Алгоритмическое и программное обеспечение для вычисления точной границы устойчивости нелинейной дискретной системы

А.С. Алиев, А.И. Баркин

Аннотация. Приводится алгоритм вычисления максимальной области абсолютной устойчивости по величине сектора, ограничивающего нелинейность в нелинейной дискретной системе. Используется метод гармонического баланса по элементам тригонометрического полинома. Разработано прикладное программное обеспечение для исследования устойчивости нелинейных дискретных систем.

Ключевые слова: алгоритмы вычислений, нелинейные системы управления, импульсные системы, абсолютная устойчивость, частотные характеристики.

Введение

В предыдущей работе [1] был рассмотрен алгоритм вычисления периодических колебаний в непрерывных системах с ключом. Поскольку такие системы являются частным случаем систем, изучаемых в теории абсолютной устойчивости [2,3], то отсутствие периодических колебаний является необходимым условием абсолютной устойчивости. Для непрерывных систем второго и третьего порядка доказано [4,5], что условие отсутствия простых периодических колебаний является одновременно достаточным условием абсолютной устойчивости. Эти свойства сохраняются и в дискретных системах [6,7].

В настоящей работе представлен алгоритм и программное обеспечение для получения точных условий существования периодических колебаний в импульсных системах с ключом. Необходимые условия отсутствия таких колебаний можно рассматривать как необходимые условия абсолютной устойчивости нелинейных систем с нестационарной нелинейностью.

1. Условия существования периодических колебаний

Рассмотрим систему (Рис.1), где $G(z)$ - дискретная передаточная функция линейной части; K - ключ, периодически с периодом N замыкающийся на R тактов ($R \le N$). Предполагается, что ключ работает синфазно с импульсным элементом. Вход $x[n]$ и выход $y[n]$ связаны соотношением:

$y[n] = kx[n]$, если ключ замкнут; $y[n] = 0$, если ключ разомкнут, $n = 0,1,2,\dots$. (1)

Рассматриваются возможные периодические колебания периода $2N$, обладающие симметрией $x[n+N] = -x[n]$, $y[n+N] = -y[n]$. Такие колебания могут быть представлены [2] тригонометрическими полиномами

$$x[n] = \sum_{r=1}^{g}[A_{2r-1}\sin((2r-1)\overline{\omega}n) + B_{2r-1}\cos((2r-1)\overline{\omega}n)],$$

$$y[n] = \sum_{r=1}^{g}[y_{2r-1}\sin((2r-1)\overline{\omega}n) + y'_{2r-1}\cos((2r-1)\overline{\omega}n)], \tag{2}$$

где $\overline{\omega}=\pi/N$, $g=(N+1)/2$, если N - нечетное, и g=N/2, если N - четное. Коэффициенты Фурье вычисляются по формулам:

$$y_r=\frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}y[n]\sin(r\overline{\omega}n),$$
$$y'_r=\frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}y[n]\cos(r\overline{\omega}n). \tag{3}$$

В отличие от непрерывного случая, где периодические колебания описываются тригонометрическими полиномами (т.е. конечными отрезками ряда Фурье) *приближенно*, формулы (2, 3) являются точными. При $N=1$ и $N=2$ суммы в (2) состоят из одного слагаемого (g = 1), однако число слагаемых растет по мере роста N.

В силу условия (1) получаем

$$y_r=k\sum_{s=1}^{N}[A_s\psi_{rs}+B_s\varphi_{rs}], \tag{4}$$

где

$$\psi_{rs}=\frac{2}{N}\sum_{n=1}^{R}\sin(r\overline{\omega}n)\sin(s\overline{\omega}n),$$
$$\varphi_{rs}=\frac{2}{N}\sum_{n=1}^{R}\sin(r\overline{\omega}n)\cos(s\overline{\omega}n). \tag{5}$$

Введем следующие обозначения:

$$\vartheta(r)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{R}\cos(r\overline{\omega}n)=\frac{\cos[(R+1)r\overline{\omega}/2]\sin(Rr\overline{\omega}/2)}{N\sin(r\overline{\omega}/2)},$$
$$\eta(r)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{R}\sin(r\overline{\omega}n)=\frac{\sin[(R+1)r\overline{\omega}/2]\sin(Rr\overline{\omega}/2)}{N\sin(r\overline{\omega}/2)}.$$

