Стохастическая микро- и макродинамика пространственного экономического обмена[1]

Ю.С. Попков

Аннотация. В работе предложена математическая модель экономических агентов и их стохастического взаимодействия в виде обмена ресурсами. Получены условия пребывания траекторий агентов в ограниченной области фазового пространства. Предложена процедура трансформации микросостояний агентов в ресурсное макросостояние системы, использующая методы Монте-Карло и статистического оценивания. Развивается методика построения рандомизированной модели связи показателей ресурсного макросостояния и макропоказателей.

Ключевые слова: микро- и макродинамика, макросистема, стохастические процессы, молекулярная динамика, метод Монте-Карло, равновесия, энтропия, компьютерная имитация.

Введение

Одной из актуальных проблем экономической науки является изучение взаимосвязи микро- и макроэкономических процессов. При этом предполагается некоторое специфическое структурное устройство исследуемого (экономики), который содержит большое количество экономически мотивированных агентов, имеющих определенные индивидуальные свойства и взаимодействующих друг с другом. Изменение во времени состояния экономических агентов происходит как под влиянием собственных «динамических» характеристик, так и в результате взаимодействий с другими агентами, которые реализуются в определенной экономической среде.

В то же время целостная экономическая система приобретает новые, «системные» свойства, отличные от индивидуальных свойств экономических агентов. Состояние экономической системы характеризуется агрегированными параметрами (макропоказателями), в терминах которых рассматриваются временные свойства процессов (макропроцессов) в целостной экономической системе, формируется ее экономическая среда. Экономическая среда представляет собой набор правил функционирования экономических агентов.

Таким образом, микро- и макропроцессы образуют своеобразный замкнутый контур: микропроцессы трансформируются в макропроцессы («прямая» связь), на основе которых формируется экономическая среда, влияющая на микропроцессы экономических агентов («обратная» связь)[2]. Блок-схема на Рис.1 иллюстрирует взаимосвязь микро- и макропроцессов. Дальнейшее изложение будет привязано к этой схеме.

Отметим важные особенности микро- и макропроцессов, являющиеся принципиальными для их матемтического моделирования.

Первая из них связана с соотношением временных шкал, количественными характеристиками которых являются времена релаксации. Обычно различают две временные шкалы:

---

[1] Работа поддержана грантом РФФИ № 11-07-00065

[2] Термины условные

«медленную» с временем релаксации τ_{slow} и «быструю» с временем релаксации $\tau_{fast} << \tau_{slow}$. Макропроцессы реализуются в шкале медленного времени, а микропроцессы - в шкале быстрого времени.

Другая особенность связана с довольно высоким уровнем неопределенности, сопровождающей микро- и макропроцессы. Природа неопределенности заложена как в наличии факторов, выявить которые, а тем более целенаправлено управлять которыми невозможно, так и в принципиальной нестационарности экономической системы, порождаемой креативностью ее экономических агентов.

И, наконец, третья важная особенность связана с невозможностью реализации активных экспериментов с экономической системой, в отличие, например, от большинства физических систем, для которых такая возможность всегда есть. В распоряжении исследователя имеется только временной ряд, характеризующий процесс реального функционирования экономической системы на конечном интервале времени.

Объявленная выше проблема является частью более общей проблемы соотношения индивидуального и коллективного, которая изучается в различная в научных дисциплинах. Хотя эти дисциплины различны, но исследовательский подход — общий, и основан он на модельном представлении проблемы. В теоретических направлениях естественных наук он основан на математических моделях, рассматриваемых в огромном количестве научных статей и монографий. Не претендуя на научную объективность и полноту их группировки, остановимся на некоторых группах, которые кажутся более распространенными.

В первую группу входят работы, изучающие равновесия в системах с большим количеством элементов со случайным поведением, которое моделируется какими-либо вероятностными распределениями. Указанный подход стал впервые развиваться в статистической физике и термодинамике [1, 2]. Микроуровень моделировался типовыми феноменологическими вероятностнами схемами, с помощью которых формировались макросостояния в виде распределений неразличимых элементов по подмножествам фазового пространства системы. Оказывалось, что для типовых феноменологических схем функции распределения вероятностей макросостояний имеют «острый» максимум. Поэтому равновесное макросостояние разумно считать наиболее вероятным, или, в более распространенной формулировке, соответствующим максимуму энтропии.

