_m) = sup(R(c))$. А так как $sup(R(c)) > sup(b_1)$, то $sup(e_m) > sup(b_1)$.

Возможны три случая: $L(e_m) < L(b_1)$, $L(e_m) = L(b_1)$ и $L(e_m) > L(b_1)$. Построение отображения R_1 для c приведем для каждого из этих случаев.

Пусть сначала $L(e_m) < L(b_1)$. Тогда положим $e = [inf(b_1), inf(b_1) + L(e_m))$ и $R_1(c) = (e_1,\ldots,e_{m-1}, e)$. Ясно, что card({R1}) = card({R}). Из построения полуинтервала e непосредственно следует, что $init(R_1) = init(R) + 1$. Поэтому $\Delta(R_1) = \Delta(R) – 1$.

Кроме того, $sup(R_1(c)) \leq sup(R(c))$. Действительно, это неравенство надо проверять только для полуинтервала c, существование которого было доказано выше. Но $sup(R(c)) = sup(e_m)$, а так как $sup(e) < sup(e_m)$, то $sup(R_1(c)) = sup(e_1,\ldots,e_{m-1}, e) < sup(e_1,\ldots,e_{m-1}, e) = sup(R(c))$. Таким образом, построенное отображение R_1 удовлетворяет всем требуемым свойствам, поэтому в случае $L(e_m) < L(b_1)$ утверждение леммы доказано.

Рассмотрим случай, когда $L(e_m) = L(b_1)$. В этом случае отображение R_1 определим как и прежде. Значит, $card(\{R_1\}) = card(\{R\})$, и R_1 удовлетворяет условию монотонности правой границы. Комбинаторная длина начальной цепочки в этом случае увеличится не менее, чем на 1, то есть $init(R_1) \geq init(R) + 1$. Поэтому в этом случае $\Delta(R_1) > \Delta(R)$. Следовательно, построенное отображение R_1 также удовлетворяет требуемым свойствам.

Пусть теперь $L(e_m) > L(b_1)$. Определим полуинтервалы e’ и e’’ следующим образом: положим

$e’ = [inf(e_m), sup(e_m) - L(b_1))$ и $e’’ = [inf(b_1), sup(b_1))$.

Для построенного выше полуинтервала c положим $R_1(c) = (e_1,\ldots,e_{m-1}, e’, e’’)$. Ясно, что $card(R_1) = card(R) + 1$. Покажем, что $card(init(R_1)) \geq card(init(R)) + 2$.

Вычислим $init(R_1)$ в случае, когда k > 1, то есть когда количество полуинтервалов в наборе $b_1,\ldots,b_k$ больше единицы. Тогда полуинтервал $[sup(b_1), inf(b_2))$ представим в виде объединения непересекающихся полуинтервалов $x_1,\ldots,x_n$, принадлежащих набору полуинтервалов $R_1(c)$.

Начальная цепочка отображения R_1 включает полуинтервалы из начальной цепочки отображения R, полуинтервал e’’ и полуинтервалы $x_1,\ldots,x_n$. Поэтому

$init(R_1) = init(R) + n+1$, $n \geq 1$, и значит $init(R_1) \geq init(R) + 2$.

Пусть теперь k = 1 и $sup(b_1) < sup(Supp(C))$. Тогда полуинтервал

$[sup(b_1), sup(Supp(C))$ представим в виде объединения непересекающихся полуинтервалов $y_1,\ldots,y_m$ из набора полуинтервалов $R_1(c)$. Поэтому

$init(R_1) = init(R) + m+1$, $m \geq 1$, и снова $init(R_1) \geq init(R) + 2$.

Более того, в этом случае, все полуинтервалы из $R_1(c)$, c из C будут содержаться в Supp(C).

Наконец, предположим, что k = 1 и $sup(b_1) = sup(Supp(C))$. Но такой случай исключен. Действительно, в этом случае полуинтервал Supp(C) был бы представим в виде объединения только части полуинтервалов из $R_1(c)$, где c из C, так как полуинтервал e’ по построению не пересекается с Supp(C). Но этого не может быть, поскольку длина Supp(C) равна сумме длин полуинтервалов из $\{R_1\}$. В виде формулы это можно записать так

$L(Supp(C)) = L(\{R_1\})$.