Тогда получаем

$$\psi_{rs}=\vartheta(r-s)-\vartheta(r+s),\ r\neq s,$$
$$\psi_{rr}=R/N-\vartheta(2r),$$
$$\varphi_{rs}=\eta(r+s)-\eta(s-r),\ r\neq s,$$
$$\varphi_{rr}=\eta(2r). \tag{6}$$

Аналогично

$$y'_r=k\sum_{s=1}^{N}[A_s\varphi_{sr}+B_s\mu_{rs}], \tag{7}$$

где

$$\mu_{rs}=\frac{2}{N}\sum_{n=1}^{R}\cos(r\overline{\omega}n)\cos(s\overline{\omega}n). \tag{8}$$

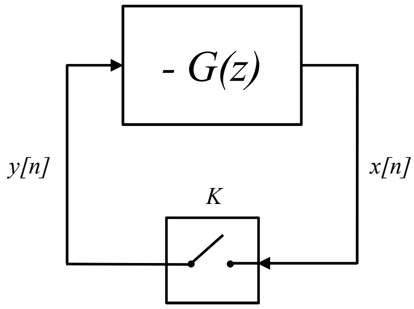

Рис. 1.

Используя введенные выше обозначения, получим

$$\mu_{rs}=\vartheta(r-s)+\vartheta(r+s),\ r\neq s,$$
$$\mu_{rr}=R/N+\vartheta(2r). \tag{9}$$

Нетрудно убедиться в том, что при фиксированном отношении $\gamma=R/N$ и при увеличении N коэффициенты $\phi_{rs},\varphi_{rs},\mu_{rs}$ стремятся к одноименным коэффициентам, выведенным в [1] для непрерывного случая.

Уравнения баланса получаются как соотношения, связывающие вход $y[n]$ и выход $x[n]$ линейной части с частотной характеристикой $-G(e^{i\overline{\omega}})$:

$$-A_{2r-1}=y_{2r-1}X_{2r-1}-y'_{2r-1}Y_{2r-1},$$
$$-B_{2r-1}=y_{2r-1}Y_{2r-1}+y'_{2r-1}X_{2r-1},\ r=1,2,...,g, \tag{10}$$

где $X_p=\operatorname{Re}G(\exp(pi\overline{\omega})),\ Y_p=\operatorname{Im}G(\exp(pi\overline{\omega}))$. Подстановка (4) и (7) в (10) приводит к линейной однородной системе уравнений относительно амплитуд A_{2r-1},B_{2r-1}.

Эта система имеет определитель

$$\det(kD+I_{2g})=\det(k\begin{bmatrix} d_{1,1} & ... & d_{1,2g}\\ ... & ... & ...\\ d_{2g,1} & ... & d_{2g,2g}\end{bmatrix}+I_{2g}), \tag{11}$$

где I_{2g} - единичная матрица размера 2g, а элементы d_{pq} вычисляются по следующей таблице.

	q - нечетное	q- четное
p-нечетное	$d_{pq}=X_p\psi_{p,q}-Y_p\varphi_{q,p}$	$d_{pq}=X_p\varphi_{p,q-1}-Y_p\mu_{p,q-1}$
p - четное	$d_{pq}=X_{p-1}\varphi_{q,p-1}+Y_{p-1}\psi_{q,p-1}$	$d_{pq}=X_{p-1}\mu_{q-1,p-1}+Y_{p-1}\varphi_{p-1,q-1}$

Условием существования периодического режима (2) является равенство нулю определителя (11).

2. Алгоритм вычисления границы абсолютной устойчивости по параметру k

1. Задаемся начальным значением $k = k_{ini}$, при котором $\Delta = \det(kD + I_{2p}) > 0$, максимальным значением $N = N_{\max}$ и шагом Δk.

2. Для каждого N из интервала $[1, N_{\max}]$ проверяется условие $\Delta > 0$ при значениях $R \in [1, N]$.

3. Если при всех $R \in [1, N]$ и $N \in [1, N_{\max}]$ это условие выполняется, то величина k увеличивается до $k + \Delta k$ и происходит возвращение к п. 2, в противном случае происходит останов и принимается $k_{\max} = k$.

4. Для повышения точности рекомендуется повторить вычисления с уменьшенным шагом Δk.