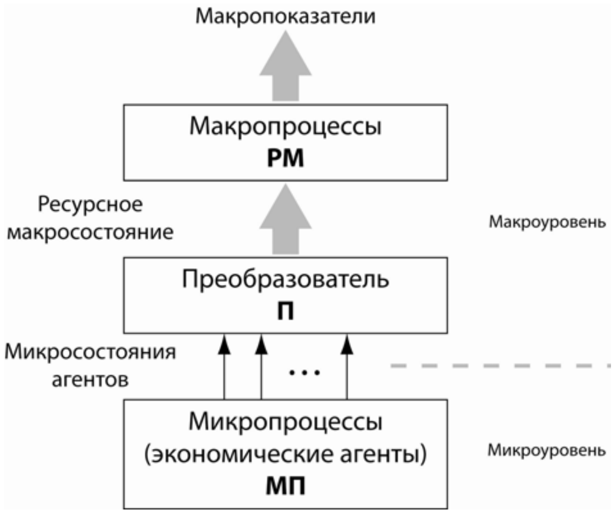

Рис.1. Взаимосвязь микро- и макропроцессов

Определенный вклад в изучение соотношения индивидуального и коллективного внесла теория макросистем, построенная на обобщенном вариационном принципе максимизации энтропии на компактных множествах, в терминах которого определяется понятие равновесного состояния [8].

Во вторую группу входят работы, в которых изучаются только макропроцессы на основе феноменологических моделей, использующие существующие знания и доступную информацию о моделируемых макропроцессах. Эта наиболее обширная группа. Укажем лишь некоторые работы из этой группы, позволяющие дать представление о разнообразии моделей. Соотношения между индивидуальным и коллективным поведением составляют раздел математической теории поведения [3]. Параметры порядка, составляющие фундамент синергетической концепции, являются реальным инструментом математического моделирования макродинамики формирования коллективных свойств [4]. Концепция пространственно-временной самоорганизации систем и перехода от «хаоса к порядку» объясняла многие структурные макроэффекты, наблюдаемые как в жидкостях, так и в социальных средах [5-7].

Несмотря на обилие исследований соотношений между индивидуальными свойствами элементов и коллективными свойствами образованной из них системы, такие ее особенности, как собственная динамика элементов, характер их взаимодействий, влияние макроограничений на поведение элементов микроуровня, стохастичность процессов в различных временных шкалах, на микро- и макроуровнях и др. оставались вне поля зрения исследователей. В то же время они оказываются принципиальными как раз при изучении нефизических систем, функционирование которых сопровождается перечисленными выше тремя особенностями.

В [9] было предложено использовать технологию стохастической микро-и макродинамики (технология СММД) для компьютерной имитации процессов, происходящих в системе с большим количеством взаимодействующих элементов со стохастическим поведением.

Здесь данная технология ориентирована на системы экономического обмена. Неопределенности поведения экономических агентов и их взаимодействия, а также неопределенности, проявляющиеся в не вполне предсказуемом изменении макропроцессов, моделируются подходящими стохастическими процессами. Генерация с помощью компьютерной имитации ансамблей случайных траекторий микро- и макропроцессов дает, с одной стороны, информацию о проявлениях факторов неопределенности, а с другой стороны, позволяет преодолеть невозможность проведения с экономической системой реальных экспериментов, заменив их виртуальными экспериментами. Ансамбли случайных траекторий генерируются процедурами Монте-Карло с учетом соотношения шкал «быстрых» и «медленных» процессов, а также используемых операторов трансформации микропроцессов в макропроцессы и операторов формирования «медленных» макроограничений.

1. Математическая модель экономического агента (блок «микропроцессы»)

1.1. Структура микропроцессов

Рассмотрим стохастическую систему экономических обменов, состоящую из большого количества N агентов, состояние которых в фиксированный момент «быстрого» времени t характеризуется векторами $x^1(t),\dots, x^N(t)$, принадлежащими ограниченному подмножеству $\mathcal{R}_t^n$ векторного пространства $\mathcal{R}_t^n$, где n - размерность пространства. Конфигурация подмножества $\mathcal{R}_t^n$ может меняться при изменении времени $t \ge 0$.

Векторы $x^i(t)$, ($i = \overline{1,N}$, t = fix) являются случайными. Следовательно, предполагается, что для каждого из них существуют непрерывные функции плотности распределения вероятностей $p_t^1(x^1),\dots,p_t^N(x^N)$.

Зафиксируем другой момент времени $t_1>t$ и рассмотрим подмножество $\mathcal{R}_{t_1}^n$. Состояние N агентов в этом подмножестве будет характеризоваться векторами $x^i(t_1)$, ($i = \overline{1,N}$, t_1 = fix) с функциями плотности распределения вероятностей $p_{t_1}^1(x^1),\dots,p_{t_1}^N(x^N)$. Изменятся или нет функции $p_{t_1}^i$ (•) зависит от того, имеются ли статистические связи между компонентами векторов x^i. На уровне вторых моментов это означает, что либо матрица ковариаций для каждого вектора x^i имеет отличные от нуля диагональные элементы $\varphi_{kk}^i = (\sigma_k^i)^2$, не зависящие от времени, либо ее элементами являются функции $\varphi_{ks}^i(t,t_1) = \mathcal{M}\{x_k^i(t)x_s^i(t_1)\}$.