Итак, во всех рассмотренных случаях $init(R_1) \geq init(R) + 2$. А так как $card(R_1) = card(R) + 1$, то $\Delta(R_1) < \Delta(R)$.

Итак, во всех рассмотренных случаях $\Delta(R_1) < \Delta(R)$. Выполнение условия монотонности правой границы для R_1 проверяется так же, как и выше. Поэтому и в случае $L(e_m) > L(b_1)$ построенное отображение R_1 удовлетворяет предъявляемым к этому отображению свойствам.

Для окончания доказательства леммы осталось показать, что R1 – слабое отображение планирования. Условия опл-с1) и опл2) выполнены для всех c' = c, таких полуинтервалов так как для таких полуинтервалов c' выполнено равенство $R_1(c')= R(c')$. По построению полуинтервалы из набора $R_1(c)$ не пересекаются друг с другом и с другими полуинтервалами из образа R_1. Значит, свойства опл-с1) и опл2) для R_1 выполнены.

Далее, для всех c из C по построению $inf(R_1(c)) = inf(R(c))$. Значит, для отображения R_1 выполнено условие опл3). Наконец, также по построению, $L(c) = L(R_1 (c))$. Поэтому для R_1 выполнены все условия, предъявляемые к слабому отображению планирования.

Лемма об отображении планирования связного комплекса доказана.

Локализация функций планирования

Пусть $S_1,\dots,S_N$ – разбиение S на полные подсистемы.

Локальной функцией планирования называется полная функция планирования подсистемы S_i. Количество локальных функций планирования совпадает с количеством полных подсистем системы S. Локальная функция планирования называется *разрешающей*, если она разрешает систему S_i.

Пусть $p_i(t)$ – локальная функция планирования подсистемы S_i. Из определения функции планирования следует, что область определения локальной функции планирования – это полуинтервал $[start(S_i), +\infty)$.

Для того, чтобы подчеркнуть различие между функцией планирования системы S и локальных функций планирования, функцию планирования системы S будем называть *глобальной*.

Пусть $p_i(t)$ – локальная функция планирования. *Расширением* локальной функции планирования называется функция $p_i'(t)$, совпадающая с $p_i(t)$ на полуинтервале $[start(S_i),+\infty)$ и равная нулю на $[start(S),\ start(S_i))$. Очевидно, расширение локальной функции планирования, для которой $start(S_i) = start(S)$, совпадает с самой локальной функцией планирования.

Все расширения имеют одинаковую область определения. Поэтому корректно определена их сумма p(t). Эту сумму будем называть суммой локальных функций планирования и обозначать через $p_1(t)+\dots+p_N(t)$.

Теорема. О сумме локальных функций планирования.

Сумма локальных функций планирования является *глобальной* функцией планирования. Если все локальные функции планирования разрешающие, то их сумма будет разрешающей глобальной функцией планирования.

Доказательство теоремы. Пусть $p_1(t),\dots,p_N(t)$ – локальные функции планирования и p(t) – их сумма.

Докажем вначале, что сумма локальных функций является глобальной функцией планирования. Для этого проверим выполнение свойств фп1) – фп5). Выполнение свойства фп1) непосредственно следует из определения суммы локальных функций планирования.

Проверим выполнение свойства фп2). Заметим, что функция $p_i(t)$ отлична от нуля только на носителе комплекса $Res(S_i)$.

Действительно, $IndSet(S_i)+$ - множество значений функции $p_i(t)$ включает 0 и все числа ind(c), где c принадлежит $Res(S_i)$. В силу леммы об эквивалентности, для отображения планирования $R(p_i)(c) = Ccoimg(p_i)(ind(c))$ выполнено условие локальности: $set(R(p_i)(c))$ принадлежит $Supp(Res(S_i))$ – носителю комплекса $Res(S_i)$. Другими словами, все полуинтервалы, на которых функция $p_i(t)$ принимает отличное от нуля значение ind(c), принадлежат носителю комплекса $Res(S_i)$. Таким образом, за пределами полуинтервала $Supp(Res(S_i))$ функция $p_i(t)$ принимает значение нуль.