Как указывалось выше, при $N = 1{,}2$ в представлениях (2) присутствует единственная гармоника частоты $\overline{\omega}$:

$$x[n] = A_1 \sin(\overline{\omega} n) + B_1 \cos(\overline{\omega} n),$$
$$y[n] == y_1 \sin(\overline{\omega} n) + y_1' \cos(\overline{\omega} n). \qquad (12)$$

Для этого случая из (11) получаем условие существования колебаний

$$\det(kD + I_2) = (\gamma^2 - u^2 - v^2)k^2(X_1^{\ 2} + Y_1^{\ 2}) + $$
$$+ 2\gamma k X_1 + 1 = 0, \qquad (13)$$

где $\gamma = R/N$, $u = \dfrac{\sin(\pi\gamma)\cos(\pi\gamma + \pi/N)}{N\sin(\pi/N)}$,

$v = \dfrac{\sin(\pi\gamma)\sin(\pi\gamma + \pi/N)}{N\sin(\pi/N)}$.

При $N = 1$ имеем $R = 1, \gamma = 1, u = 1, v = 0$. В данном случае $\gamma^2 - u^2 - v^2 = 0$. Поэтому из (13) следует неравенство $kG(e^{i\pi}) > -1/2$ как необходимое условие отсутствия колебаний частоты $\overline{\omega} = \pi$.

При $N = 2$ имеем $R = 1{,}2$; $\gamma = 0.5{,}1$; $u = -0.5{,}0$; $v = 0{,}0$. Из (13) получаем неравенство

$$k \operatorname{Re} G(e^{i\pi/2}) > -1, \text{ если } R = 1,$$

и $kG(e^{i\pi/2}) \neq -1$ при $R = 2$.

В ***приложении*** (см. ниже) дано описание программы вычислений.

Пример 1. Пусть передаточная функция непрерывной линейной части равна $W(p) = \dfrac{1}{p^2 + p + 2}$. При отсутствии импульсного элемента предельное значение сектора абсолютной устойчивости, определенное в [1], равно $k_{\max} = 6.98$. Используя приведенную выше методику, определим соответствующий коэффициент при наличии фиксатора с периодом $T = 0.1$. Дискретная передаточная функция линейной части имеет вид

$$G(z) = 4.829415 \bullet 10^{-3} \frac{z + 0.967197}{z^2 - 1.885837z + 0.9048374}.$$

Проведенные расчеты приводят к следующим результатам:

$k_{\max} = 5.688, N = 15, R = 7$. Круговой критерий дает $k_{\max} = 3.4251$.

Пример 2. Рассмотрим ту же систему, что в примере 1, но при $T = 1$. Дискретная передаточная функция линейной части теперь имеет вид

$$G(z) = 0.3144632 \frac{z + 0.7016423}{z^2 - 0.2976716z + 0.3678795}.$$

Результаты расчетов:

$k_{\max} = 2.09455, N = 2, R = 1$. Круговой критерий дает $k_{\max} = 2.0944$. В данном случае величины максимального сектора устойчивости, вычисленные по двум критериям, практически совпадают. Этот результат объясняется тем, что, как показано выше, при N=2, R=1 устойчивость определяется неравенством $k \operatorname{Re} G(e^{i\pi/2}) > -1$. Для данной системы $\operatorname{Re} G(e^{i\pi/2}) = -0.4774387$, что близко к минимуму действительной части.

Заключение

Предложен способ получения оценки параметрической области устойчивости, базирующийся на применении метода гармонического баланса к исследованию простых нелинейных колебаний в дискретных системах.

Разработана программа, позволяющая с любой точностью для систем любого порядка вычислять необходимую границу устойчивости по величине сектора нелинейности.

Для систем второго и третьего порядка эта граница является и достаточной.

Для вычисления оценки области устойчивости нужна только частотная характеристика дискретного линейного блока, которая может быть задана как формулой, так и в виде массива экспериментальных данных.

Приложение
Описание программы вычислений

Для расчетов использовалась усовершенствованная версия программы из [1], оформленная как независимое Windows-приложение.

Программа может работать в двух режимах – для непрерывных и дискретных систем. Внешний вид основного окна в каждом режиме представлен на Рис. 2 и Рис.3.

В обоих режимах целью является определение величины максимального сектора абсолютной устойчивости — числа $k = k^*$, при котором определитель (11) достигает нуля.
Выбор режима осуществляется переключателем *Pulse system* в правом верхнем углу окна.

Перед расчетом требуется задать следующие данные.