Пусть теперь t - вещественная переменная, принимающая значения на отрезке вещественной неотрицательной оси $R_+^1(T) = \{t\in [0, T]\}$. Рассмотрим цилиндрическое ограниченное множество

$$\mathcal{G}_T = \mathcal{R}_t^n \bigcup R_+^1(T) \qquad (1.1).$$

Будем называть стохастической траекторией i-го агента кривую $x^i(t)$, где t= [0, T]. Стохастические траектории всех N агентов должны принадлежать цилиндрическому множеству $\mathcal{G}_T$.

1.2. Структура множества состояний экономических агентов

Рассмотрим подмножество $\mathcal{R}_t^n = \mathcal{R}^n$, не меняющее конфигурации для всех $t \in R_+^1(T)$. Пусть $\mathcal{R}^n = \mathcal{K}^n$ - n-мерный куб со сторонами

$r > 0$ с центром в точке $\mathbf{c} = \{c_1,...,c_n\}$, где $c_l - r/2 > 0$, для всех $l = \overline{1,n}$. Математическая модель должна генерировать стохастический микропроцесс в шкале «быстрого» времени (время релаксации τ_{fast}, который принадлежит цилиндрическому множеству $\mathcal{G}_T = \mathcal{K}^n \bigcup R^1_+(T)$. Одна из возможных реализаций этого свойства микропроцесса состоит в том, чтобы при достижении траекторией соответствующей границы множества $\mathcal{K}^n$ изменять на противоположную производную координаты состояния агента. При этом траектория останется непрерывной, но не везде дифференцируемой.

Особенность экономического агента по отношению ко многим другим классам объектов состоит в том, что его состояние характеризуется вектором с положительными координатами. Заметим, что подмножество $\mathcal{K}^n \in R^n_+$.

При построении математической модели экономического агента следует также учитывать, что соответствующий ему микропроцесс возникает под влиянием как собственных динамических свойств, зависящих от состояния $x^i(t)$ в данный момент времени t, так и от взаимодействий с другими агентами $i_1(i),..., i_s(i)$. Здесь будем предполагать, что собственная динамика характеризуется линейной зависимостью от состояния $x^i(t)$ со случайными параметрами, а взаимодействие со случайными группами агентов представляет собой случайный обмен ресурсами, который характеризуется энтропийно-оптимальным распределением с априорными вероятностями обменов.

Изменение состояния экономического агента будем характеризовать скоростью

$$v^i(t) = \frac{dx^i(t)}{dt}, \tag{1.2}$$

зависимость которой от состояний всех агентов описывается вектор-функцией

$$\mathcal{L}^i(x^i(t), x^{i_1(i)}(t),..., x^{i_s(i)}(t);\ \zeta^i(t), \eta^i(t)).$$

Здесь $\zeta^i(t), \eta^i(t)$ - случайные процессы, имитирующие неопределенность собственных динамических характеристик i-го агента и характеристик его взаимодействия с другими агентами соответственно.

Структура вектор-функции $\mathcal{L}^i$ мультипликативная. Она состоит из трех функций-сомножителей:

$$\begin{gathered}\mathcal{L}^i[x^i(t), x^{i_1(i)}(t),..., x^{i_s(i)}(t);\ \zeta^i(t), \eta^i(t)] = \\ L_1(\tau_{fast}) \otimes \\ \otimes \mathbf{L}^i_2[r, c, x^i(t)] \otimes \\ \otimes \mathbf{L}^i_3[x^i(t), x^{i_1(i)}(t),..., x^{i_s(i)}(t);\ \zeta^i(t), \eta^i(t)].\end{gathered} \tag{1.3}$$

Первый сомножитель характеризует временную шкалу «быстрого» времени. Второй предназначен для обеспечения пребывания траектории i-го агента в цилиндрическом множестве $\mathcal{G}_T = \mathcal{K}^n \bigcup R^1_+(T)$. Третий сомножитель моделирует собственную и вынужденную (связанную с взаимодействием с другими агентами) динамику i-го агента и устроен он аддитивно:

$$\begin{gathered}\mathbf{L}^i_3[x^i(t), x^{i_1(i)}(t),..., x^{i_s(i)}(t);\ \zeta^i(t), \eta^i(t)] = \\ = \mathbf{L}^i_{31}[x^i(t); \zeta^i(t)] + \\ + \mathbf{L}^i_{32}[x^i(t), x^{i_1(i)}(t),..., x^{i_s(i)}(t); \eta^i(t)].\end{gathered} \tag{1.4}$$

Компоненты $\mathbf{L}^i_{31}$ и $\mathbf{L}^i_{32}$ отражают общую феноменологию микропроцессов, а именно: собственная динамика ($\mathbf{L}^i_{31}$) определяется только собственным вектором состояния, а вынужденная ($\mathbf{L}^i_{32}$) - векторами состояния взаимодействующих агентов.