В силу замечания после леммы об эквивалентности, объединение всех полуинтервалов $R(p_i)(c)$, с из $Res(S_i)$, совпадает с $Supp(Res(S_i))$. Поэтому носитель $Res(S_i)$ совпадает с множеством чисел, где $p_i(t) \neq 0$.

Из доказанного утверждения следует, для каждого $t \geq start(S)$ найдется такое i, что $p(t) = p_i(t)$. Множество значений функции $p_i(t)$ есть IndSet(S)+. А так как IndSet(S)+ является объединением множеств $IndSet(S_1)+,\ldots, IndSet(S_N)+$, то множество значений функции p(t) совпадает с IndSet(S)+. Значит, свойство фп2) выполнено.

Заметим также, что для каждого индекса I из IndSet(S)+ существует ровно одна функция $p_i(t)$, которая принимает значение I. Поэтому для суммы локальных функций выполнены условия фп3) и фп4), поскольку они выполнены для функции $p_i(t)$.

Проверим выполнение условия фп5). Пусть p(t) = I, и i такое, что $p_i(t) = I$. Тогда, в силу выполнения условия фп5) для S_i, неравенство $t_I \leq t$ выполнено. Значит, сумма локальных функций планирования является функцией планирования.

Пусть теперь все локальные функции планирования удовлетворяют условию разрешимости. Покажем, что условие разрешимости выполнено и для их суммы. Другими словами, надо показать, что для каждого I из IndSet(S)+ выполнено неравенство $sup(Ccoimg(p)(I)) \leq t_I + T_I$. Но для каждого индекса I найдется такой номер i, что $p(t) = p_i(t)$, и следовательно, $Ccoimg(p)(I)) = Ccoimg(p_i)(I))$. А так как $p_i(t)$ – разрешающая функция планирования, то для нее выполнено неравенство $sup(Ccoimg(p_i)(I)) \leq t_I + T_I$. Значит, выполнено и требуемое неравенство.

Теорема о сумме локальных функций планирования доказана.

Сужением глобальной полной функции планирования на полную подсистему S_i называется локальная функция планирования подсистемы S_i, совпадающая с глобальной на носителе подсистемы и равная нулю в остальных точках области определения подсистемы S_i,.

Лемма (о сужении полной функции). Справедливы следующие утверждения:

сф1) сужением функции планирования снова будет функция планирования;

сф2) глобальная функция планирования является суммой своих сужений;

сф3) если глобальная функция планирования разрешима, то каждое ее сужение будет разрешимой функцией планирования.

Доказательство леммы. Докажем выполнение сф1). Свойство фп1) непосредственно следует из определения. Пусть p(t) – глобальная функция планирования, и $p_i(t)$ – сужение этой функции на подсистему S_i. На $Supp(Res(S_i))$ функции p(t) и $p_i(t)$ совпадают. Ранее было показано, что $Supp(Res(S_i))$ является объединением полуинтервалов, представляющих комбинаторный прообраз тех индексов I, для которых существует с из $Res(S_i)$, удовлетворяющий условию ind(c) = I. А это и означает, что $p_i(t)$ принимает значение в $IndSet(S_i)$. Таким образом, свойство фп2) выполнено.

Свойства фп3) и фп4) для сужения выполнены, так как они выполнены для глобальной функции планирования для все индексов, и, в частности, для индексов из $IndSet(S_i)$. Свойство фп5) выполнено, поскольку оно выполнено для глобальной функции планирования. Итак, мы показали, что сужение глобальной функции планирования является функцией планирования.

Проверим выполнение сф2). Если t принадлежит $Supp(Res(S_i))$ при некотором i, то при $j \neq i$ носители комплексов $Res(S_j)$ и $Res(S_i)$ не пересекаются (так как это полные подкомплексы). Поэтому на $Supp(Res(S_i))$ при $j \neq i$ все $p_j(t)$ равны нулю. Значит, на носителях подсистем глобальная функция равна сумме своих сужений.

Вне носителей подсистем S_i) расширения всех сужений глобальной функции планирования и сама эта функция равны нулю. Поэтому утверждение свойства сф2) выполнено и в этом случае. Свойство сф2) доказано.