- Источник для частотной характеристики. Это либо поле *Input File*, либо поле с аналитическим выражением *Expression for W(p)(*или *Expression for G(z)* для дискретного случая*)*. Имя файла можно ввести вручную, а можно выбрать обычным образом по кнопке *Choose*. Что именно использовать (файл или формулу) определяет переключатель *Use an expression instead of input file*.
- Начальное значение (*min*), шаг (*step*) и максимальное значение (*max*) на панели *k*. Максимальное значение служит для гарантированного останова программы, если не будет найден отрицательный определитель.
- Для непрерывных систем: заполнить панель *Gamma* – начальное (*min*) и конечное (*max*) значение для γ, а также количество значений (*number of*) на этом интервале (Рис. 2). Шаг определяется отношением величины интервала к числу значений, и, задавая различное их число, можно регулировать точность поиска.

Для дискретных систем: заполнить панель *N* – начальное (*min*) и конечное (*max*) значения (Рис. 3).

- Число гармоник (поле *Number of harmonics* на Рис. 2) – только для непрерывных систем.

По кнопке *Run*, начиная с минимального *k,* пробегаются все значения частоты и параметров (для непрерывной системы – из панели *Gamma*, для дискретной – из панели *N* и по всем *R*). Для них рассчитывается определитель (11), и при отрицательном значении результат выводится на экран и строится график зависимости определителя от частоты для тех параметров, при которых случилось первое отрицательное значение определителя.

В нижней части окна, под полем *Expression for W(p)*, собраны элементы управления для создания файла с частотной характеристикой по заданному выражению. Требуется ввести имя файла в поле *Output file*, заполнить панель *omega* – начальное значение (*min*), количество значений (*number*) и шаг между ними (*step*) – после чего нажать кнопку *Prepare file*.

Файл с частотной характеристикой должен быть текстовым, с тремя колонками чисел, разделённых пробелами или табуляторами. Первая колонка – значения частоты (ω), две других – действительная и мнимая части частотной характеристики $W(i\omega)$ или $G(e^{i\varpi})$. Значения частоты должны быть упорядочены по возрастанию.

Выражение в поле *Expression for W(p)* задаётся как формула от *p* в стиле языка программирования, что в большинстве случаев совпадает с "естественной" записью.

Аналогично для дискретного случая выражение в поле *Expression for G(z)* задается как формула от *z*. Примеры заполнения этого поля приведены на Рис. 2 и Рис.3.