1.3. Собственная динамика

Собственная динамика i-го агента характеризуется зависимостью от его вектора состояния $x^i(t)$. Будем полагать, что эта зависимость линейная:

$$\mathbf{L}^i_{31}[x^i(t); \zeta(t)] = A^i[\zeta^i(t)]x^i(t),\ i = \overline{1,n} \tag{1.5}$$

Здесь $A^i[\zeta(t)]$ - квадратная матрица со случайными и статистически независимыми элементами, которые изменяются во временной шкале, существенно (на порядок) превышающей время релаксации τ_{slow}.

1.4. Взаимодействие агентов

Рассмотрим произвольную группу экономических агентов с номерами $i_1,...,i_s$. Формирование группы производится с помощью следующих двух моделей.

Первая модель - стохастическая. В ней считается заданным число 5 агентов, которые образуют группу взаимодействия. Номера конкретных агентов, входящих в группу, выбираются случайно из 1,..., N. Вторая модель - «механическая». В этой модели для каждого агента с номером i определяются «расстояния» между вектором состояния данного агента $\mathrm{x}^i(t)$ и векторами состояний всех остальных агентов в момент времени t:

$$d^{i,i_h}(t) = \| \mathrm{x}^i(t) - \mathrm{x}^{i_h}(t) \|, \ (i,i_h) = \overline{1,N} \qquad (1.6)$$

Вводится понятие «дистанционной» близости q и выбираются для каждого i-го агента номера $i_1(i),...,i_s(i)$ агентов, для которых

$$d^{i,i_h(i)}(t) \le q, \quad i = \overline{1,N} \qquad (1.7)$$

Заметим, что в это условие всегда попадает i -й агент, т.е. одно из значений $i_h(i)= i$, например, $i_s(i)=i$. Таким образом, в результате применения условия (1.7) в каждый момент времени t образуется список $I(t) = \{i \to (i_1(i),\ldots, i_{s-1}(i), i)$; $i = \overline{1,N}\}$ групп взаимодействующих агентов.

Каждый член сформированной группы в момент времени t имеет n видов порциальных ресурсов: $x^{i_1(i)}(t),...,x_n^{i_1(i)}(t);...; x_1^{i_{s-1}(i)}(t),...,$ $x_n^{i_{s-1}(i)}(t)$; $x_1^i(t),...,x_n^i(t)$. Обмен между i-м агентом и агентами с номерами $i_1(i),\ldots, i_{s-1}(i)$ предполагается случайным, т.е. порция k-го ресурса, принадлежащая агенту $i_j(i)$, случайно, независимо от других порций, с априорной вероятностью $v_k^{i_j(i),i}(t)$ попадает агенту i. Наоборот, порция k -го ресурса, принадлежащая агенту i случайно, независимо от других порций, с априорной вероятностью $v_k^{i,i_j(i)}(t)$ попадает агенту $i_j(i)$.

В результате «быстрого» и массового перемещения порций k -го ресурса образуются потоки $y_k^{i,i_h(i)}(t)$ и $y_k^{i_h(i),i}(t)$. Поскольку ресурсы порциальные, то для каждого i-го агента существует ансамбль $\mathcal{Y}^i(t)$ ресурсных потоков, и на нем определяется функция распределения вероятностей потоков и соответствующая ей обобщенная информационная энтропия

$$H_t^i(\mathcal{Y}^i(t),\mathcal{N}^i) =$$
$$= -\sum_{k-1}^{n} \sum_{i_h = i_i(i),\ldots,i_{s-1}(i),i} [y_k^{i,i_h(i)}(t) \ln \frac{y_k^{i,i_h(i)}(t)}{e v_k^{i,i_h(i)}(t)} +$$
$$+ y_k^{i_h(i),i}(t) \ln \frac{y_k^{i_h(i),i}(t)}{e v_k^{i_h(i),i}(t)}], \ i = \overline{1,N} \qquad (18)$$

где $\mathcal{N}^i$ - i-ая матрица априорных вероятностей $v_k^{i,i_h(i)}(t)$, $i_h(i)= i_1(i),\ldots, i_{s-1}(i)$, i и $k=\overline{1,n}$

Потоки удовлетворяют естественным балансным ограничениям

$$\sum_{i_h = i_i(i),\ldots,i_{s-1}(i),i} y_k^{i,i_h(i)}(t) \le \mu_k^i x_k^i(t), \quad i=\overline{1,N}; \ k=\overline{1,n} \qquad (1.9)$$

В этих равенствах коэффициенты $\mu_k^i \in [0,1]$ обозначают доли соответствующих ресурсов, которые участвуют в обмене.