Покажем, что выполнено сф3). Так как глобальная функция планирования разрешима, то для каждого с из $Res(S_i)$ выполнено условие разрешимости $sup(Ccoimg(p)(I)) \leq t_I + T_I$, I = ind(c). Если с принадлежит $Res(S_i)$, то $p(t_i) = p(t)$. Поэтому $sup(Ccoimg(p_i)(I)) = sup(Ccoimg(p)(I))$. Значит, условие разрешимости выполнено и для всех с из $Res(S_i)$. Поэтому сф3) выполнено.

Из леммы о сужении полной функции планирования и из теоремы о существовании полной функции планирования вытекает следующее следствие.

Следствие из леммы о сужении полной функции.

Если система разрешима, то существует разрешающая функция, представимая в виде суммы локальных разрешающих функций.

Действительно, если система разрешима, то по теореме о существовании полной функции существует полная функция планирования, разрешающая систему. По лемме о сужении полной функции такая полная функция представима в виде суммы своих сужений. А это и есть утверждение следствия.

Система называется *локально разрешимой*, если для каждой полной подсистемы существует локальная функция планирования, разрешающая подсистему.

Из теоремы о сумме локальных функций планирования и из следствия из леммы о сужении полной функции вытекает следующая теорема.

Теорема. О существовании локально разрешимого представления полной функции. Система разрешима в том и только в том случае, когда она локально разрешима. Если система разрешима, то существует разрешающая систему глобальная функция планирования, равная сумме локальных разрешающих функций планирования.

Заключение

Статья посвящена некоторым аспектам задачи планирования систем реального времени. Задача планирования состоит в распределении ресурсов процессора таким образом, чтобы каждое задание было выполнено своевременно. Системы, для которых такое распределение ресурсов возможно, названы в статье *разрешимыми*.

Рассмотрены условия разрешимости для конечных систем произвольного вида, то есть систем, в которых отсутствуют ограничения на моменты времени возникновения заданий, их длительность, периодичность возникновения, др. Изучен вопрос, в каком смысле и при каких условиях задача планирования может быть локализована. Под *локализацией* понимается возможность сведения задачи планирования к задаче планирования для определенного класса подсистем, локальных по времени возникновения заданий. В качестве объекта локализации в статье рассматриваются полные подсистемы. Показано, что каждая система однозначно представима в виде объединения полных подсистем.

Определяется специальный класс функций планирования – *полные функции планирования*, для которых задача локализации допускает простое решение, а именно, глобальная полная функция планирования разрешима тогда и только тогда, когда разрешимы все локальные функции планирования. Одновременно доказывается, что если существует разрешимая функция планирования системы в целом, то существует и полная разрешимая функция планирования. Поэтому для решения вопроса о разрешимости системы достаточно искать решения только в классе полных функций планирования.

Дальнейшая работа по проблеме планирования должна вестись в направлении поиска алгоритмов планирования, приводящих к полным локальным функциям планирования.

В заключение автор выражает благодарность В.В. Никифорову и В.И. Шкиртилю, которые обратили внимание автора на важность изучения формальных аспектов планирования в системах реального времени.

Литература

1. Никифоров В.В., Павлов В.А., Операционные системы реального времени для встроенных программных комплексов.//Программные продукты и системы.- 1999. - №4. – С.24-30
2. Данилов М.В., Методы планирования выполнения задач в системах реального времени.//Программные продукты и системы. - 2001. - №4. –
3. Никифоров В.В., Выполнимость приложений реального времени на многоядерных процессорах, СПб, Труды СПИИРАН. 2009, вып. 8, стр. 255 - 284.
4. А.И. Грюнталь, Планирование заданий с синхронным стартом. Программные продукты и системы, Тверь, Научно-исследовательский институт «Центрпрограммсистем», № 4, 2010,С. 19 - 23
5. Безруков В.Л. [и др.] Введение в ос2000 // Вопросы кибернетики. Информационная безопасность. Операционные системы реального времени. Базы данных [под ред. В.Б.Бетелина]. М.: НСК РАН, 1999. С. 76-106

Грюнталь Андрей Игоревич. Заведующий отделом математического обеспечения НИИСИ РАН. Окончил МГУ им. М.В.Ломоносова в 1974 году. Автор свыше 30 печатных работ. Область научных интересов: технология разработки приложений, функционирующих в реальном масштабе времени, разработка и применение средств защиты информации в системах реального времени. E-mail: grntl@niisi.msk.ru.