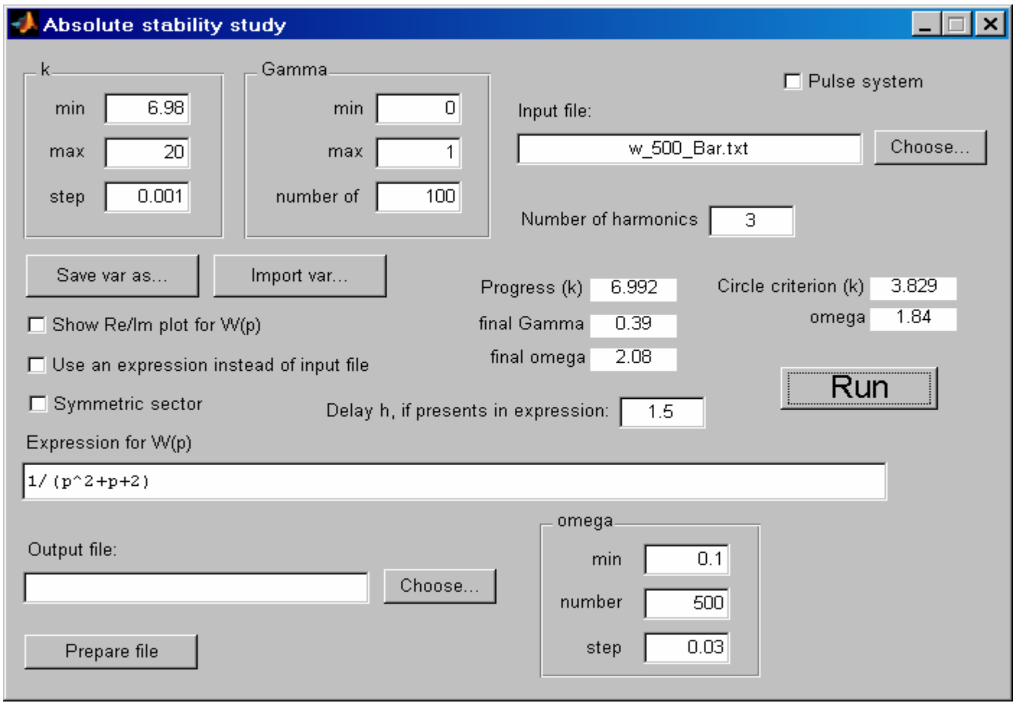

Рис. 2. Непрерывная система

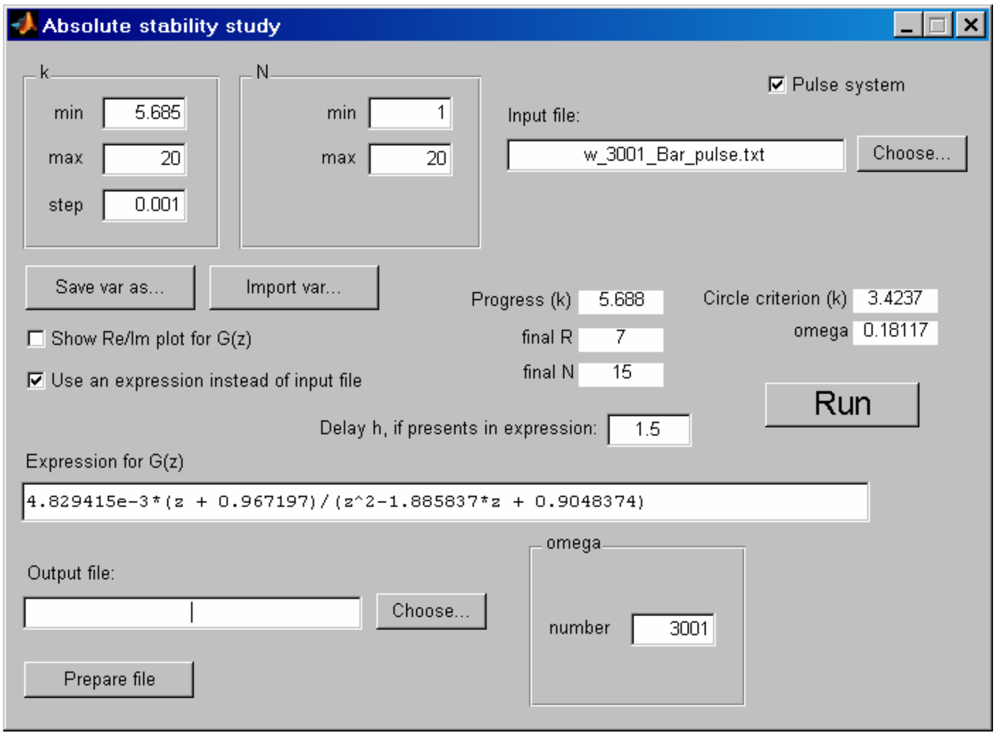

Рис. 3. Дискретная система

Литература

1. Алиев А.С., Баркин А.И. Алгоритм вычисления максимальной величины области абсолютной устойчивости//Информационные технологии и вычислительные системы 3/2009, С. 3-11.
2. Пятницкий Е.С. Новые исследования по абсолютной устойчивости систем автоматического регулирования// Автоматика и телемеханика.1968.№6. С.5-36.
3. Либерзон М.Р. Очерки о теории абсолютной устойчивости//Автоматика и телемеханика. 2006. №10. С. 86-119.
4. Пятницкий Е.С., Рапопорт Л.Б. Существование периодических движений и критерии абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем в трехмерном случае // Автоматика и телемеханика. 1991.№5.С. 68-79.
5. Рапопорт Л.Б. Антипериодические движения и алгебраический критерий абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем в трехмерном случае. // Автоматика и телемеханика .1993. №7. С. 38-54.
6. Молчанов А.П. Критерий абсолютной устойчивости импульсных систем с нестационарной нелинейностью.I// Автоматика и телемеханика. 1983. №5.С. 73-81.
7. Молчанов А.П. Критерий абсолютной устойчивости импульсных систем с нестационарной нелинейностью. II// Автоматика и телемеханика. 1983. №6.С. 42-52.

Алиев Александр Семенович. Старший научный сотрудник ИСА РАН, кандидат технических наук. E-mail: ali@isa.ru.

Баркин Александр Иванович. Главный научный сотрудник ИСА РАН, доктор технических наук, профессор. E-mail: barkin@isa.ru.