Энтропия (1.8) имеет единственный «острый» максимум. Поэтому кажется естественным выбирать в ансамбле $\mathcal{Y}^i(t)$ поток, максимизирующий энтропию (1.8) на множестве (1.9). Эта задача максимизации имеет аналитическое решение:

$$y_k^{i,i_h(i)}[\mathrm{x}^i t] =$$
$$= \mu_k^i x_k^i(t) \frac{v_k^{i,i_h(i)}(t)}{\sum_{i_h(i)= i_1(i),\ldots,\, i_{s-1}(i),\, i} v_k^{i,i_h(i)}(t)}, \qquad (1.10)$$

$$i_h(i)= i_1(i),\ldots, i_{s-1}(i), i; \qquad i=\overline{1,N};\ k=\overline{1,n}. \qquad (1.11)$$

Отсюда видно, что потоки (1.10) являются функциями запасов ресурсов $\mathrm{x}^i(t)$ в момент времени t и параметров - априорных вероятностей $v_k^{i,i_h(i)}(t)$ также заданных в момент времени t.

Априорные вероятности удовлетворяют следующим условиям:

$$0 \le v_k^{i,i_h(i)}(t) \le 1, \ \ i_h(i)= i_1(i),\ldots, i_{s-1}(i), i,$$

$$\sum_{i_h(i)= i_1(i),\ldots,\, i_{s-1}(i),\, i} v_k^{i,i_h(i)}(t) = 1, \quad i=\overline{1,N}. \qquad (1.12)$$

Будем рассматривать каждую априорную вероятность $v_k^{i,i_h(i)}(t)$ как случайную величину, принимающую значения между 0 и 1. Введем случайную величину η, равномерно распределенную на интервале [0,1] и проведем с ней серию из $s^2 \times n$ независимых испытаний. Получим n массивов из s^2 ее значений, которым присвоим следующие номера:

$$\begin{matrix} 0 & \eta_k^{i\,1(i),i2(i)} & \cdots & \eta_k^{i\,1(i),i\,(s-1)(i)} & \eta_k^{i\,1(i),i} \\ \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \eta_k^{i,i\,1(i)} & \eta_k^{i,i\,2(i)} & \cdots & \eta_k^{i,i\,(s-1)(i)} & 0. \end{matrix}$$

Просуммируем по строкам элементы этого массива:

$$\sum_{i_h(i)=i_2(i),\dots i_{(s-1)}(i),i} \eta_k^{i_1(i),i_h(i)} = \mathrm{E}_k^{i_1(i)}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots, \tag{1.13}$$

$$\sum_{i_h(i)=i_1(i),\dots i_{(s-1)}(i),i} \eta_k^{i,i_h(i)} = \mathrm{E}_k^{i}, \quad k=\overline{1,n}.$$

Примем в качестве случайных значений априорных вероятностей следующие отношения:

$$v_k^{i,i_h(i)} = \frac{\eta_k^{i,i_h(i)}}{E_k^{i_h(i)}},\ i_h(i)= i_1(i),\dots,\ i_{s-1}(i),\ i;$$

$$k=\overline{1,n};\ \ i=\overline{1,N}. \tag{1.14}$$

Итак, вектор-функция $\mathbf{L}_{32}^{i}$, характеризующая влияние взаимодействий на состояние i-го агента, имеет компоненты:

$$l_k^i(\eta(t),t) = -x_k^i(t) +$$

$$+\mu_k^i x_k^i(t) \sum_{i_h(i)=i_1(i),\dots i_{(s-1)}(i),i} v_k^{i,i_h(i)}(t),\quad i=\overline{1,N};\ k=\overline{1,n} \tag{1.15}$$

где $v_k^{i,i_h(i)}(\eta(t),t)$ случайные величины, определенные в (1.14).

1.5. Математическая модель для K^n

Обратимся к равенству (1.15). Функция

$$L_1(\tau_{fast}) = \tau_{fast}^{-1}. \tag{1.16}$$

Функция $\mathbf{L}_2^{i}$ принадлежности к цилиндрическому множеству $\mathcal{G}_T$ имеет компоненты:

$$L_{2,k}^i[r,\mathbf{c},x_k^i(t)] =$$

$$= \begin{cases} 1, \text{ если } c_k - r/2 < x_k^i(t) < c_k + r/2 \\ -1, \text{ если } x_k^i(t) = c_k - r/2 \text{ или } x_k^i(t) = c_k + r/2 \end{cases} \tag{1.17}$$

Согласно (1.2, 1.3, 2.4), математическая модель i-го стохастического микропроцесса описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d\mathrm{x}^i(t)}{dt} = \tau_{fast}^{-1}\mathbf{L}_2^i(r,\mathbf{c},\mathrm{x}^i(t)) \otimes$$

$$\otimes\ (\tilde{A}^i(\zeta^i(t))\mathrm{x}^i(t) + \mathbf{I}^i(\eta(t),t)), \tag{1.18}$$

где вектор-функция $\mathbf{L}_2^i(r,\mathbf{c},\mathrm{x}^i(t))$ имеет компоненты (1.17) и вектор-функция $\mathbf{I}^i(\eta(t),t))$ имеет компоненты (1.15).

2. Трансформация микросостояний агентов в агрегированное ресурсное состояние системы (блок «преобразователь»)

Микроуровень рассматриваемой модели экономической системы содержит большое количество агентов со стохастическим поведением, динамика которого (уравнения (1.18)) реализуется в шкале «быстрого» времени I. Важную роль в дальнейшем исследовании играет соотношение временных шкал (Рис.2 а, б). Обозначим $\alpha = \tau_{slow}/\tau_{fast}$ - достаточно большое число и $\tau = \alpha t$.

Рассмотрим дискретную шкалу «медленного» времени с шагом *1 год*, и в ней интервал $\mathcal{J} = [\tau_0,\ \tau_s]$ с моментами «медленного» времени $\tau_0,\ \tau_0+1,\dots,\ \tau_0+s$. В шкале «быстрого» времени им соответствуют моменты $t_1, t_2,\dots,t_s$, где $t_j = (\tau_1 + j)/\alpha$. Около каждого момента t_j «быстрого» времени введем малые интервалы $\Upsilon_j = [t_j,\ t_j + \varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < 3\tau_{fast}$. Расположение моментов времени на соответствующих осях «медленного» и «быстрого» времени и интервалов Υ_j иллюстрирует Рис.2.

На интервале Υ_j генерируются методом Монте-Карло (МК) ансамбли $\chi^1(\Upsilon_j),\dots,\chi^N(\Upsilon_j)$ траекторий N агентов $\mathrm{x}^1(\Upsilon_j),\dots,\mathrm{x}^N(\Upsilon_j)$ в соответствии с их математическими моделями (1.18).

Будем полагать, что количество испытаний Q метода МК достаточно для того, чтобы вычислять оценки математических ожиданий векторов состояния агентов на интервале Υ_j;

Рис.2. Соотношение временных шкал

$$\overline{x}^i_Q(\Upsilon_j) = \mathcal{M}_{\chi^i(\Upsilon_j)} x^i(\Upsilon_j) \quad i=\overline{1,N}; \tag{2.19}$$

и матрицы ковариаций

$$Cov[x^i(\Upsilon_j)]_Q = \\ = \mathcal{M}_{\chi^i(\Upsilon_j)}(x^i(\Upsilon_j)-\overline{x}^i(\Upsilon_j))'(x^i(\Upsilon_j)-\overline{x}^i(\Upsilon_j)), \\ i=\overline{1,N}; \tag{2.20}$$

Поскольку компоненты векторов состояния агентов независимы, матрицы ковариаций - диагональные, и на диагонали находятся дисперсии соответствующих компонент векторов состояния, т.е.

$$D[x^i(\Upsilon_j)]_Q = \mathrm{diag}[D^i_k(\Upsilon_j),\ k=\overline{1,n}]\ \ i=\overline{1,N}. \tag{2.21}$$

где

$$D^i_k(\Upsilon_j) = \mathcal{M}_{\chi^i(\Upsilon_j)}(x^i(\Upsilon_j)-\overline{x}^i(\Upsilon_j))^2) \tag{2.22}$$

Ресурсное макросостояние экономической системы будем характеризовать матрицей

$$\tilde{X}_{\mathcal{J}} = \tilde{X}_{\mathcal{J}} + \Psi_{\mathcal{J}}, \tag{2.23}$$

где матрица $\tilde{X}_{\mathcal{J}}$ имеет элементы

$$\tilde{x}_{jk} = \sum_{i=1}^{N} \overline{x}^i_k(\Upsilon_j) \quad k=\overline{1,n},\ j=\overline{1,s}. \tag{2.24}$$

Матрица $\Psi_{\mathcal{J}}$ имеет элементы ψ_{jk} ($k=\overline{1,n},\ j=\overline{1,s}$), которые являются случайными независимыми усеченными гауссовыми величинами с нулевыми средними, принимающими значения в заданных интервалах $\Gamma^j = [-\gamma_{jk}, \gamma_{jk}]$. Дисперсии этих случайных величин определены равенствами (2.21, 2.22). Используя правило «3σ», получим связь между границами указанных интервалов и дисперсиями (2.21, 2.22):

$$\gamma_{jk}(\Upsilon_j) = 3\sqrt{\sum_{i=1}^{N} D^i_k(\Upsilon_j)}, \quad k=\overline{1,n},\ j=\overline{1,s}. \tag{2.25}$$

3. Модель макропоказателей (блок «макропроцессы»)

Для того чтобы прогнозировать изменение макропоказателей (Рис.1, модель «РМ»), необходимо иметь модель, связывающую показатели ресурсного макросостояния и макропоказатели. Любая такая модель имеет некоторое количество параметров, значения которых неизвестны. Для их определения привлекаются статистические данные о макропоказателях и модельные данные о ресурсном макросостоянии на некотором интервале. Полагая, что найденные по этой информации параметры модели сохраняются на некотором интервале времени, превышающем предыдущий, будем использовать ее для прогнозирования динамики макропараметров.

При этом следует иметь в виду, что моделируемые показатели ресурсного макросостояния и ретроспективные данные о макропоказателях содержат ошибки, которые имитируются соответствующими случайными процессами. Поэтому оценки параметров модели «РМ» следует рассматривать как средние значения этих, вообще говоря, случайных параметров.

3.1. Информация о макропоказателях

В макроэкономике принят определенный набор показателей, в терминах которых описывается макросостояние экономической системы и его эволюция в шкале «медленного» времени τ. Например, в этот набор могут входить ВВП, душевой ВВП, душевой доход, занятость, пространственное распределение ВВП и др. Введем вектор макросостояния $\mathbf{Y}(\tau) = \{y_1(\tau),...,y_m(\tau)\}$, координатами которого являются соответствующие макропоказатели. Обычно количество m макропоказателей существенно меньше размерности n вектора агрегированного ресурсного состояния.

Рассмотрим на оси «медленного» времени два интервала - ретроспекции $\mathcal{T}_{rt} = [\tau_0, \tau_s]$ и прогноза $\mathcal{T}_{pr} = [\tau_s, \tau_{s+r}]$. Будем полагать, что на интервале ретроспекции имеются данные статистики о значениях макропоказателей в дискретной шкале «медленного» времени с шагом *1 год* (Рис. 2а). Поэтому на интервале $\mathcal{T}_{rt}$ имеется набор из m векторов $\mathbf{y}^1,... ,\mathbf{y}^m$ где для удобства значениям τ присвоены соответствующие номера от 0 до s, и векторы $\mathbf{y}^h = \{y_h(0),.... y_h(s)\}$, $h = \overline{1,m}$.

Данные статистики содержат ошибки, которые моделируются аддитивными случайными векторами $\theta^1,...,\theta^m$, где векторы $\theta^h = \{\theta^h(0),...,\theta^h(s)\}$ имеют независимые компоненты $\theta_h(j)$ с нулевыми средними, которые принимают значения в интервалах $\Omega^j = [-\omega^h(j), \omega^h(j)]$, $h=\overline{1,m}$, $j=\overline{0,s}$.

Поэтому векторы наблюдаемых макропоказателей можно представить в виде:

$$\mathbf{y}^h = \tilde{\mathbf{y}}^h + \theta^h, \quad h=\overline{1,m}\ . \qquad (3.26)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{y}}^h$ - вектор идеальных значений h-го макропоказателя.

3.2. Формирование модели

Итак, блок «макропроцессы» (Рис.1) на интервале ретроспекции $\mathcal{T}_{rt}$ имеет

- на выходе реальные данные о макропоказателях, представленные векторами $\mathbf{y}^1,... ,\mathbf{y}^m$;
- на входе - модельные данные о показателях ресурсного состояния системы, представленные матрицей $\tilde{X}_{\mathcal{T}rt}$ (2.23 - 2.25).

Рассмотрим линейную модель формирования h-го макропоказателя, которая характеризуется n параметрами:

$$\mathbf{a}^h = \{a_1^h,...,a_n^h\}, \qquad (3.27)$$

Представим линейную модель связи ресурсного состояния системы с h-ым макропоказателем в виде:

$$\mathbf{y}^h = (X + \Psi)\mathbf{a}^h + \theta^h. \qquad (3.28)$$

Компоненты вектора $\mathbf{y}^h$ - реальные данные статистики по h-му макропоказателю на интервале ретроспекции, элементы матрицы X - модельные данные об оценках ресурсного состояния системы, элементы матрицы Ψ - интервальные случайные величины, имитирующие ошибки при формировании указанных оценок, элементы вектора θ^h - интервальные случайные величины, имитирующие ошибки в статистических данных об h -ом макропоказателе.

Далее для сокращения записи опустим верхний индекс h, полагая, что все последующее относится к h -му макропоказателю.

Для определения параметров **a** будем использовать так называемый $\mathcal{W}$-робастный подход: «наилучшие» параметры при «наихудших» шумах в классе $\mathcal{W}$ [9]. Базовая идея этого подхода состоит в рандомизации модели (3.28), т.е. в рассмотрении ее параметров как случайных величин, значения которых с вероятностями $p_1,...,p_n$ принадлежат интервалам $\mathcal{A}_k = [a_k^-, a_k^+]$, $k=\overline{1,n}$.

Тогда компоненты вектора параметров (3.27) можно представить в виде:

$$a_k = (1-p_k)a_k^- + p_k a_k^+ = a_k^- + p_k D_k, \qquad (3.29)$$

$$D_k = a_k^+ - a_k^-, \quad k=\overline{1,n}. \qquad (3.30)$$

Введем векторы:

$\mathbf{p} = \{p_1,..., p_n\}$, $\mathbf{a}^- = \{a_1^-,...,a_n^-\}$, $\mathbf{D} = \{D_1,..., D_n\}$

Тогда

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^- + \mathbf{p} \otimes \mathbf{D}, \qquad (4.31)$$

где знак $\otimes$ обозначает покоординатное умножение векторов.

По аналогии введем вектор вероятностей $\mathbf{q} = \{q_1,..., q_s\}$ для случайного вектора θ и матрицу вероятностей $R = [r_{jk} \mid j = \overline{1,s},\ k=\overline{1,n}]$ для элементов матрицы Ψ. Тогда будем иметь вектор

$$\theta = -\omega + 2\mathbf{q} \otimes \omega, \quad \omega=\{\omega_1,...,\omega_s\}; \qquad (3.32)$$

и матрицу

$$\Psi = -\gamma + 2R \otimes \gamma, \quad \gamma = [\gamma_{jk} \mid j = \overline{1,s},\ k=\overline{1,n}]. \quad (3.33)$$

Все введенные вероятности принадлежат интервалу [0,1], вектора вероятностей **p, q** и строки матрицы вероятностей R *ненормированы*. Последнее свойство следует из того, что параметры модели и компоненты шумов независимы.

Итак, рандомизированная версия модели (3.28) приобретает следующий вид:

$$\mathbf{y} = \mathrm{A} + B(\mathbf{p} \otimes \mathbf{D}) + 2(R \otimes \gamma)\mathbf{a}^{-} + 2(\mathbf{q} \otimes \omega) + \\ +2(R \otimes \gamma)(\mathbf{p} \otimes \mathbf{D}), \qquad (3.34)$$

где

$$A = B\mathbf{a}^{-} - \omega,\ B = (X - \gamma). \qquad (3.35)$$

Здесь вероятности **p, q,** R - неизвестные. Следуя подходу, изложенному в |9|, определим энтропию

$$\mathrm{H} = -\langle \mathbf{p}, \ln \mathbf{p} \rangle - \langle \mathbf{q}, \ln \mathbf{q} \rangle - \sum_{j=0}^{s} \langle \mathrm{r}^{j}, \ln \mathrm{r}^{j} \rangle. \qquad (3.36)$$

В этом равенстве $\ln\mathbf{z}=\{\ln z_1,\ldots, \ln z_v\}$, $\mathbf{r}^1,\ldots\mathbf{r}^s$ - строки матрицы R.

Под $\mathcal{W}$-классом будем понимать распределения вероятностей $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathrm{R}) \in [0,1]$.

Тогда

$$(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*, \mathrm{R}^*) = \mathrm{argmax}(\mathrm{H} | (\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathrm{R}) \in \mathcal{D}), \qquad (3.37)$$

где

$$\mathcal{D} = \mathcal{W} \cap \mathcal{L}, \qquad (3.38)$$

и множество $\mathcal{L}$ описывается равенствами (3.34).

Заключение

Предложена математическая модель экономического агента в терминах состояния его ресурсообеспеченности. Это состояние определяется собственными динамическими свойствами и взаимодействием с другими агентами. Последнее строится на стохастическом обмене ресурсами, который рассматривается как последовательность локально стационарных состояний, описываемых задачами максимизации энтропии. Предлагается процедура трансформации множества микросостояний агентов в ресурсное макросостояние системы. Для построения модели связи ресурсного макросостояния с макропоказателями предлагается рандомизированная модель, в рамках которой определяются энтропийно-оптимальные вероятности реализации ее параметров.

Литература

1. Больцман Л. «On the link between the second beginning of mechanical calory theory and probability theory in theorems of thermal equilibrium 1877, Избранные труды. Сер. "Классики науки". М.: Наука, 1984, с.190-236.
2. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Статистическая физика. М.: Наука, 1964.
3. Meerkov S.M. "Mathemetical Theory of Behavior - Individual and Collective Behavior of Retardable Elements"// Mathematical Biosciences, 1979. V. 43. P. 41-106.
4. Haken H. Synergetics. Springer-Verlag, Heidelberg, 1974.
5. Prigogine I., Stengers I. Order out of Chaos. Heinemann, London, 1984.
6. Weidlich W., Haag G. Interregional Migration: Dynamic Theory and Comparative Analysis. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
7. Вайдлих В. Социодинамика. Системный подход к моделированию в социальных науках. М.: УРСС, 2004.
8. Попков Ю.С. Теория макросистем. М.: УРСС, 1999.
9. Двуреченская М.А., Попков А.Ю., Попков Ю.С., Шкловский Е.Ю. Модели и алгоритмы стохастической микродинамики. Труды ИСА РАН, 2011, т.61, вып. 1, с.14-30.

Попков Юрий Соломонович. Директор ИСА РАН. Окончил Московский энергетический институт в 1960 году. Доктор технических наук, профессор. Автор 151 печатной работы. Область научных интересов: системный анализ, математическое моделирование. E-mail: popkov@isa.ru